

MAT I TLC

ORA 44

Monotonia 1



Ipotesi: segno
di f' in un
punto

$f'(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$ un po' a dx di x_0
 $f(x) < f(x_0)$ un po' a sx di x_0

$f'(x_0) < 0 \Rightarrow \dots$

Monotonia 2



Ipotesi: segno
di f' in un
intervallo

Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ continua e derivabile.

① $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ strett. cresc. in (a, b)

② $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ deb. cresc. in (a, b)

③ f deb. cresc. in $(a, b) \Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$

④ f strett. cresc. in $(a, b) \Rightarrow f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$

NO!
È FALSA

Esempio $(a,b) = (-1,1)$, $f(x) = x^3$

$f(x)$ è strett. crescente

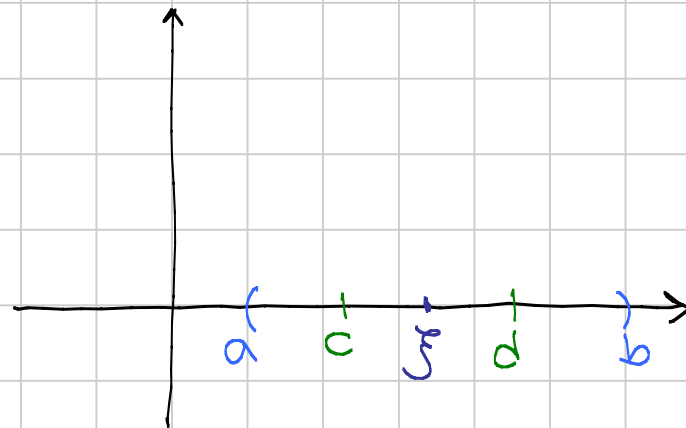
$f'(x) = 3x^2$ si annulla per $x=0$,
quindi $f'(x)$ non è strett. positiva



Dim. di ① e ②

Considero $a < c < d < b$

$$f(d) - f(c) = \underbrace{(d-c)}_{>0} \underbrace{f'(\xi)}_{\begin{matrix} >0 & (\text{caso ①}) \\ \geq 0 & (\text{caso ②}) \end{matrix}}$$



Nel caso ① ottengo $f(d) - f(c) > 0$, cioè $f(d) > f(c)$

$\Rightarrow f$ strett. cresc.

Nel caso ② ottengo $f(d) - f(c) \geq 0$, cioè $f(d) \geq f(c)$
 $\Rightarrow f$ deb. cresc.

Dim. di ③ Hp. f deb. crescente. Tesi $f'(x) \geq 0$ ovunque
in (a,b)

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$\rightarrow$ per $h > 0$ abbiamo
denom. > 0 e num. ≥ 0
perché f è deb. cresc.

In ogni caso la frazione è ≥ 0
ed il limite di roba ≥ 0 è
ancora ≥ 0

$\rightarrow$ per $h < 0$ abbiamo
denom. < 0 e num. ≤ 0
perché f è deb. cresc.

Se provassi a dim. ④ in questo modo appena usato, avrei che la frazione è sempre > 0 , ma il limite di roba > 0 può anche venire $= 0$ (le DISUGUAGLIANZE STRETTE NON passano al limite)

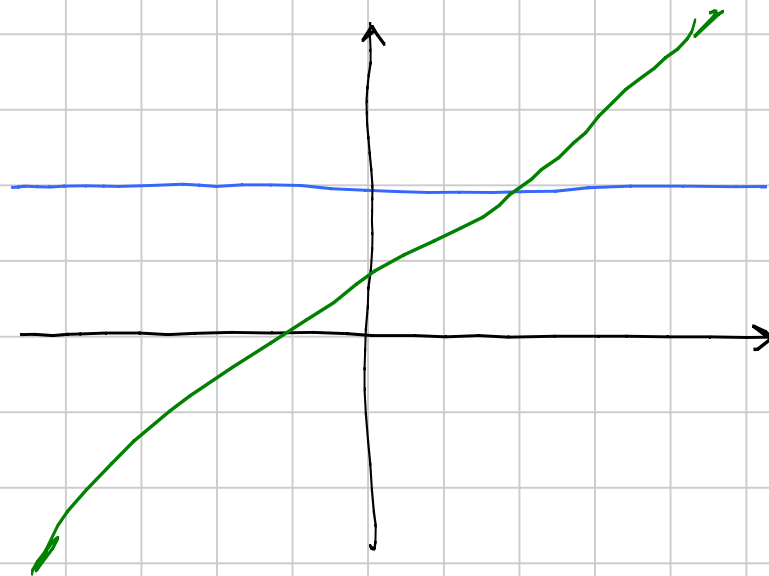
Esempio 1 Dimostrare che l'eq. $x + e^x = 2006$ ha esatta-
mente una soluzione reale $f(x)$

Dim. intuitivo che ha almeno 1 soluz.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$\Rightarrow$ basta per concludere che $f(x)$
è SURGETTIVA



Per l'unicità calcoliamo $f'(x) = 1 + e^x > 0$.

