

MAT 1 TLC

ORA 37

Titolo nota

02/11/2006

Serie di potenze - SERIE DI TAYLOR

SERIE DI POTENZE

polinomio di grado ∞ .

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n X^n = C_0 + C_1 X + C_2 X^2 + C_3 X^3 + \dots$$

coeff. parametro

Domande:

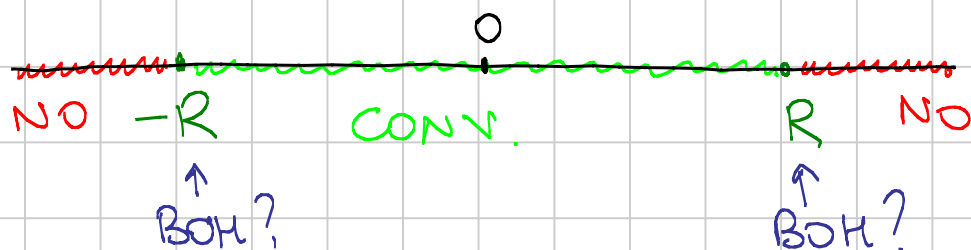
- ① Per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la serie converge?
- ② Quando converge, posso calcolare il valore a cui conv. (in funzione di x ?)

Convergenza delle serie di potenze.

Oss. banale: per $x=0$ la serie converge e la somma fa C_0

TEOREMA 1 (Raggio di convergenza) Data una qualunque serie di potenze, esiste $R \in [0, +\infty]$ $\leftarrow$ può anche valere $+\infty$ con questa proprietà

- per ogni $|x| < R$ ($-R < x < R$) la serie converge
- per ogni $|x| > R$ ($x > R$ oppure $x < -R$) la serie non converge ed anzi non verifica nemmeno la cond. nec.
- per $|x| = R$ ($x = \pm R$) dipende dai casi (i ciascuno dei 2 casi $x = R$ e $x = -R$ può conv. o non conv.)



Oss. Se $R = +\infty$ si intende che la serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$
 Se $R = 0$ allora la serie converge soltanto per $x=0$
 (in $x=0$ converge perché convergono tutte).

TEOREMA 2

(Formula per calcolare il raggio di conv.)

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ una serie di potenze. Supponiamo che esista

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

[È escluso dal
 teo. 2 il caso
 in cui tale
 limite non
 esiste]

Allora

$$R = \frac{1}{L}$$

(si intende che se $L=0$, allora $R=+\infty$
se $L=+\infty$, allora $R=0$)

Esempio 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

[In questo caso $c_n = \frac{1}{n^2}$]

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} \rightarrow 1 = L \Rightarrow R = \frac{1}{L} = 1$$

Quindi la serie

• Converge per $-1 < x < 1$

• non conv. per $|x| > 1$

In $x = \pm 1$ controllo "a mano"

$x = 1 \Rightarrow \sum \frac{1}{n^2}$ conv. perché arit. gen. con $\alpha = 2$

$$x = -1 \leadsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{converge per Leibnitz} \\ \text{o per assoluta convergenza}$$

Conclusione: la serie converge $\Leftrightarrow x \in [-1, 1]$

Esempio 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ [in questo caso $c_n = \frac{1}{n}$]

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \rightarrow 1 = L \Rightarrow R = \frac{1}{L} = 1$$

Controllo gli estremi $x = \pm 1$.

$$x = 1 \leadsto \sum \frac{1}{n} \quad \text{quindi diverge}$$

$$x = -1 \leadsto \sum \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{converge per Leibnitz}$$

Conclusione: la serie converge

$$\hat{=} \\ x \in [-1, 1]$$

Esempio 3

$$\sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\frac{2^n + n^2}{3^n + n^3}} x^n$$

a_n

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{2^n + n^2}{3^n + n^3}} = \sqrt[n]{\frac{2^n}{3^n} \frac{1 + \frac{n^2}{2^n}}{1 + \frac{n^3}{3^n}}} = \frac{2}{3} \frac{\sqrt[n]{1 + \frac{n^2}{2^n}}}{\sqrt[n]{1 + \frac{n^3}{3^n}}} \rightarrow \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{L} = \frac{3}{2}$$

Controllo "a mano" $x = \pm \frac{3}{2}$

$$x = \frac{3}{2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\frac{2^n + n^2}{3^n + n^3} \cdot \frac{3^n}{2^n}}$$

a_n

$a_n \geq 0$ sempre

$a_n \rightarrow 1 \Rightarrow$ no cond. nec.

$\Downarrow$
diverge a $+\infty$

$$x = -\frac{3}{2} \rightsquigarrow \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^n \frac{2^n + n^2}{3^n + n^3} \cdot \frac{3^n}{2^n}}_{a_n}$$

$$a_{2n} \rightarrow 1 \quad a_{2n+1} \rightarrow -1 \Rightarrow \lim a_n \text{ N.E.}$$

⇓
No cond. nec.

Conclusione: la serie converge $\Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$

⇓
non conv.

Esempio 4

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{5^n + 7^n}{n^{35} - n!}}_{c_n} x^n$$

c_n definitivamente è NEGATIVO
(il num. è sempre > 0 , al den. $n!$ definitiv. prevale su n^{35} . Den. $\rightarrow -\infty$)

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\frac{5^n + 7^n}{n! - n^{35}}} \rightarrow 0$$

⇓
L

↑
almeno
defin.

[Brutalmente è

$$\sim \sqrt[n]{\frac{7^n}{n!}} = \frac{7}{\sqrt[n]{n!}} \rightarrow \frac{7}{+\infty}]$$

$\Rightarrow R = +\infty$ ($\frac{1}{L}$) Conclusione: la serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$.

Dim. TEO 2

Hp. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

$$\sqrt[n]{|c_n|} \rightarrow L$$

Controllo la condiz. nec.
a dire che

$$c_n x^n \xrightarrow{?} 0 \text{ il che \u00e9 equivalente}$$

$$|c_n x^n| \xrightarrow{?} 0$$

$$|c_n| \cdot |x|^n \xrightarrow{?} 0$$

Provo a fare il limite con criterio radice

$$\sqrt[n]{|c_n| \cdot |x|^n} = |x| \cdot \sqrt[n]{|c_n|} \rightarrow |x| \cdot L$$

Se $|x| \cdot L > 1$, cio\u00e9 se $|x| > \frac{1}{L}$, allora $|c_n| \cdot |x|^n \rightarrow +\infty$,

dunque non tende a zero, dunque NO condiz. nec., dunque la serie NON converge

Se invece $|x| \cdot L < 1$, cioè se $|x| < \frac{1}{L}$, allora $|c_n| \cdot |x|^n \rightarrow 0$

Non solo. Per il criterio della radice applicato alle serie, si ha che

$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| |x|^n$ converge, ma allora anche

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge per assoluta
convergenza.

— o — o —