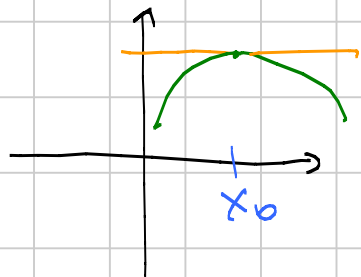


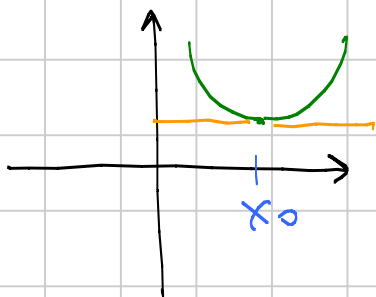
MAT 1 TLC

Studio LOCALE DI FUNZIONI

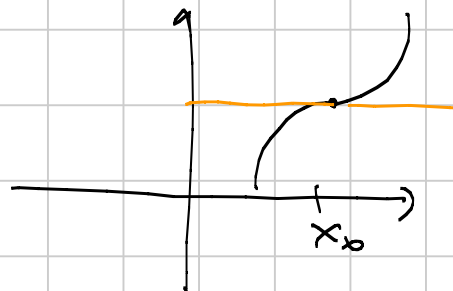
Cosa accade vicino ad un pto stazionario?
Supponiamo $f'(x_0) = 0$.



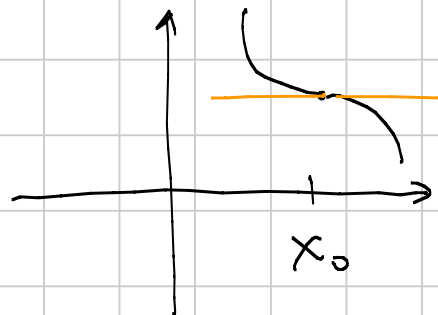
x_0 p.to di
max loc.



x_0 p.to di
min loc.

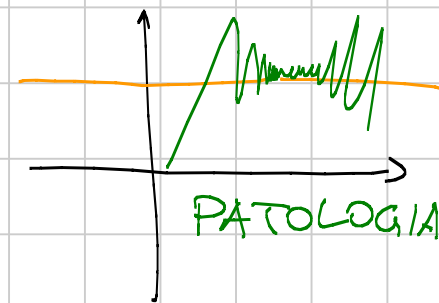


x_0 p.to di flesso
a tg. orizzontale
crescente



x_0 p.to di
flesso a tg.
orizz. decresc.

