

MAT 1 TLC

ORA 40

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Def. Dico che $M \in \mathbb{R}$ è il max di f in A , e scrivo

$$M = \max \{ f(x) : x \in A \} \leftarrow \text{Massima quota raggiunta dalla funzione in } A$$

se

(i) $f(x) \leq M \quad \forall x \in A$

(ii) esiste $x \in A$ b.c. $f(x) = M$

Tutti i punti x in cui $f(x) = M$ si dicono

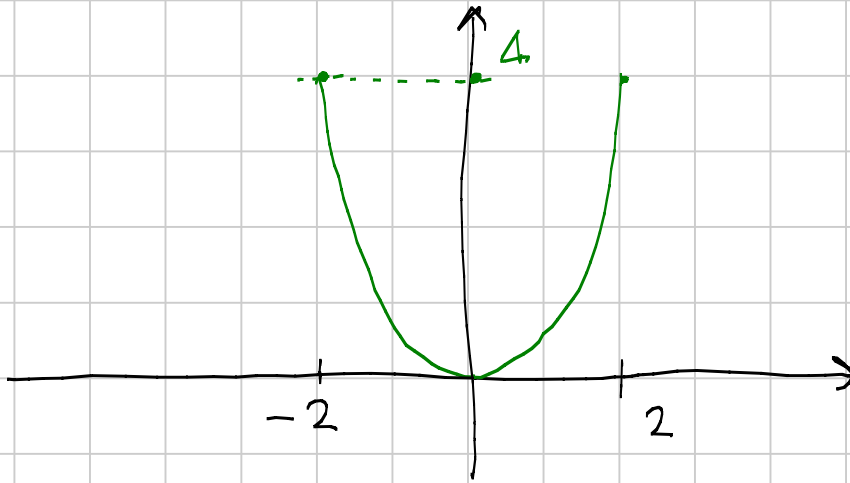
PUNTI DI MASSIMO

IDEM per minimo e p.ti di minimo

Esempio 1

$$\max \{ x^2 : x \in [-2, 2] \} = 4$$

pti di max: $x=2$ e $x=-2$



$$\min \{ x^2 : x \in [-2, 2] \} = 0$$

pto di min: $x=0$

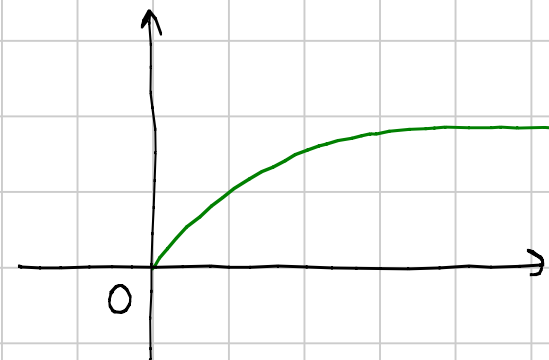
Oss. max e min NON sono obbligati ad esistere

Esempio $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \arctan x$

$$\begin{aligned} \max \{ \arctan x : x \in [0, +\infty) \} & \text{ N.E.} \\ \sup \{ \quad \quad \quad \} & = \pi/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \{ \arctan x : x \in [0, +\infty) \} & = 0 \\ \inf \{ \quad \quad \quad \} & = 0 \end{aligned}$$

p.to di min: $x = 0$
— 0 —

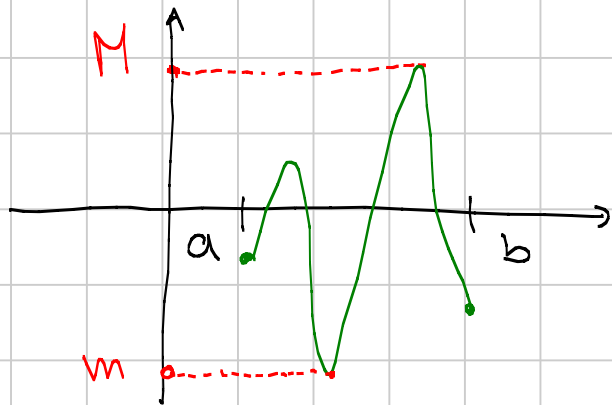


intervallo compresi gli estremi
↑

TEOREMA WEIERSTRASS

Sia $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua

Allora $\max$
 $\min$ $\{ f(x) : x \in [a,b] \}$ esistono
PER FORZA.



NB

Max e min sono per forza unici (quando esistono)

I pti di max e min possono essere + di uno.

— o — o —

Oss 1 È importante che l'intervallo contenga entrambi gli estremi.

