

MAT I TLC

ORA 46

Titolo nota

09/11/2006

Esempio $f(x) = 3x + \sin x$ Ma asintoti obliqui?

$$u = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \sin x}{x} = 3$$

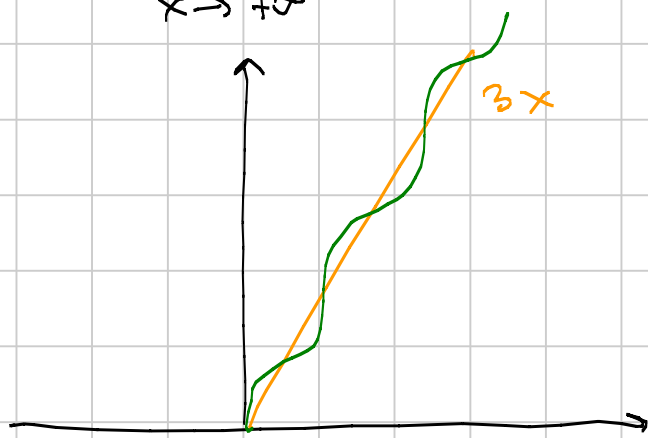
[N.B. Questo limite con l'Hôpital non viene]

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ux] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [3x + \sin x - 3x]$$

N.E.

↓

NO ASINT
OBLIQUO



CONVESSITÀ

LIPSCHITZIANITÀ

Def. Una funzione $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ si dice CONVESSA se

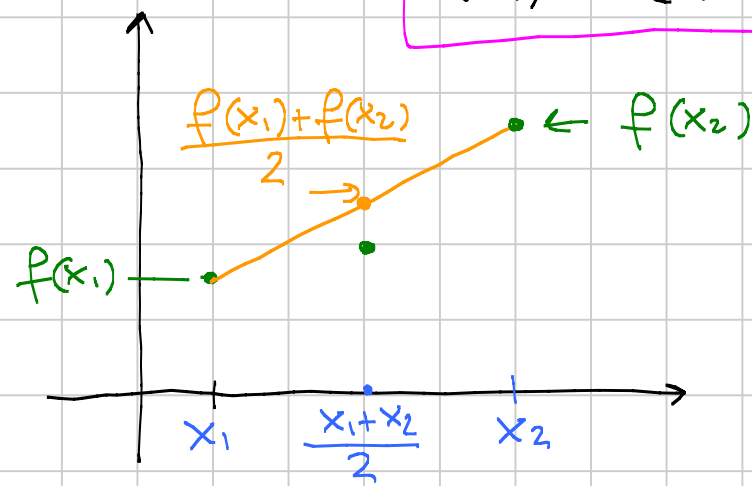
↓
funziona anche se l'insieme di
partenza è tutto $\mathbb{R}$, un intervallo
chiuso o una semiretta

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b)$$

Caso particolare $\lambda = \frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$



Cosa succede quando λ varia fra 0 e 1. Il punto

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \rightsquigarrow \frac{x_1 + x_2}{2}$$

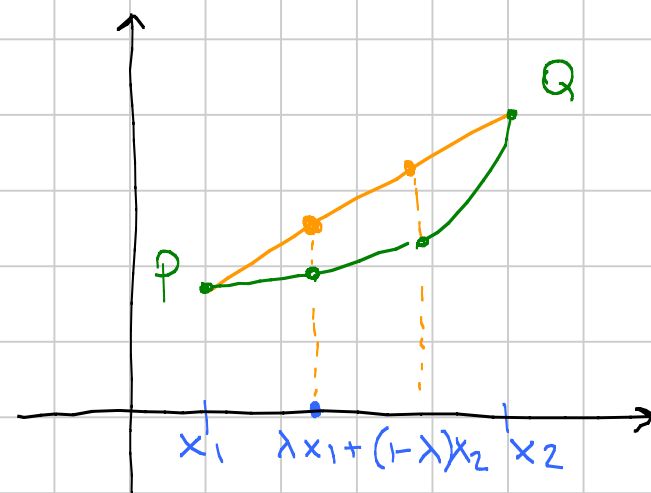
Quando λ va da 0 a 1,
il punto percorre il
segmento x_1, x_2 partendo
da x_2 verso x_1 .