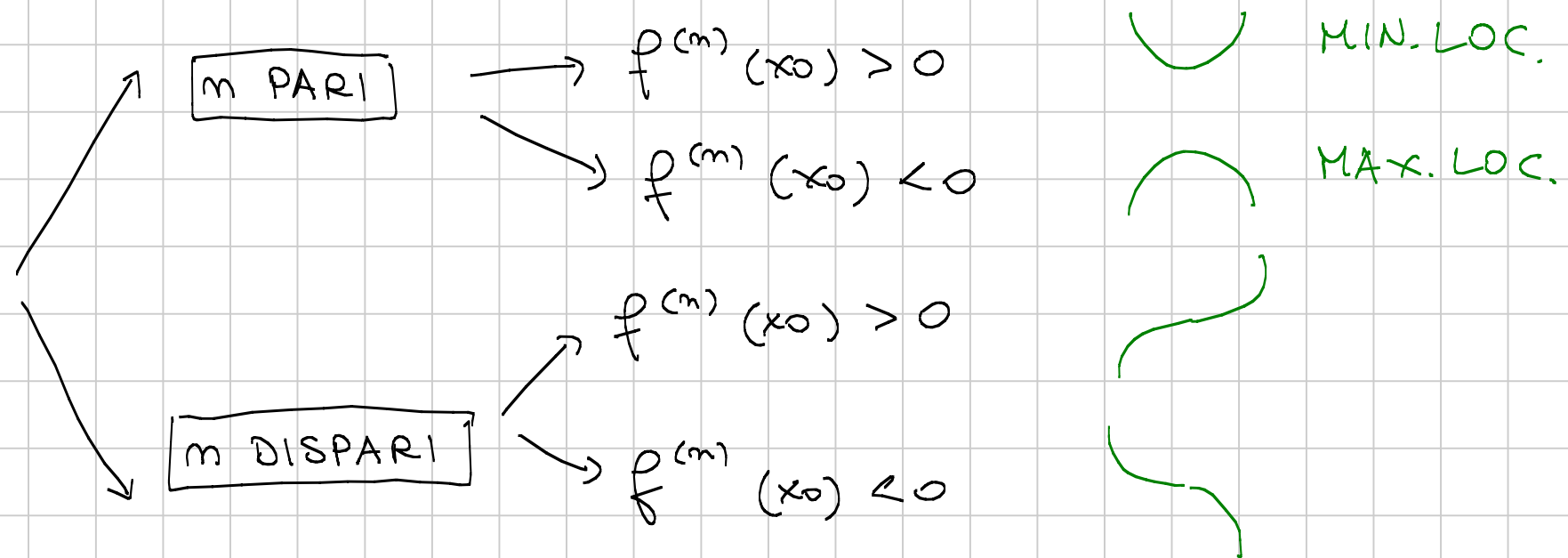
ORA 42



CRITERIO DELLE DERIVATE SUCCESSIVE

Supponiamo che $f'(x_0) = 0$. Calcolo le derivate succ. in x_0 fino a quando ne trovo una $\neq 0$.

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(m-1)}(x_0) = 0$$
$$f^{(m)}(x_0) \neq 0$$



Dimostrazione di qualche caso particolare.

$$x_0 = 0, \quad n = 6, \quad f^{(n)}(0) = \alpha > 0$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(6)}(0)}{6!} x^6 + o(x^6)$$

$$= f(0) + \frac{\alpha}{6!} x^6 + o(x^6)$$

↑ i termini in mezzo non ci sono perché
 $f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(5)}(0) = 0$

Di conseguenza

$$f(x) - f(0) = \frac{\alpha}{6!} x^6 + o(x^6)$$

Divido per x^6 :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x^6} = \frac{\alpha}{6!} + \boxed{\frac{o(x^6)}{x^6}}$$

→ 0 defn.
di $o(x^6)$

Faccio lim per $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x^6} = \frac{\alpha}{6!} > 0$$

Di conseguenza la frazione è > 0 per ogni $x \in (-\delta, \delta)$
con δ suff. piccolo $x \neq 0$

Il den. è sempre > 0 , quindi anche il num. sarà > 0 per $x \in (-\delta, \delta)$
 $x \neq 0$

Quindi $f(x) - f(0) > 0$ per $x \in (-\delta, \delta), x \neq 0$

cioè $f(x) > f(0) \quad \forall x \in (-\delta, \delta), x \neq 0$.

Quindi "vicino a 0" f vale di + che in 0 $\Rightarrow$ min. loc.

Stesso discorso per tutte le potenze pari (Den sempre > 0).

Vediamo ora il caso $x_0 = 0$, $n = 7$, $f^{(7)}(0) = \alpha > 0$

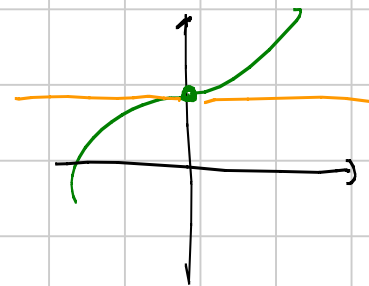
$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x^7} = \frac{\alpha}{7!} > 0$$

Quindi la frazione è $> 0 \quad \forall x \in (-\delta, \delta)$, $x \neq 0$

Per $x \in (0, \delta)$ Den $> 0 \Rightarrow$ Num $> 0 \Rightarrow f(x) > f(0)$

Per $x \in (-\delta, 0)$ Den $< 0 \Rightarrow$ Num $< 0 \Rightarrow f(x) < f(0)$

$f(x)$ vale di + un po' a destra di $x=0$
vale di - un po' a sinistra di $x=0$



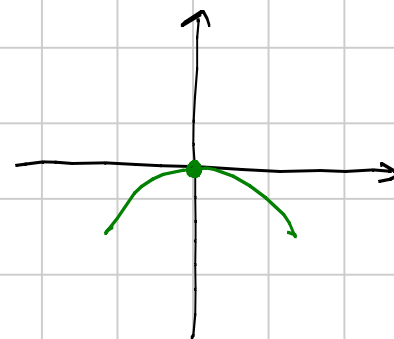
Altro modo di dire la stessa cosa: una funzione si comporta vicino ad $x=0$ come il primo termine non nullo (e non costante) del suo sviluppo di Taylor.

