

MAT 1 TLC

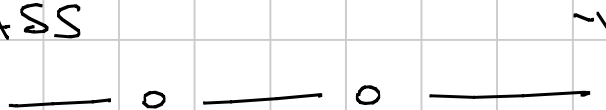
ORA 39

Titolo nota

04/11/2006

Teo. esistenza degli zeri e questioni collegate

Teo. WEIERSTRASS



TEO. ESISTENZA DEGLI ZERI

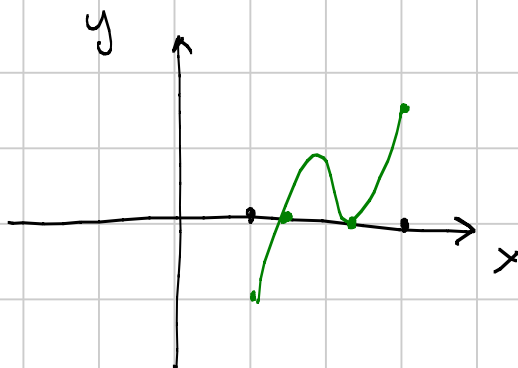
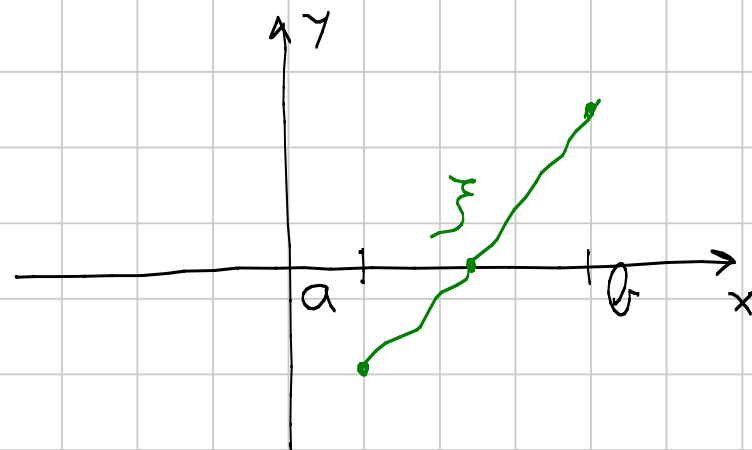
Sia data $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo

* f continua

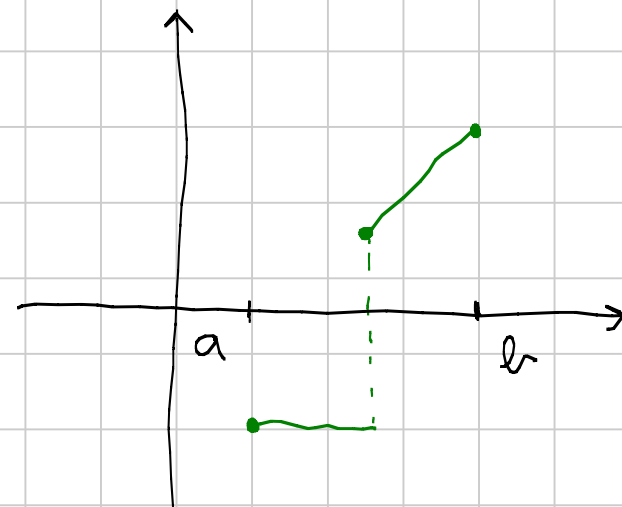
* $f(a) \cdot f(b) < 0$ → cioè $f(a)$ e $f(b)$ hanno segno DIVERSO
valori agli estremi