$$\lambda = 0 \rightsquigarrow x_2$$

$$\lambda = 1 \rightsquigarrow x_1$$

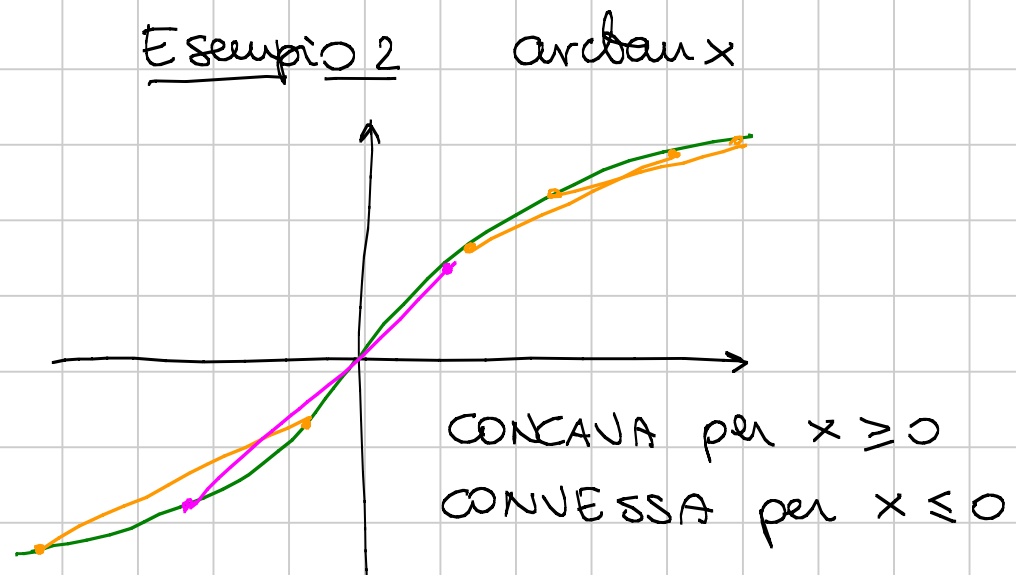
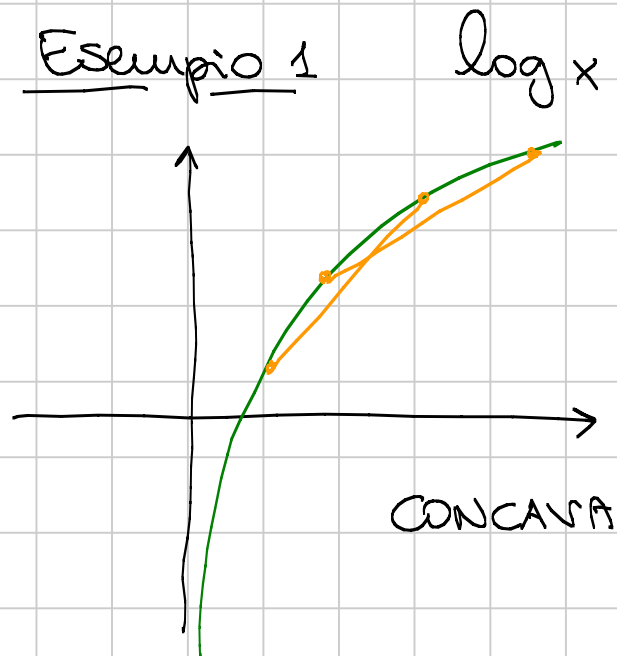
L'espressione $\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$ rappresenta
la coord y del punto del segmento
PQ che sta sopra $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$

Funzione convessa $\Leftrightarrow$ il valore nel
punto $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ sta sotto il
segmento



Più geometricamente: una funzione è convessa $\Leftrightarrow$ presi 2 qualunque punti P e Q sul grafico si ha che il segmento PQ sta tutto sopra il grafico.

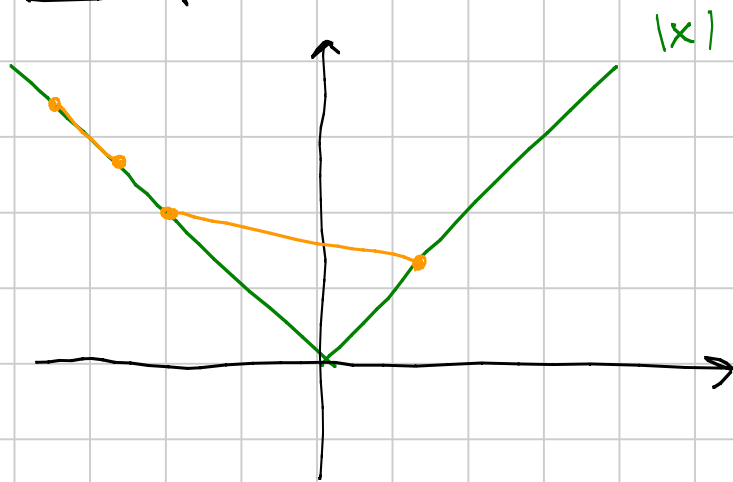
Una funzione si dice concava se il segmento sta tutto sotto il grafico,



Quali sono le funzioni contemporaneamente concave e convexe,
solo le rette. (N.B. nella def. di funzione convessa c'è
il $\geq$, quindi il segmento può anche stare sul grafico)

Def. Si definiscono STRETT. CONVESSE le funzioni in cui
il segmento PQ sta strett. sopra il grafico della funzione,
tranne ovviamente agli estremi

Esempio 3



$|x|$ è una funzione CONVESSA
su tutto $\mathbb{R}$,
Non è strett. convessa.