Esempio 1 $f(x) = x^4 - \sin x^2$ $f(0) = 0$

$$f(x) = \boxed{-x^2} + o(x^2)$$

primo termine
non nullo e non
costante

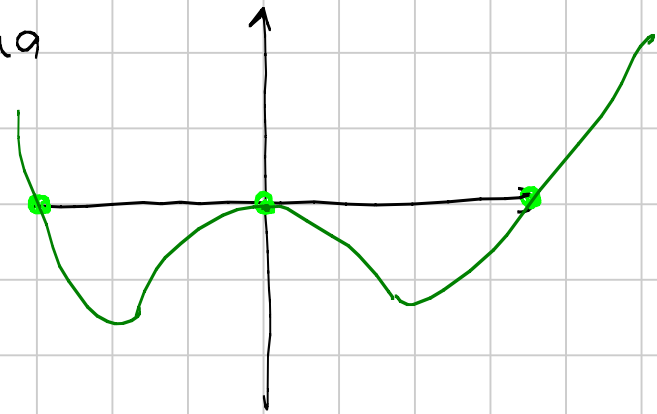
$f(x)$ per x
vicini a zero si
comporta come $-x^2$



Esempio 2 Dim. che l'eq. $\boxed{x^4 - \sin x^2} = 0$ ha almeno
 $f(x)$
3 soluzioni reali.
Una soluzione è $x=0$

Studio loc. $\Rightarrow f(x) < 0$ un po' prima
e un po' dopo $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$



Questo fa guadagnare una soluz. > 0
e una soluz. < 0
— 0 —

Esempio 3 $\sin^2 x - \sin x^2$

$x=0$ non può essere p.to
di flesso (f è PARI)

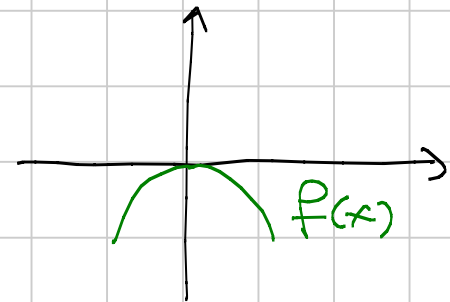
Cerco 1° termine non nullo in Taylor

DOPPIO PRODOTTO

$$f(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 - x^2 + o(x^4) = \cancel{x^2} - \frac{x^4}{3} - \cancel{x^2} + o(x^4)$$

$$= -\frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

Quindi vicino a $x=0$ $f(x)$ si comporta come $-\frac{x^4}{3}$,
 dunque $x=0$ è un p.to di max. loc.



TERMINOLOGIA

max locale / relativo
 min

max globale / assoluto
 min

N.B.

assoluto $\Rightarrow$ relativo

$f(x) = x^4$ ha un p.to di min. loc. per $x=0$ VERA
 " " " " " glob. per $x=0$ VERA

Esempio 4

$$\boxed{\log(1+x^{100})} + \boxed{(\sin x^2)^{60}} - \boxed{\arctan x^{110}} = f(x)$$

$x^{100} + \dots$ $x^{120} + \dots$ $x^{110} + \dots$

$$f(x) = x^{100} + o(x^{100}) \Rightarrow \text{min loc. nell'origine}$$

Ripasso $f(x) = \log(1+x^{100}) + \sin x^{120} - \arctan x^{110}$

Delle prime 500 derivate di $f(x)$, quante NON si annullano per $x=0$?

$$f(x) = x^{100} - \frac{x^{200}}{2} + \frac{x^{300}}{3} - \frac{x^{400}}{4} + \frac{x^{500}}{5} +$$
$$+ x^{120} - \frac{x^{360}}{6} - x^{110} + \frac{x^{330}}{3} + o(x^{500})$$

Questo vuol dire che gli unici termini con coeff. $\neq 0$
(fino al 500-esimo) sono quelli scritti.

Quindi sono solo 3.

Esempio Il coeff. di x^{350} sarebbe $\frac{f^{(350)}(0)}{350!}$

Il coeff. $\bar{e} = 0 \Rightarrow f^{(350)}(0) = 0$

Il coeff. di x^{330} sarebbe $\frac{f^{(330)}(0)}{330!} = \frac{1}{3}$

Quindi $f^{(330)}(0) = \frac{330!}{3}$