

MAT1 TLC

Titolo nota

ORA 41

07/11/2016

Teo WEIERSTRASS $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua

Allora

$\max_{\min} \{ f(x) : x \in [a, b] \}$ esistono per FORZA

max / min valore assunto da $f(x)$
quando x varia in $[a, b]$ "sono delle y ".

Poichè max esiste sarà il valore assunto da $f(x)$ in determinati p.ti $\in [a, b]$, detti p.ti di max ("delle x ").

RICERCA DEI PUNTI DI MAX e DI MIN.

Teorema Supponiamo che $x_0 \in (a, b)$ sia p.to di max
e supponiamo che $f'(x_0)$ esista. x_0 è interno
all'intervallo

Allora $f'(x_0) = 0$.

Dim. Se $f'(x_0)$ non fosse 0, allora può essere > 0 oppure < 0 .
Supponiamo che sia > 0 . Ma allora

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0$. Allora per permanenza del
segno

$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0$ per h abbastanza vicini a 0,
cioè per ogni $h \in (-\delta, \delta)$
pur di prendere δ piccolo

Se la frazione è positiva vuol dire che num. e den. hanno lo stesso segno. Quindi

per $h \in (0, \delta)$ si ha $f(x_0+h) - f(x_0) > 0$, cioè

$$f(x_0+h) > f(x_0)$$

Questo dice che "un po' a destra di x_0 " la funzione vale più che in $x_0 \Rightarrow x_0$ non è p.to di max.

Analogamente

per $h \in (-\delta, 0)$ si ha $f(x_0+h) - f(x_0) < 0$ cioè

$$f(x_0+h) > f(x_0)$$

"un po' a sinistra di x_0 "
la funzione vale meno
che in x_0

Supponiamo ora che sia $f'(x_0) < 0$. Allora per $h \in (-\delta, \delta)$ si ha che

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} < 0. \quad \text{Quindi}$$

- "un po' a destra di x_0 " ($h \in (0, \delta)$) si ha $f(x_0+h) - f(x_0) < 0$, quindi $f(x_0+h) < f(x_0)$ "f vale meno"
- "un po' a sinistra di x_0 " ($h \in (-\delta, 0)$) si ha $f(x_0+h) - f(x_0) > 0$ quindi $f(x_0+h) > f(x_0)$ "f vale più", quindi non può essere un p.to di max.

Non potendo essere $f'(x_0) > 0$, né $f'(x_0) < 0$ sarà per forza $f'(x_0) = 0$.

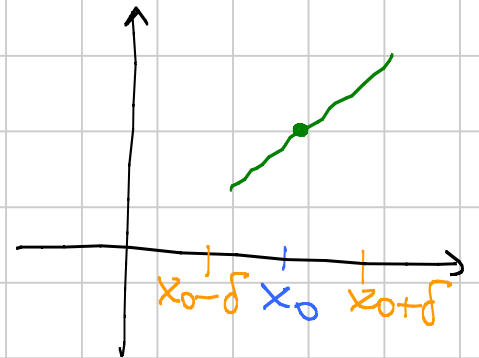
MONOTONIA 1 Se $f'(x_0) > 0$, allora

$$f(x) > f(x_0)$$

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

$$f(x) < f(x_0)$$

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$$



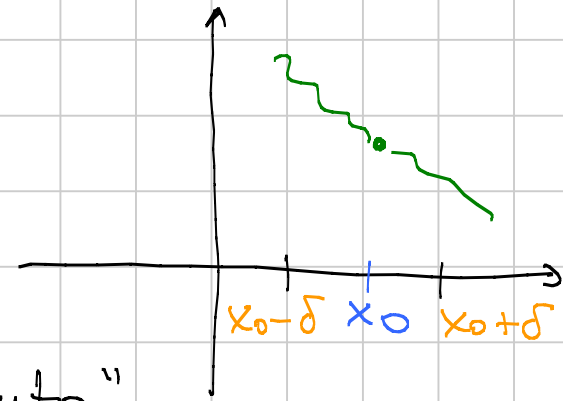
Se $f'(x_0) < 0$, allora

$$f(x) > f(x_0)$$

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$$

$$f(x) < f(x_0)$$

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$$



"Quanto è grande δ dipende dal punto"

CONSEGUENZA

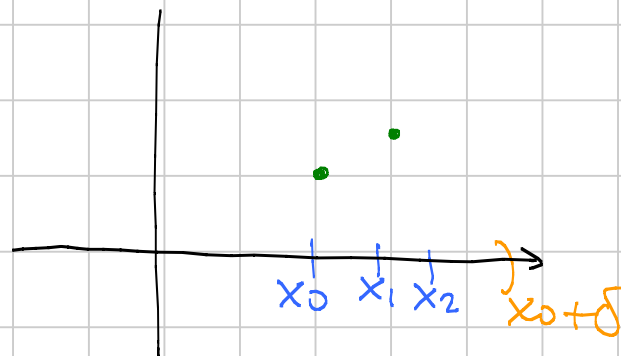
Se $x_0 \in (a, b)$ è un p.to di max / min, allora

$$f'(x_0) \begin{cases} < \\ = 0 \\ > \end{cases} \text{ N.E. }$$

OSSERVAZIONE Monotonuia 1 non dice che

se $f'(x_0) > 0$, allora $f(x)$ è deb. cresc. in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Monotonuia 1 dice che $f(x_1) > f(x_0)$
e dice che $f(x_2) > f(x_0)$



Monotonuia 1 non dice nulla sul
+ grande tra $f(x_1)$ e $f(x_2)$

— o — o —

CONSEGUENZA Dove cercare i p.ti di max min?

