

MAT I TLC

Titolo nota

ORA 43

08/11/2006

Teoremi sulle funzioni derivabili



W : WEIERSTRASS

R : ROLLE

C : CAUCHY

L : LAGRANGE

H : DE L'HÔPITAL

T : TAYLOR

M : monotonia

W: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora max e min di f in $[a, b]$ esistono

TEO. DI ROLLE Sia data $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Ipotesi:

(i) f continua in $[a, b]$

(ii) f derivabile in (a, b) [se è derivabile in $[a, b]$ ancora meglio]

(iii) $f(a) = f(b)$

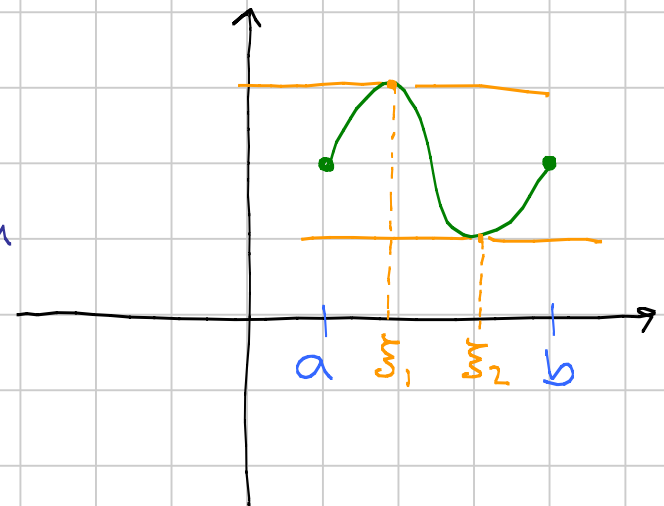
Tesi: $\exists \xi \in (a, b)$ tale che $f'(\xi) = 0$.

Oss. ξ non è obbligato ad essere unico

Dim.: per Weierstrass $f(x)$ ha max e min in $[a, b]$.

Sia x_0 un p.to di max o di min.

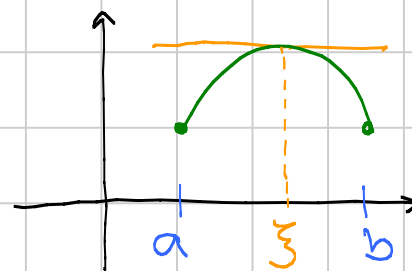
Abbiamo visto prec. che x_0 può essere



- stazionario interno : se è così abbiamo trovato un punto $x_0 \in (a,b)$ t.c. $f'(x_0) = 0$
- singolare interno : per $\mathcal{Q}' H_p$ (ii) questi non ci sono
- sul bordo e sarebbe un guais.

Se almeno uno tra i pti di max e di min è interno, allora Ok

Se invece i pti di max e min sono tutti sul bordo vuol dire che la funzione è costante, ma in questo caso $f'(x) = 0$ in tutti i punti $x \in (a,b)$ (e in realtà tutto $\mathcal{Q}'$ intervallo è fatto da punti di max e di min),



TEO. DI CAUCHY Siano $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Ipotesi: (i) f e g continue in $[a, b]$

(ii) f e g derivabili in (a, b)

Tesi: esiste $\xi \in (a, b)$ t.c.

$$[f(b) - f(a)] g'(\xi) = [g(b) - g(a)] f'(\xi)$$

Se inoltre

(iii) $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a, b)$

allora $g(b) \neq g(a)$ e dividendo
otengo

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Dim. Considero la seguente funzione

$$\varphi(x) = \underbrace{[f(b) - f(a)]}_{\text{numero}} g(x) - \underbrace{[g(b) - g(a)]}_{\text{numero}} f(x)$$

Proprietà di $\varphi(x)$: (i) φ è continua in $[a, b]$

(ii) φ è derivabile in (a, b)

(iii) $\varphi(a) = \varphi(b) \leftarrow \text{VERIFICA DA FARE}$

$$[f(b) - f(a)] g(a) - [g(b) - g(a)] f(a) \stackrel{?}{=} [f(b) - f(a)] g(b) - [g(b) - g(a)] f(b)$$

φ verifica le Hp di Rolle, quindi $\exists \xi \in (a, b)$ t.c. $\varphi'(\xi) = 0$

$$\varphi'(\xi) = [f(b) - f(a)] g'(\xi) - [g(b) - g(a)] f'(\xi) = 0 \quad \text{e questa è la prima tesi}$$

Se in + supponiamo che $g'(x) \neq 0$ in (a,b) intanto possiamo dividere per $g'(\xi)$.

Per concludere mi serve solo dir. che $g(b) \neq g(a)$

Se in fatti fosse $g(a) = g(b)$ potrei applicare Rolle a $g(x)$ e ottenere che $g'(x)$ si annulla da qualche parte, ma per Hyp questo non accade.

