

MAT I TLC

ORA 47

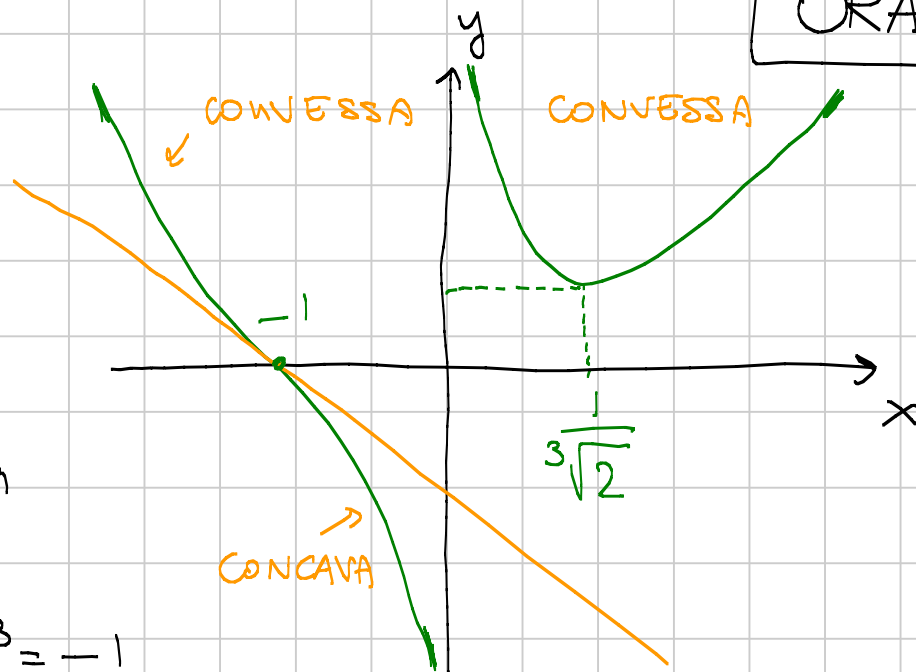
$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$$

Definita per $x \neq 0$

$f(x) = 0$ mi aspetto un'unica
soluz. < 0

$$x^2 + \frac{1}{x} = 0 \quad ; \quad x^2 = -\frac{1}{x} \quad ; \quad x^3 = -1$$

$\Downarrow$
 $x = -1$



L'eq. $f'(x) = 0$ ci aspettiamo che abbia un'unica soluz. > 0

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

Ci aspettiamo $f''(x) = 0$ abbia un'unica soluz. < 0

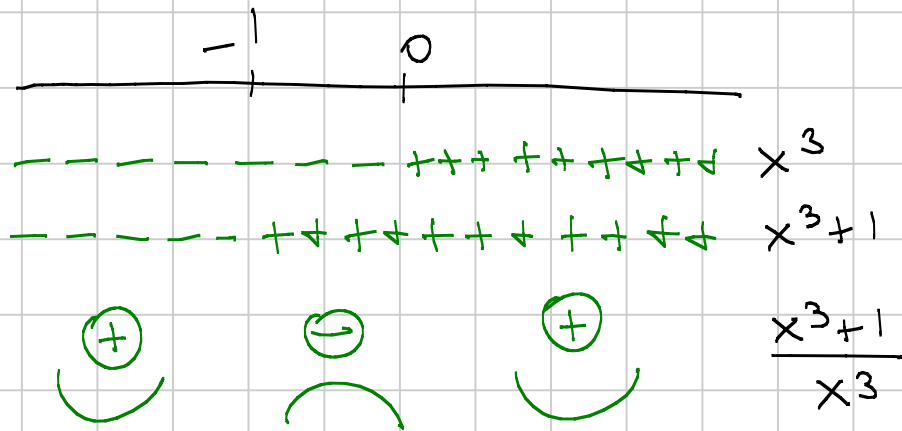
$$f''(x) = 2 + \frac{2}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x^3 = -1 \Leftrightarrow x = -1$$

$$2 + \frac{2}{x^3} > 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x^3} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} > -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3 + 1}{x^3} > 0$$

NOO!!!

$$\begin{aligned} 1 &> -x^3 \\ &\Leftrightarrow \\ x^3 &> -1 \\ &\Leftrightarrow \\ x &> -1 \end{aligned}$$



Def. Una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice LIPSCHITZIANA

↑
vale anche se è definita
in un intervallo o
semiretta

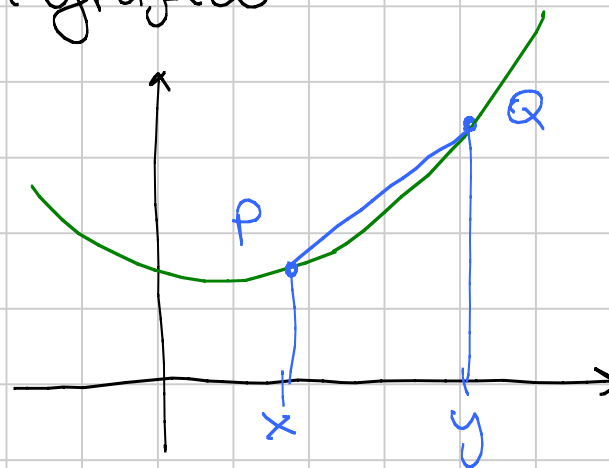
se esiste una costante $L \in \mathbb{R}$, detta cost. di LIPSCHITZ,
tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq L |x - y| \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$$

Interpretazione geom. in termini di grafico

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq L$$

↓
coeff. angolare
della retta PQ



Brutalmente: f Lipschitziana $\Leftrightarrow$ le rette PG non sono troppo pendenti



il grafico di f non è troppo pendente.