Per monotonia 2, $f(x)$ è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$,
dunque iniettiva, quindi al max 1 soluz.

In realtà abbiamo dimostrato che $f(x)$ vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è
INIETTIVA e SURGETTIVA, dunque

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ l'eq. $f(x) = \lambda$ ha un'unica sol. reale

Esempio 2

$$\boxed{3x + \cos x} = 2006$$

$f(x)$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è surgettiva: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

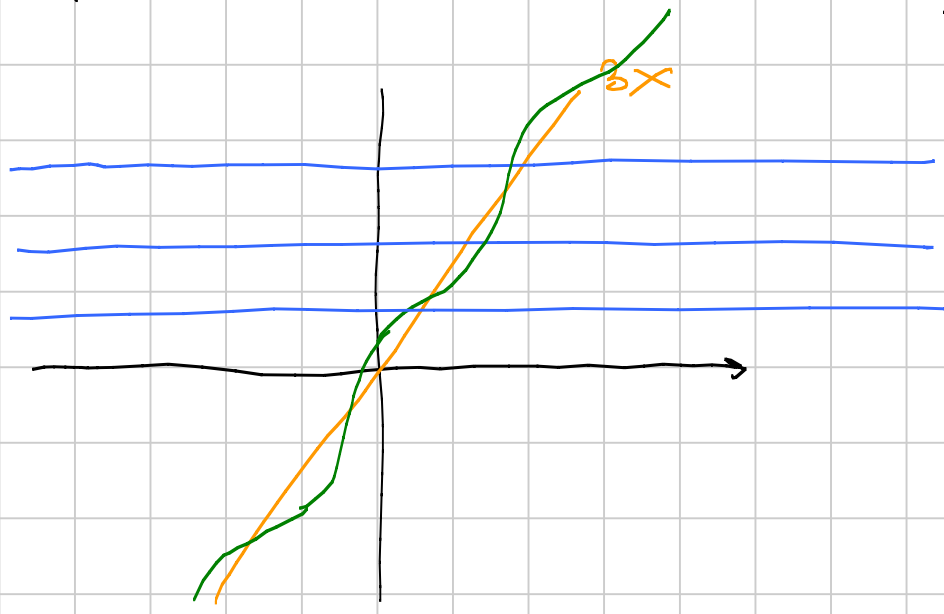
f continua + teo. esistenza degli zeri

Per l'injectività calcoliamo $f'(x)$

$$f'(x) = 3 - \sin x \geq 2 > 0$$

$\Rightarrow$ per monotonia 2, $f(x)$ è strett. cresc. in $\mathbb{R}$, dunque injectiva.

Quindi per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, l'eq. $3x + \cos x = \lambda$ ha esattamente una soluz. reale,



Esempio 3 $f(x) = x + \sin x$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

f è surgettiva per il solito motivo (limiti per $x \rightarrow \pm\infty$)

$$f'(x) = 1 + \cos x \geq 0 \quad (\text{ma può annullarsi})$$

Monotonia ② $\Rightarrow f$ è DEBOLMENTE crescente, ma questo non basta per l'iniettività.

MONOTONIA ③

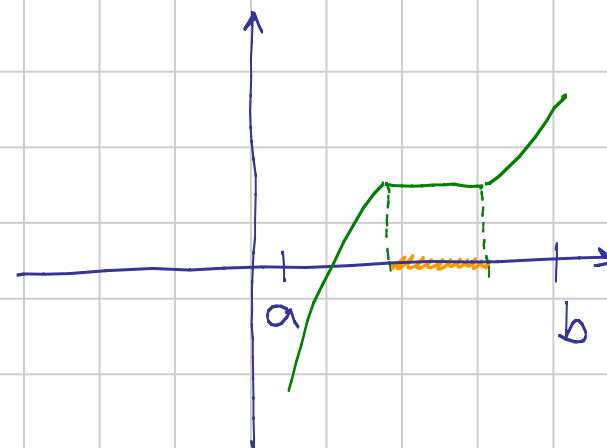
Sia $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ continua e derivabile.

Supponiamo che $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$ e che non esista nessun intervallo contenuto in (a,b) in cui $f'(x)$ vale sempre.

Allora $f(x)$ è STRETT. CRESCENTE

$f'(x)$ si annulla
SPORADICAMENTE

Dim. Per Monotonia ② già sappiamo che $f(x)$ è DEB. cresc.
 Supponiamo per assurdo che f non sia strett. cresc.
 Ma allora f avrebbe dei tratti piatti
 Ma allora ci sarebbe un intero
 intervallo in cui $f'(x)$ si annulla,
 cosa che abbiamo escluso per
 ipotesi



Tornando all'esempio 3 abbiamo che

$$f'(x) = 1 + \cos x \geq 0 \text{ sempre e } f'(x) = 0 \text{ sporadicamente}$$

(solo per $x = \pi + 2k\pi$)

Per monotonia 3 segue che f è

STRETT. CRESCENTE, dunque INIETTIVA