— o — o —

TEO. LAGRANGE Sia $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Ipotesi : (i) f continua in $[a,b]$
(ii) f derivabile in (a,b)

Tesi : $\exists \xi \in (a,b)$ t.c.

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

Dim. riscrivo la tesi nella forma $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(\xi)}{1}$

Questo ricorda il teo. di Cauchy con $g(x) = x$. Infatti

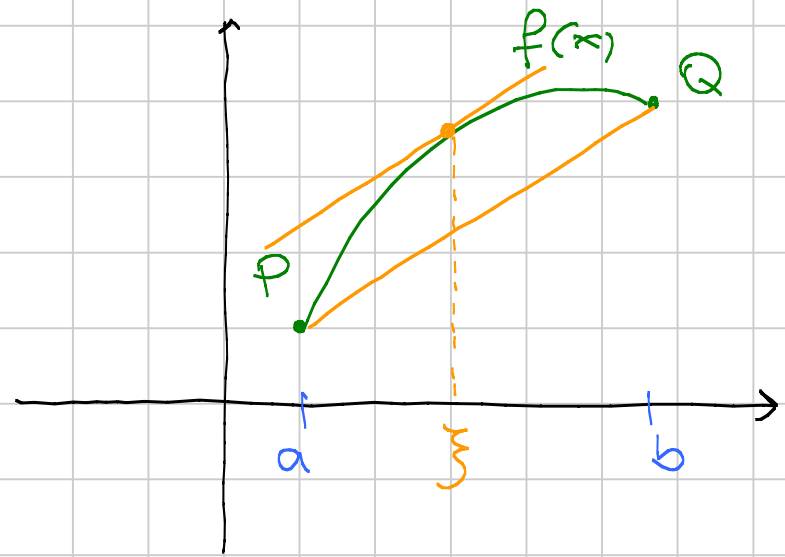
$$g(b) - g(a) = b - a, \quad \boxed{g'(x) = 1} \xRightarrow{g' \neq 0 \text{ sempre}} g'(\xi) = 1$$

Quindi Lagrange è una conseguenza di Cauchy.

Interpretazione geometrica

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \text{coeff. ang. retta PQ}$$

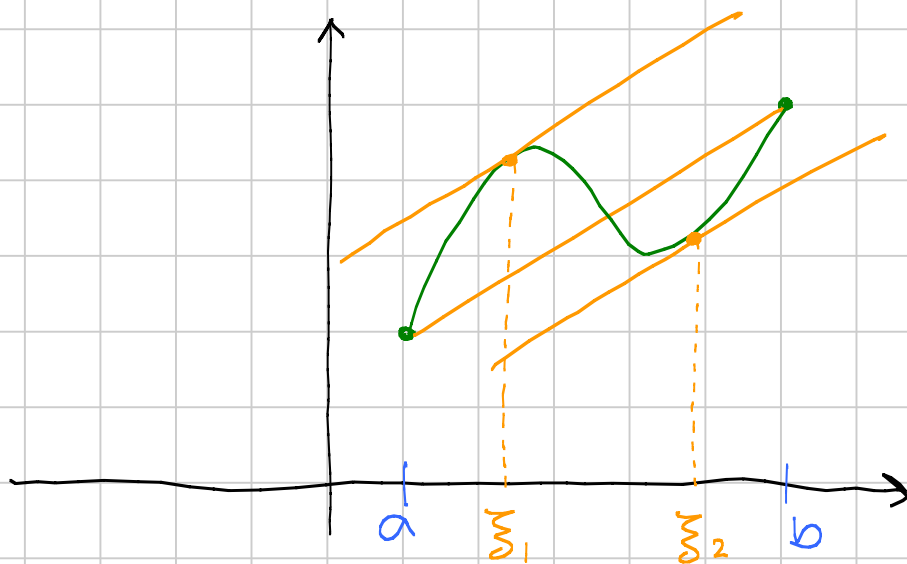
$f'(\xi) = \text{coeff. ang. retta tg nel p.to}$
del grafico corr. a ξ



Lagrange geom.: c'è almeno un p.to $\xi \in (a,b)$ t.c., la tangente al grafico in $(\xi, f(\xi))$ è parallela alla retta PQ.

Dal punto di vista geom. Lagrange generalizza Rolle

Oss. Caso in cui ξ non è unico:



Dim. di un caso particolare di de L'Hôpital a partire da Cauchy

Caso particolare : $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ della forma $\frac{0}{0}$
 $\uparrow$
reale

Barando un po', posso far finta che sia $f(x_0) = g(x_0) = 0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$

$\uparrow$
Ho tolto
0 sopra
e sotto

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi_x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$



Ovviamente per x diversi
trovo ξ diversi

Quando $x \rightarrow x_0^+$,
 $\xi_x \rightarrow x_0^+$ per i
carabinieri