

STUDIO GLOBALE DI FUNZIONI

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

① SIMMETRIE : f è dispari

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x}{x^2 - 1} = -f(x)$$

② Per quali x ha senso (buonocrazia) $x \neq \pm 1$

③ Per quali x è continua : per ogni $x \neq \pm 1$

④ Limiti agli estremi della zona di definizione



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$$

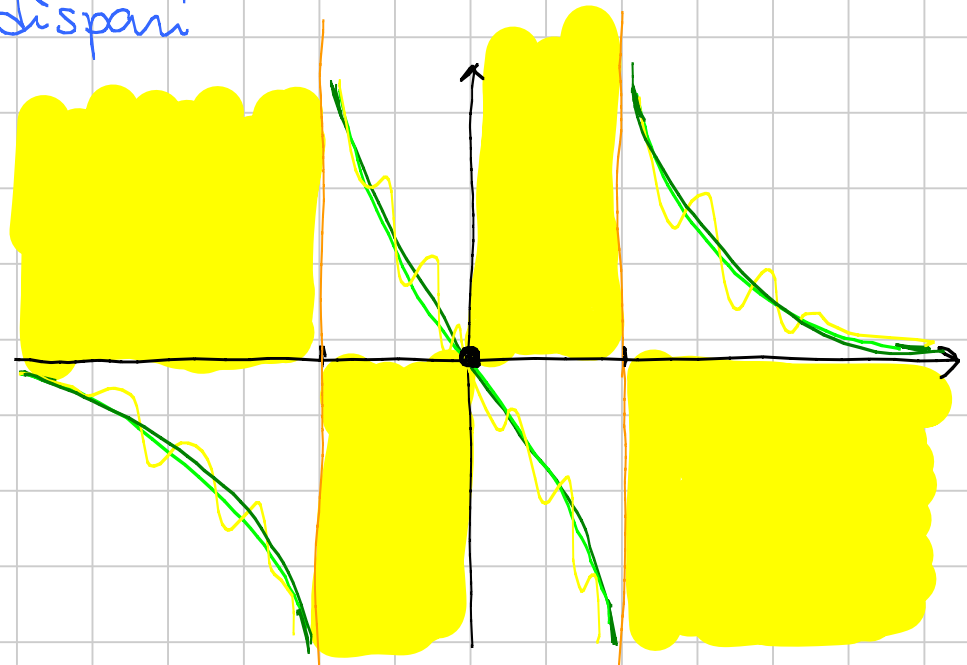
$\longleftrightarrow$
 Quella a
 dx sono
 quelli a sx
 cambiati
 di segno
 perché f è dispari