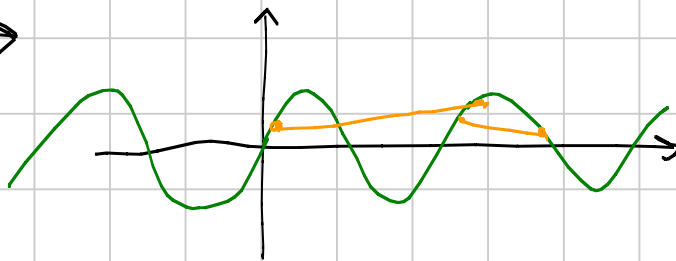
Esempio 1 $f(x) = x^2$ è lip. su $\mathbb{R}$? NO



Non c'è un valore L che sia maggiore di tutti i coeff. angolari

Esempio 2 $f(x) = \sin x$ è lip. su $\mathbb{R}$

Sì, è lip. !!!



Legame tra Lipschitziani e derivata prima

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile.

Allora f è Lipschitziana in $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ esiste una costante L t.c.
 $|f'(x)| \leq L$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

Idem su un intervallo. Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile. Allora

f Lipschitziana in $[a, b] \Leftrightarrow$ esiste una costante L t.c.

$|f'(x)| \leq L$ per ogni $x \in [a, b]$.

Dim. della freccia $\Leftarrow$ Hp: $|f'(x)| \leq L \quad \forall x \in \mathbb{R}$
Tesi: f lip. in $\mathbb{R}$

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y) \quad \text{LAGRANGE}$$

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y| \leq L |x - y|$$

il che è equivalente a dire che f è lip.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\cos x) - \arctan(\cos 2x)}{x^2} = -\frac{1}{2} \left[\frac{0}{0} \right]$$

Non posso usare gli sviluppi classici perché l'argomento di $\arctan$ non tende a zero.

Lo vedo come

$$\frac{f(\cos x) - f(\cos 2x)}{x^2} = \frac{f'(\xi)}{x^2} (\cos x - \cos 2x)$$

$\downarrow$ $f'(1)$ " $\frac{1}{2}$ $\uparrow$ $\frac{-1}{2}$

lo posso fare con Taylor

$$\frac{\cos x - \cos R x}{x^2} = \frac{\cancel{1} - \frac{x^2}{2} - \cancel{1} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \frac{-x^2 + o(x^2)}{x^2} \rightarrow -1$$

ξ è un illustre sconosciuto che sta fra $\cos x$ e $\cos R x$.

Quando $x \rightarrow 0$, $\cos x \rightarrow 1$ e $\cos R x \rightarrow 1$, quindi anche $\xi \rightarrow 1$

$$f(x) = \arctan x ; f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$$

— 0 — 0 —

Disuguaglianze classiche

$$\sin x \leq x \quad \forall x \geq 0$$

$$\arctan x \leq x \quad \forall x \geq 0$$

$$e^x \geq 1+x \quad \forall x \geq 0$$

$$\log(1+x) \leq x \quad \forall x \geq 0$$

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \quad \forall x \geq 0$$

$$\sin x \leq x \quad \forall x \geq 0$$

Considero la funzione

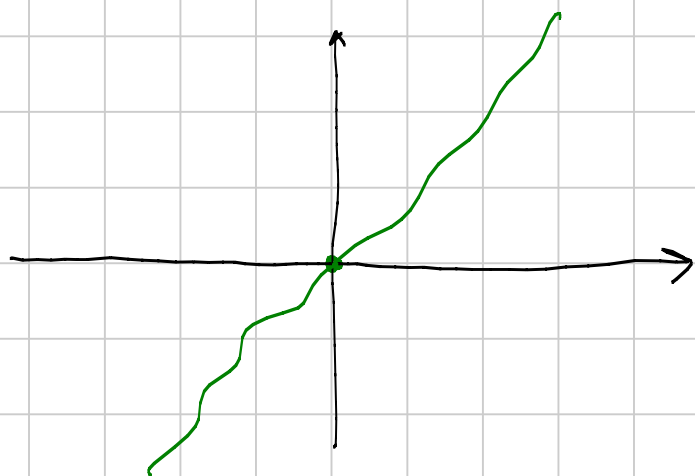
$$f(x) = x - \sin x$$

La disug. data è equivalente a dim. che $f(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$.

$$f(0) = 0 \quad f'(x) = 1 - \cos x \geq 0 \text{ sempre e inoltre}$$

$f'(x) = 0$ solo quando $\cos x = 1$, cioè sporadic.

Monotonia 3 $\Rightarrow f(x)$ è strett. crescente su tutto $\mathbb{R}$



$$\Rightarrow f(x) > 0 \text{ per } x > 0 \quad x > \sin x$$

$$f(0) = 0$$

$$f(x) < 0 \text{ per } x < 0 \quad x < \sin x$$

$\arctan x \leq x \quad \forall x \geq 0$ Considero la funzione
 $f(x) = x - \arctan x$

$$f(0) = 0, \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0$$

$$\text{Inoltre } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Monotonia 3 $\Rightarrow$ f strett. cresc. (come sopra)

$$f(x) > 0 \quad \text{per } x > 0$$

$$\arctan x < x \quad \text{per } x > 0$$

$$f(x) < 0 \quad \text{per } x < 0$$

$$\arctan x > x \quad \text{per } x < 0$$