Allora $\exists \xi \in]a, b[$ tale che $f(\xi) = 0$

Oss. $\exists$ non è detto che sia unico



È fondamentale che f sia continua



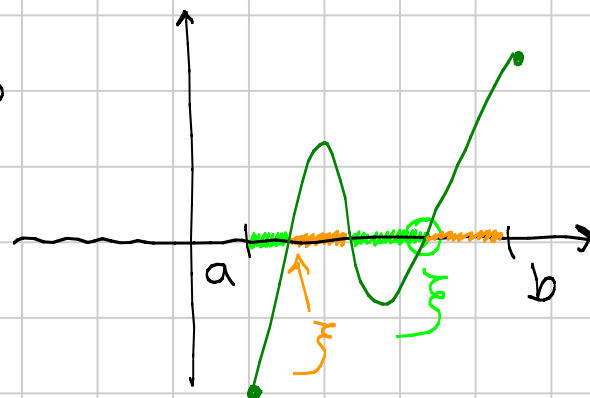
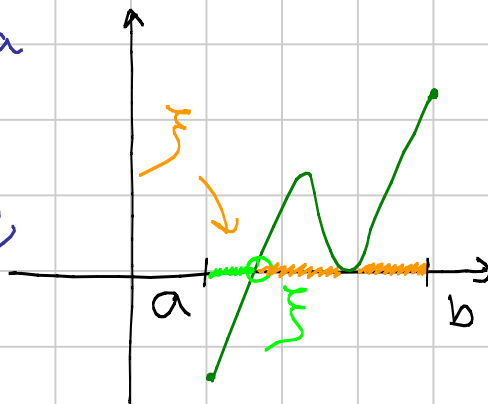
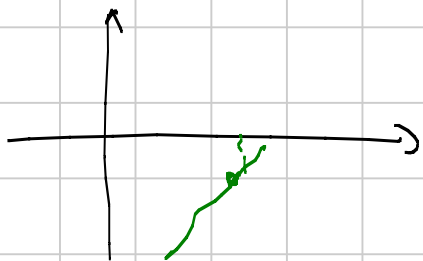
"Dim. (idea)" si usano pesantemente le propr. dei reali
nel senso che si usano inf o sup

Supponiamo $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$

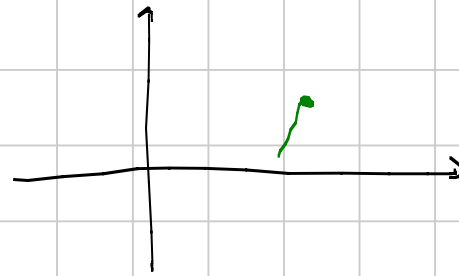
$$\xi = \sup \{ x \in [a, b] : f(x) < 0 \}$$

$f(\xi) < 0$, ma allora
un po' dopo ξ f
sarebbe ancora < 0 ,
dunque ξ non
sarebbe il sup

$f(\xi)$



$f(\xi) > 0$, ma allora già
un po' prima di ξ f sarebbe
stata > 0 , e quindi non
potrebbe essere il sup.



Resta solo la possibilità $f(\xi) = 0$
— o —

Oss. Si può definire ξ usando l'inf

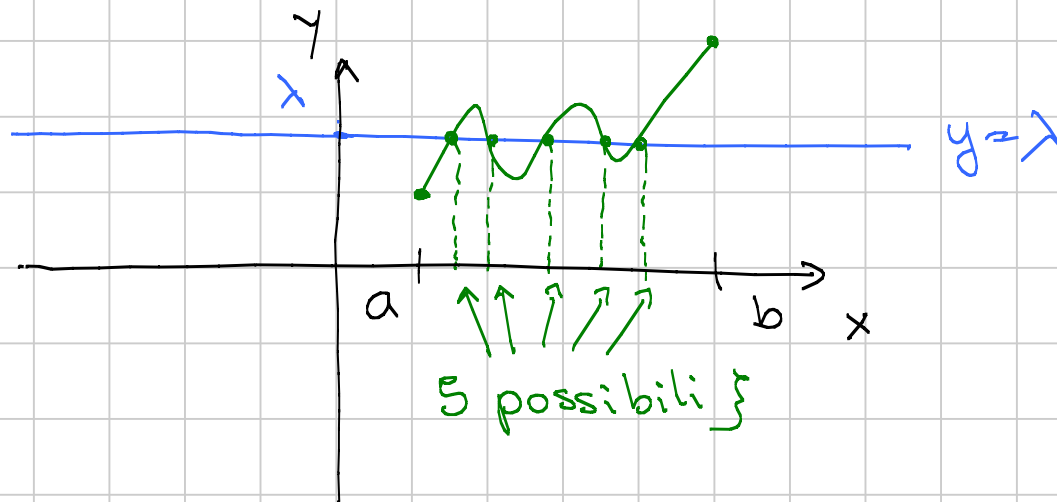
$$\xi = \inf \{ x \in [a, b] : f(x) > 0 \}$$

Può essere diverso dal precedente, ma va bene lo
stesso

Prima generalizzazione . Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $f(a) < \lambda < f(b)$.

