

MAT 1 TLC

ORA 38

Serie di Taylor. Data una funzione $f(x)$ derivabile infinite volte nel p.to $x=0$ posso costruire la sua serie di Taylor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(n)}(0)}{n!}}_{c_n} x^n$$

è la serie che ha come somme parziali i polinomi di Taylor della funzione $f(x)$

- * Per quali x converge? All'interno del raggio di conv. (+ event. estremità)
- * A cosa converge? → Sarebbe bello che convergesse a $f(x)$

$$f(x) \stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Se mi fermo dopo n termini ho un resto "piccolo". Se invece sommo tutti gli infiniti termini (serie) ottengo esattamente $f(x)$.

Def. La funzione $f(x)$ si dice ANALITICA se vale l'uguaglianza, cioè se $f(x)$ è uguale alla somma della sua Serie di Taylor.

TEOREMA 3

Tutte le funzioni ottenute a partire da quelle elementari mediante op. alg. e/o comp. sono analitiche se non hanno problemi in $x=0$. In particolare vale l'uguaglianza

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Per gli x per cui la
SERIE CONVERGE

Esempio 1 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n!}$ converge (radice, rapporto).
Quanto fa la somma?

Questa serie è il caso particolare $x=7$ della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

↑ Questa è la serie di Taylor di $f(x) = e^x$

Per i valori di x per i quali la serie converge si ha che la somma è **ESATTAMENTE** e^x . Quindi nel nostro caso

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n!} = e^7$$

PERCHÉ IN $x=7$
LA SERIE CONVERGA, cosa
che sappiamo già.

Esempio 2
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$$

Converge per LEIBNITZ

Questa è il caso $x = -1$ della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

Assomiglia a qualche sviluppo noto?

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

Quindi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ è la serie di Taylor di $-\log(1-x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x)$$

per tutti i valori di x
per cui la serie
converge, in particolare
per $x = -1$

$$x \rightarrow -1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log 2$$

$$= \log \frac{1}{2}$$

— 0 — 0 —

Esempio 3 $2 - \frac{2^3}{3} + \frac{2^5}{5} - \frac{2^7}{7} + \frac{2^9}{9} - \dots = \arctan 2$

NOOOOOOO

Caso $x=2$ della serie di potenze

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \arctan x$$

↑ Questa uguaglianza vale
per tutti i valori di x
per cui la serie converge

In $x=2$ la serie non converge.

$$2 - \frac{2^3}{3} + \frac{2^5}{5} - \frac{2^7}{7} = \sum (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{2n+1}$$

a_n

$a_{2n} \rightarrow +\infty$
 $a_{2n+1} \rightarrow -\infty$ $\Rightarrow a_n$ non ha limite $\Rightarrow$ No condiz. nec.

$\Downarrow$
la serie NON converge

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Per quali x
converge?

$$= x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}$$

Se chiamo $y = x^2$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^n}{2n+1}$$

Questa in y è una serie di potenze con $c_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{2n+1}} \rightarrow l = L \Rightarrow R = \frac{1}{L} = 1$$

Quindi la serie in y converge di sicuro per $|y| < 1$,
quindi quella in x converge di sicuro per $|x^2| < 1$

$$x \in (-1, 1) \quad (\Leftrightarrow \begin{matrix} \updownarrow \\ x^2 < 1 \end{matrix})$$

Il raggio di convergenza della serie con l'andata è 1.

Cosa succede in $x=1$? $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ Questa converge per Leibnitz

Ma allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

$$= \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

Esempio 3±1

$$5 + \frac{5^3}{3!} + \frac{5^5}{5!} + \frac{5^7}{7!} + \frac{5^9}{9!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sinh 5 = \frac{e^5 - e^{-5}}{2}.$$

Caso $x = 5$ di

$$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots = \sinh x$$

Per quali x si ha uguaglianza? Per tutti gli x per cui la serie converge

$$\sum \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Converge $\forall x \in \mathbb{R}$ (Fare criterio rapporto)