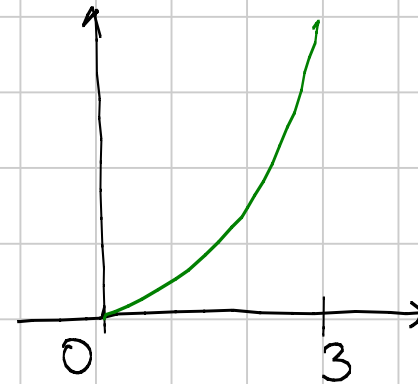
ES.

$$\max \{ x^2 : x \in [0, 3) \} \text{ N.E.}$$

$$\sup \{ \} = 9$$

$$\min \{ \} = 0$$

$$\inf \{ \} = 0$$



p.to di min $x=0$

Oss. 2 È importante che l'intervallo sia limitato

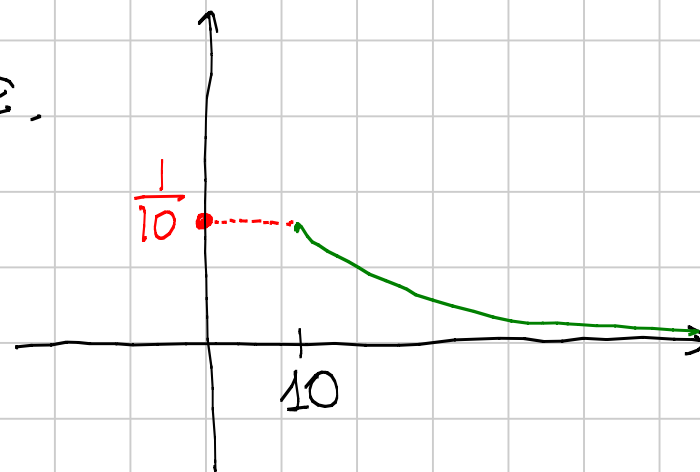
Es. $\min \left\{ \frac{1}{x} : x \geq 10 \right\}$ N.E.

$$\inf \left\{ \right\} = 0$$

$$\max \left\{ \right\} = \frac{1}{10}$$

$$\sup \left\{ \right\} = \frac{1}{10}$$

p.to di max: $x = 10$



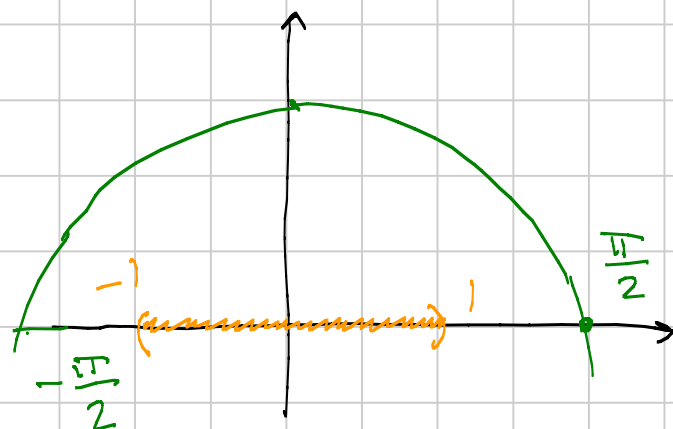
Esempio 1 Domanda: esiste $\max \left\{ \underbrace{e^{\sin x} - x^8}_{f(x)} : x \in [0, 12] \right\}$?

Sì; $f(x)$ continua
intervallo con estremi

$\Rightarrow$ ESISTE

Esempio 2

Esiste $\max \{ \cos x : x \in (-1, 1) \}$? SI!



↑
senza estremi

⇓
Hp W non verificate

⇓
BOH

$\max = 1$, p.to di $\max : x = 0$

Prima estensione

Esiste

$\max \{ e^{\sin x} + \sin^8(3x) + \log(5 + \cos x) : x \in \mathbb{R} \}$

$f(x)$ PERIODICA
CONTINUA

$f(x+2\pi) = f(x)$
 $\forall x \in \mathbb{R}$

Hp W NO

Consideriamo $\max \{ f(x) : x \in [0, 2\pi] \} = M$
 $\uparrow$
esiste per W

Dico che $\max \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \} = M$ (stesso M)

perchè ogni valore che $f(x)$ assume al variare di $x \in \mathbb{R}$ lo
assume già al variare di $x \in [0, 2\pi]$.

