

Formula di Taylor con resto di LAGRANGE

Data $f(x)$, dato n intero ≥ 0 esiste un unico $P_n(x)$ di grado $\leq n$ tale che

$$f(x) = P_n(x) + \boxed{O(x^{n+1})} \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

resto di PEANO

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

resto che si vorrebbe piccolo

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Esempio

$$x^2 + 1000^{1000} x^4 = x^2 + O(x^3)$$

ξ è un punto (che non si conosce) compreso tra 0 e x

Idea della dim. nel caso $n=2$

Cauchy

$$\begin{aligned}
 \frac{f(x) - P_2(x)}{x^3} &= \frac{f(x) - P_2(x) - [f(0) - P_2(0)]}{x^3 - 0} \stackrel{=0}{=} \\
 &= \frac{f'(\xi) - P_2'(\xi)}{3\xi^2} = \frac{f'(\xi) - P_2'(\xi) - [f'(0) - P_2'(0)]}{3\xi^2 - 0} \\
 &= \frac{f''(\xi_1) - P_2''(\xi_1)}{6\xi_1} = \dots = \frac{f^{(n)}(\xi_2) - P_2^{(n)}(\xi_2)}{6\xi_2} = 0
 \end{aligned}$$

$P_2''' = 0$ perché
derivata terza
di un pol. di grado
2.

1ª applicazione Approssimazione di Funzioni

$$\sin \frac{1}{10} = \frac{1}{10} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{10^3} + \frac{1}{120} - \frac{1}{10^5} + \frac{f^{(7)}(\xi)}{5040} \frac{1}{10^7} = (\star)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{f^{(7)}(\xi)}{7!} x^7$$

$$f(x) = \sin x \\ \xi \in (0, x)$$

$$(\star) = \boxed{\frac{1}{10} - \frac{1}{6000} + \frac{1}{12.000.000}} + \boxed{\frac{f^{(7)}(\xi)}{5040 \cdot 10^7}}$$

se dico che $\sin \frac{1}{10} \approx$

commetto un errore
che è

$$= \frac{1.200.000 - 2.000 + 1}{12.000.000} = \frac{1.198.001}{12.000.000} = 0,099833416$$

$$|\text{errore}| = \frac{|f^{(7)}(x)|}{5.040 \cdot 10^7} \leq \frac{1}{5.000 \cdot 10^7}$$

$$\leq \frac{1}{5 \cdot 10^{10}}$$

$$|f^{(7)}| = \left| \frac{\pm \sin}{\pm \cos} \right| \leq 1$$

$$\sin \frac{1}{10} = 0,099833416$$

Per esercizio : fermarsi all'ordine 3 e vedere quante cifre
esatte si trovano

2ª applicazione Dimostrare che

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

per ogni $x > 0$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{f'''(\xi)}{3!} x^3$$

$P_2(x)$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} +$$

$$\boxed{\frac{e^\xi}{3!} x^3}$$

> 0 se
 $x > 0$

$$> 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

N.B. sarebbe il contrario
per $x < 0$