⑤ zeri e segno Risolvere

l'eq. $f(x) = 0$ e le

diseq. $f(x) > 0$

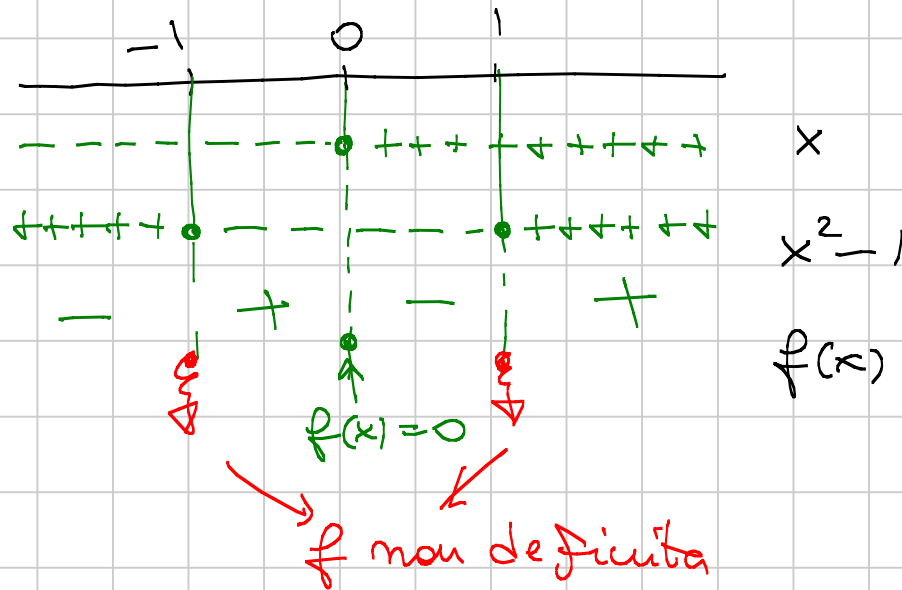
$f(x) < 0$



$$\frac{x}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow x=0 \quad (\text{si annulla solo per } x=0)$$

$$\frac{x}{x^2-1} > 0$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 0) \\ \text{oppure} \\ x > 1$$



⑥ Per quali x è derivabile : per ogni $x \neq \pm 1$

$$f'(x) = \frac{x^2-1 - 2x-x}{(x^2-1)^2} = \frac{-1-x^2}{(x^2-1)^2} = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$$

⑦ Zeri e segno di $f'(x)$: risolvere l'eq. $f'(x) = 0$ e la diseq. $f'(x) > 0$

Nel nostro caso $f'(x) = 0 \quad \forall x$ e $f'(x) < 0 \quad \forall x \neq \pm 1$

$\Rightarrow f(x)$ è strett. decrescente in ciascuno dei tratti dell'insieme di definizione

⑧ Punti di max/min locali e globali: NESSUNO

⑨ Asintoti $\rightarrow$ ORIZZ. $x=0$
 $\rightarrow$ VERT. $x=1$ e $x=-1$
 $\rightarrow$ OBLIQUI nessuno

ASINTOTI ORIZZ.



La retta $y = \alpha$ è asint. orizz. di $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \alpha$$

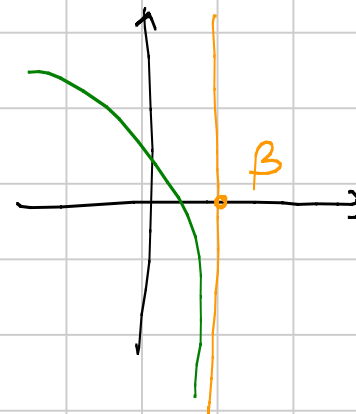
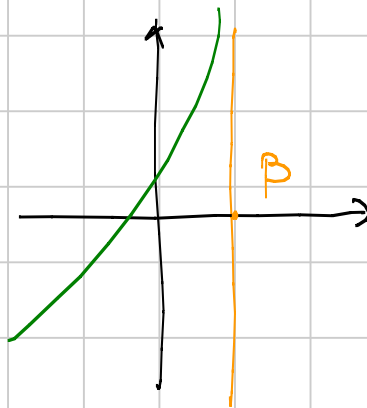
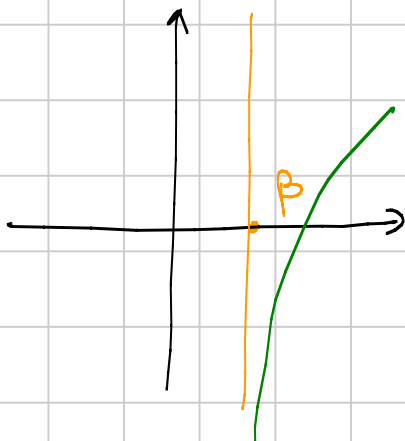
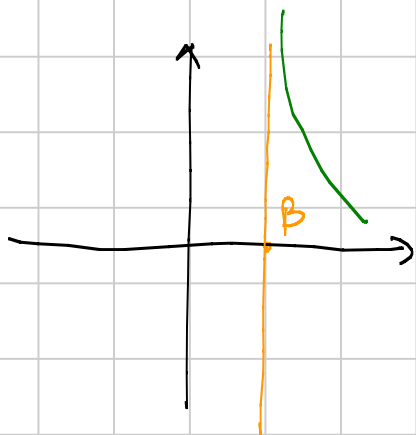
$[-\infty]$