Seconda estensione

$$\max_{\min} \left\{ x^{22} - \arctan x^{13} + x^3 \cos x : x \in \mathbb{R} \right\}$$

max N.E. $\sup = +\infty$ (basta fare $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$)

Dico che min ESISTE

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

W ESTESO Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua

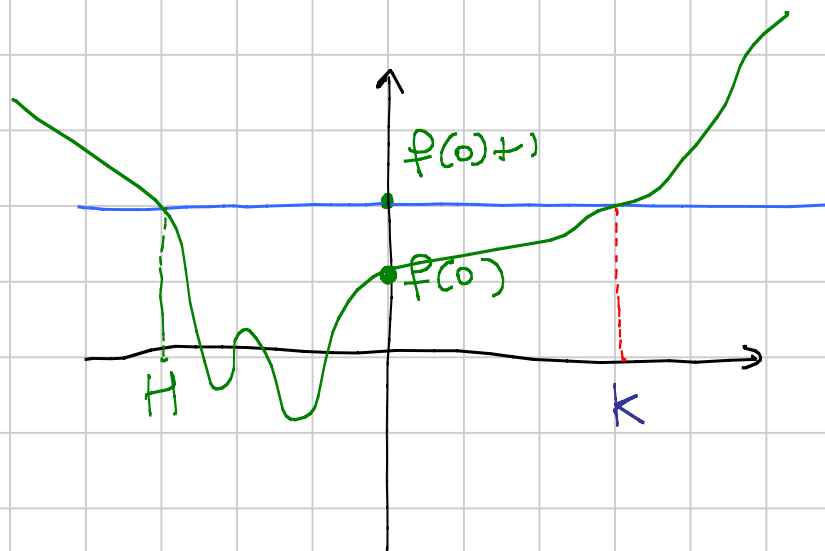
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

Allora $\min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$
esiste PER FORZA.

Dim. W esteso Prendo $f(0)$

$$f(x) \geq f(0) + 1 \quad \text{per ogni } x \geq K$$

$$f(x) \geq f(0) + 1 \quad " \quad " \quad x \leq H$$

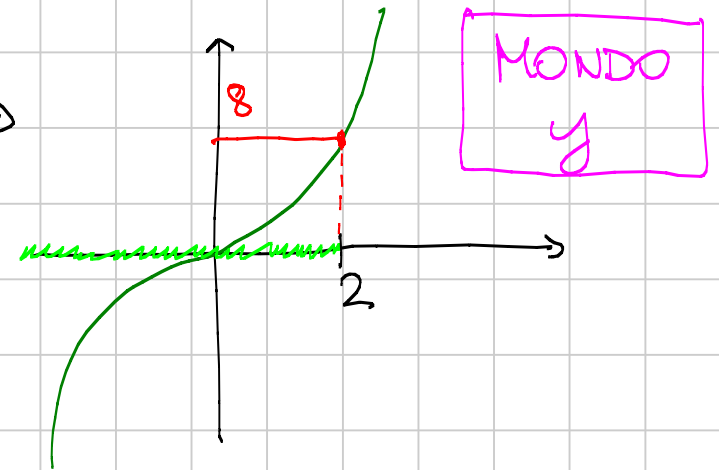


Quindi il minimo viene deciso tra $[H, K]$ e qui vale W .

$$\max \{ x \in \mathbb{R}; x^3 \leq 2 \} = \sqrt[3]{2}$$

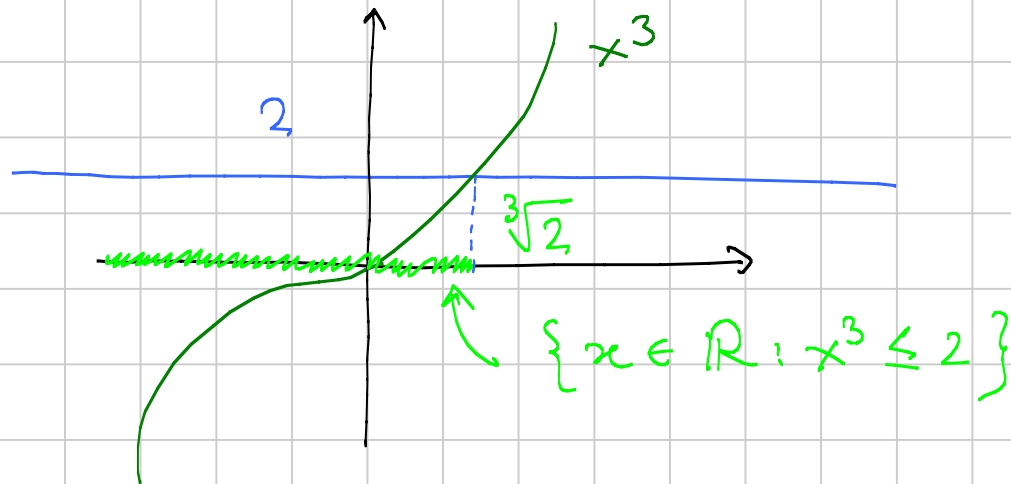
$$\max \{ x^3 : x \leq 2 \} = 8 \rightarrow$$

Trovare il max di $f(x) = x^3$ al variare di $x \leq 2$.



→ Trovare il max degli x il cui cubo è ≤ 2 .

= Risolvi la diseq $x^3 \leq 2$, trovi $x \leq \sqrt[3]{2}$ e prendi il max dell'insieme



MONDO X