Allora $\exists \xi \in]a, b[$ tale che $f(\xi) = \lambda$.



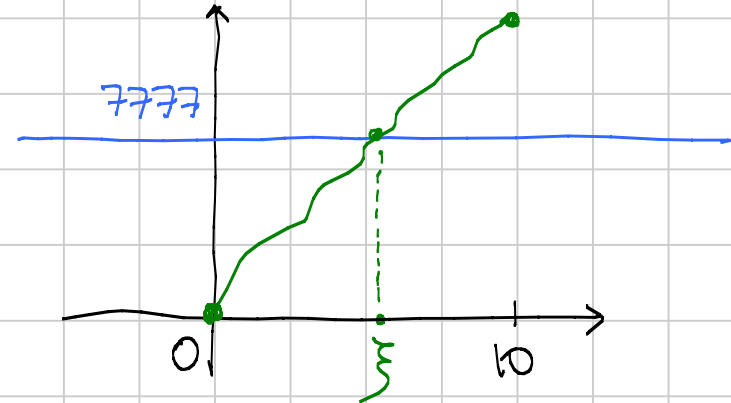
Esercizio 1 Dimostrare che l'eq $x^7 - x = 7777$ ha almeno una soluzione reale,

Prendo $f(x) = x^7 - x$, $f(0) = 0 < 7777$
 $f(10) = 10.000.000 - 10 > 7777$

f continua

$\Rightarrow$ esiste almeno un p.to

$\xi \in (0, 10)$ t.c. $f(\xi) = 7777$



Esercizio 2 Dire se esistono soluzioni dell'eq

$$x^{44} + \sin x^{88} + x^{20} \arctan x^3 + \log(1+x^2) = 2006$$

Dimostriamo che ci sono almeno 2 soluzioni. Chiamo $f(x)$ la funzione a sinistra. $f(x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$.

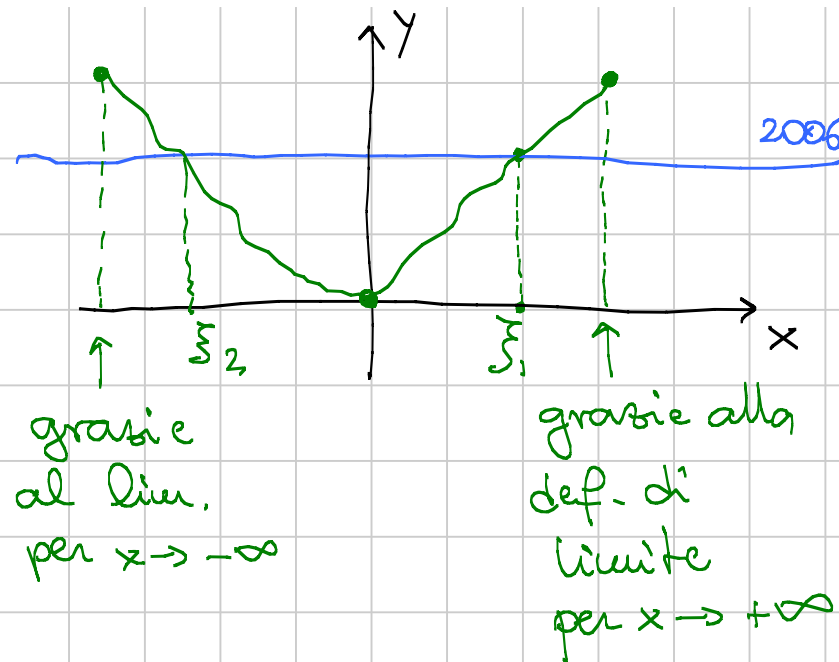
$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow$$