ASINTOTI VERTICALI

La retta $x = \beta$ è asint. vert. di $f(x)$ se si ha almeno uno dei seguenti 4 limiti

$$\lim_{x \rightarrow \beta^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \beta^+} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = -\infty$$



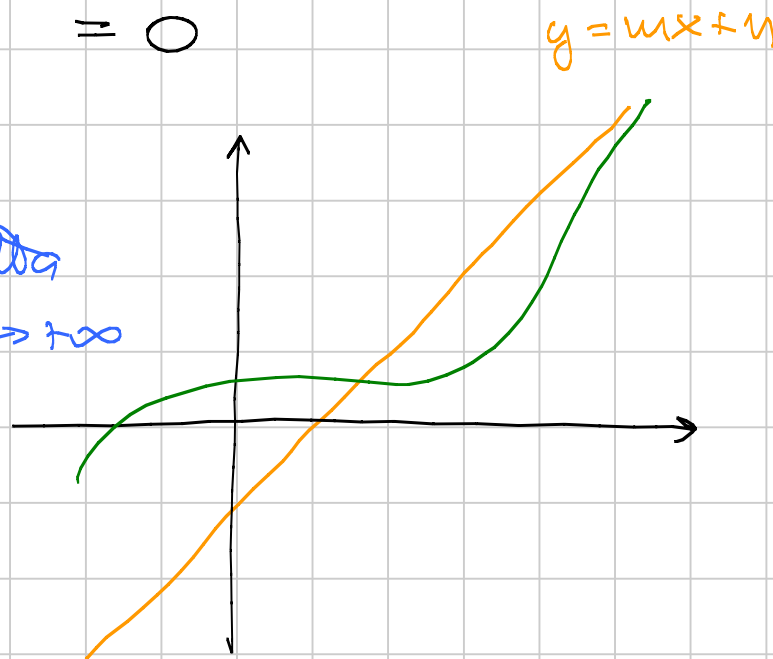
ASINTOTI OBLIQUI

Una retta $y = mx + n$ si dice

asintoto obliquo di $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ se $[x \rightarrow -\infty]$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ [x \rightarrow -\infty]}} [f(x) - mx - n] = 0$$

La differenza tra
la funzione e la retta
tende a zero per $x \rightarrow +\infty$



Criteri.

$y = mx + n$ è asint. obliquo di $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$

$\Leftrightarrow$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} ; m = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx]$$

se questo è del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, con l'Hôpital mi

riduco a calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ [occhio: potrebbe esistere il primo, ma non il 2°]

Dim criteri: Supponiamo che $y = mx + n$ sia asintoto, cioè che $f(x) - mx - n \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$

Allora
$$\frac{f(x)}{x} = \boxed{\frac{f(x) - mx - n}{x}} + \boxed{\frac{mx + n}{x}} \rightarrow m$$

 $\hookrightarrow \frac{0}{\infty} = 0$ $\hookrightarrow m$

Analogamente

$$f(x) - mx = \boxed{f(x) - mx - n} + n \rightarrow m$$

↓
0

Viceversa: supponiamo che $\frac{f(x)}{x} \rightarrow m$; $f(x) - mx \rightarrow m$

Cosa posso dire del $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx - n]$?

$$f(x) - mx - n = \boxed{f(x) - mx} - n \rightarrow 0$$

↓ ↓
m -m

Esempio 1

$$f(x) = \frac{x^2 + 7}{2x + 1}$$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 7}{2x^2 + x} = \frac{1}{2}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 + 7}{2x + 1} - \frac{1}{2}x \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{2x^2} + 14 - \cancel{2x^2} - x}{2(2x + 1)} = -\frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$ La retta $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$
e anche per $x \rightarrow -\infty$

Esempio 2

$$f(x) = \log x + x$$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x + x}{x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\log x + \cancel{x} - \cancel{x}] = +\infty$$

$\Rightarrow$ NO ASINTOTO OBLIQUO