In 3 categorie di punti

① Punti $x_0 \in (a, b)$ in cui $f'(x_0) = 0$

STAZIONARI
INTERNI

② Punti $x_0 \in (a, b)$ in cui $f'(x_0)$ N.E.

SINGOLARI
INTERNI

③ Sul bordo (quindi $x=a$ oppure $x=b$)

BORDO

Perché? Sia x_0 p.to di max (IDEM se x_0 p.to di min.)

x_0 $\nearrow$ sul bordo $\rightsquigarrow$ ③

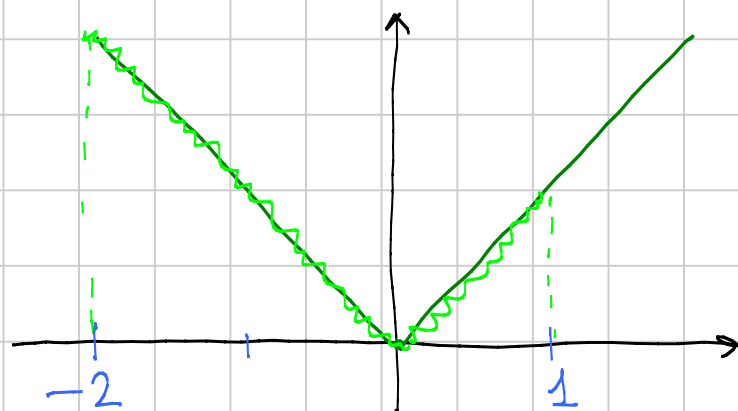
x_0 $\searrow$ $x_0 \in (a, b)$ $\nearrow$ $f'(x_0)$ N.E. $\rightsquigarrow$ ②

$\searrow$ $f'(x_0)$ esiste, ma allora

per conseguenza di
monot. ① si ha $f'(x_0) = 0$ $\rightsquigarrow$ ①

Esempio 1

$$\max_{\min} \{ |x| : x \in [-2, 1] \}$$



Max = 2, p.to di max: $x = -2$

min = 0, p.to di min: $x = 0$

BORDO

SINGOLARE
INTERNO

Non ci sono p.ti stazionari

Esempio 2

$$\max_{\min} \{ x^3 - x : x \in [0, 1] \}$$

Esistono per Weierstrass. Cerco i candidati ad eserepti di max/min

② Sing. interni : $\emptyset$ (la derivata esiste ovunque)

① Stat. interni : $f'(x) = 0$, $3x^2 - 1 = 0$, $x^2 = \frac{1}{3}$

$x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ Solo $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ è interno a $(0,1)$

③ Bordo : $x = 0$ e $x = 1$.

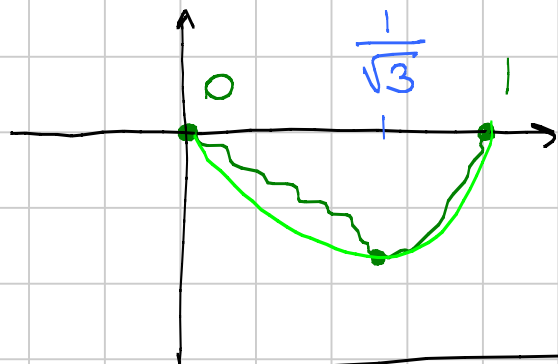
Quindi ho 3 candidati ad essere pti di max / min

$$x = 0 \quad f(0) = 0$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$x = 1 \quad f(1) = 0$$

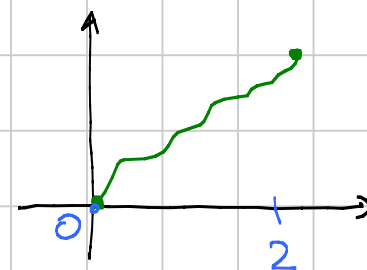
Conclusione: $\max = 0$, p.ti di max: $x=0$ e $x=1$
 $\min = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$, p.to di min: $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$



Esempio 3

$$\max_{\min} \{ x e^x : x \in [0, 2] \}$$

Esistono per W.



② sing. interni: $\emptyset$

③ $x=0$ e $x=2$

① stat. int. $f'(x) = 0$; $e^x + x e^x = (x+1)e^x = 0 \Leftrightarrow x = -1$
 $x = -1$ non è interno $\Rightarrow \emptyset$

$$\boxed{x=0}; f(0) = \boxed{0}$$

p.to min

min

$$\boxed{x=2}; f(2) = \boxed{2e^2}$$

p.to max

Max