per x abbastanza grandi

$$f(x) > 2006$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$



Esercizio 3 Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

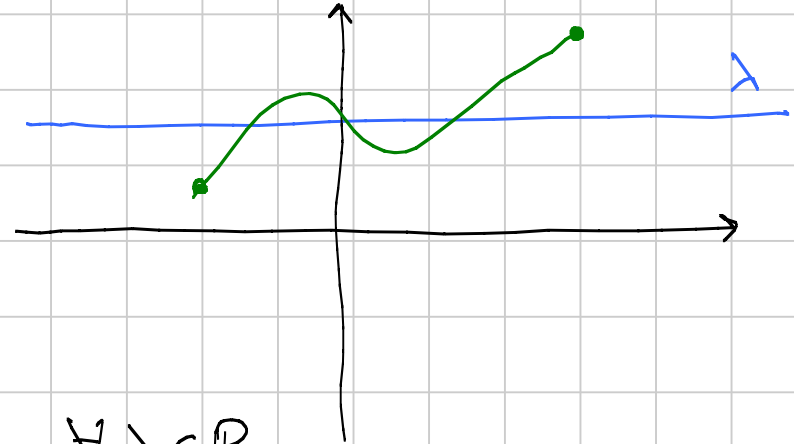
$$f(x) = x^7 - x^5 \sin x + \arctan x^{12}$$

f è surgettiva? [Surgettiva $\Leftrightarrow$ il grafico incontra ogni // asse x in almeno 1 p.to]

E' equivalente a chiedersi se per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ l'eq.
 $f(x) = \lambda$ ha almeno 1 soluz.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$



segue che $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
esiste almeno un p.to
 x_1 in cui $f(x_1) > \lambda$ e
almeno un p.to x_2 in
cui $f(x_2) < \lambda$

f è SURGETTIVA.

Esempio 4 $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \log x - x^{30} + x^4 \arctan e^x$$

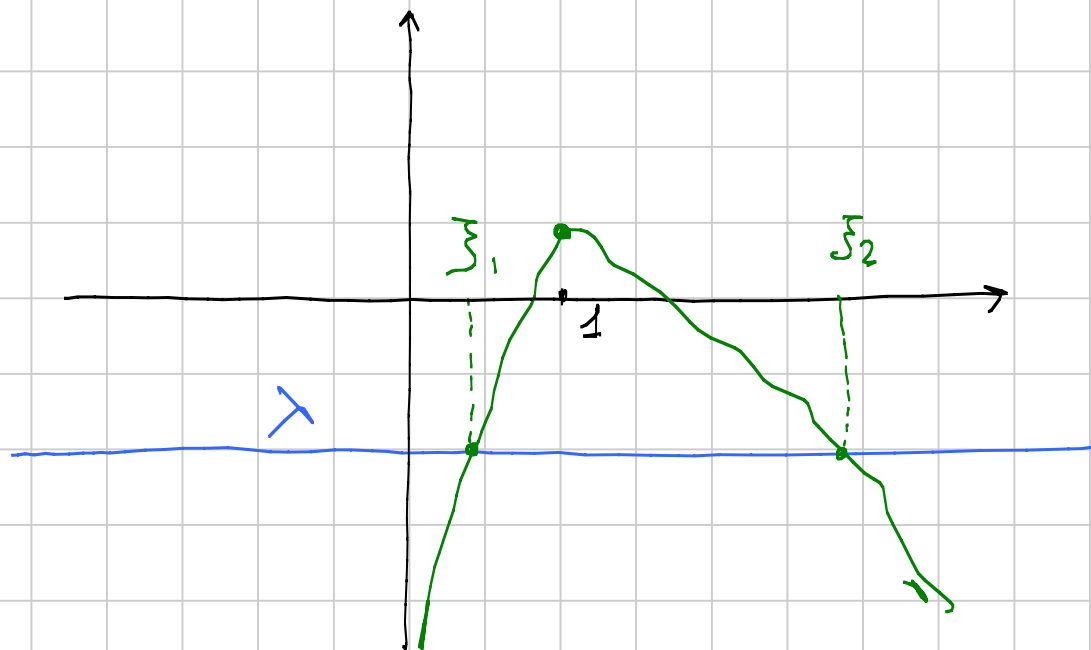
È iniettiva? No!

f continua,

$$f(1) = -1 + \arctan e$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$



Preso un qualunque $\lambda < f(1)$ esistono
2 pti ξ_1 e ξ_2 in cui $f = \lambda$
 $\downarrow$ $\downarrow$
 $\in (0, 1)$ > 1