N.B. il fatto che una funzione f
sia convessa non garantisce
l'esistenza di f' , f'' , ...

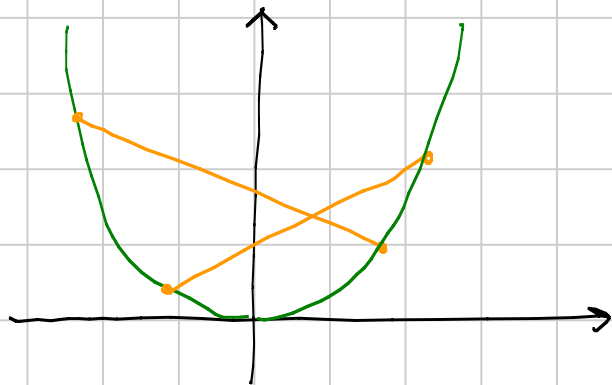
Rapporto tra convessità e derivata II

Supponiamo che $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ abbia la derivata seconda.
Allora

$$f \text{ convessa in } (a,b) \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b).$$

$$f \text{ strett. conv. in } (a,b) \stackrel{\text{red arrow}}{\Leftrightarrow} f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$$

Esempio $f(x) = x^4$. Strettamente convessa su tutto $\mathbb{R}$



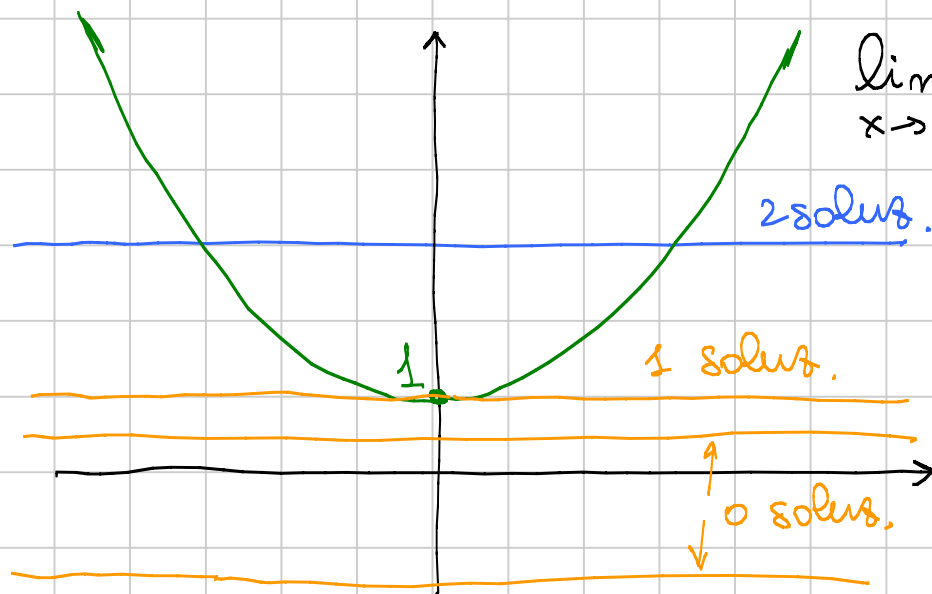
$$f'(x) = 4x^3, \quad f''(x) = 12x^2 \geq 0 \text{ sempre}$$

ma si annulla in $x=0$

Esempio $f(x) = e^x - x$ è convessa,

$$f'(x) = e^x - 1; \quad f''(x) = e^x > 0 \Rightarrow \text{strett. conv. su tutto } \mathbb{R}.$$

Quante solus. ha l'eq. $f(x) = 2006$?



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$\Rightarrow$ almeno 2 soluzioni, una > 0 e una < 0 .

$$f'(x) = e^x - 1 \begin{cases} > 0 \text{ per } x > 0 \\ = 0 \text{ per } x = 0 \\ < 0 \text{ per } x < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x = 0$ è p.to di min. glob.

Più in generale, l'eq. $e^x - x = \lambda$ ha

0 soluz. se $\lambda < 1$

1 soluz. se $\lambda = 1$

2 soluz. se $\lambda > 1$

Esempio $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ convessa per $x > 0$

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} ; f''(x) = 2 + \frac{2}{x^3} > 0 \text{ per } x > 0$$

PUNTI DI FLESSO

Punti in cui f passa da concava a convessa (o viceversa)

