

MAT 1 TLC

ORA 36

Es. 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{n+7}{n^2-3}\right) \quad a_n$$

Brutale: $\sin x \sim x$

$$\sin\left(\frac{n+7}{n^2-3}\right) \sim \frac{n+7}{n^2-3} \sim \frac{1}{n}$$

$\Rightarrow$ DIVERGE

Rigoroso: TERMINI ≥ 0 def.

confr. asint. con $b_n = \frac{1}{n}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sin(\quad)}{\frac{1}{n}} = \frac{\sin(\quad)}{(\quad)}$$

$$\frac{(\quad)}{\frac{1}{n}} = \frac{\sin(\quad)}{(\quad)} \cdot \frac{n^2+7n}{n^2-3}$$

$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \rightarrow 1$

$\frac{n^2+7n}{n^2-3} \rightarrow 1$

$\sum a_n$ si comporta come
 $\sum \frac{1}{n}$, dunque diverge

Es. 2

$$\sum_{n=0}^{\infty}$$

$$\sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \cdot \sin(n^3)$$

$\downarrow$
 > 0 perché
 $0 < \frac{1}{n^3} \leq 1$

$\downarrow$
segno
variabile

Provo assol. conv., quindi studio $\sum \left| \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) - \sin(n^3) \right|$

$$= \sum \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \cdot |\sin(n^3)|$$

$$\sin\frac{1}{n^3} \cdot |\sin(n^3)| \leq \sin\frac{1}{n^3}$$

$$\sum \sin\frac{1}{n^3} \text{ converge per congr. asint. con } \sum \frac{1}{n^3}$$

$\Downarrow$ confronto tra serie a termini ≥ 0

$$\sum \sin\frac{1}{n^3} \cdot |\sin(n^3)| \text{ conv.}$$

Assol. conv.

$$\sum \sin \frac{1}{3^3} \cdot \sin (n^3) \text{ conv.}$$

Esempio 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1 \right)^3$$

a_n

$$x = \frac{1}{n} \log n \rightarrow 0$$

Brutale: $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e$

$$\sim 1 + \frac{\log n}{n}$$

$$\left(\sqrt[n]{n} - 1 \right)^3 \sim \left(1 + \frac{\log n}{n} - 1 \right)^3 = \frac{\log^3 n}{n^3}$$

$$\sum \frac{\log^3 n}{n^3} \text{ converge} \Rightarrow \sum \left(\sqrt[n]{n} - 1 \right)^3 \text{ converge}$$

$a_n \geq 0$ sempre

$$a_n \rightarrow (1-1)^3 = 0$$

Cond. nec. ok

può $\Downarrow$ conv.

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

per $x \rightarrow 0$

Rigoroso; congr. asint. con $b_n = \frac{\log^3 n}{n}$ (FARE PER ESERC.)

Es. 4 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan n \right)$

$a_n \geq 0$ perchè $\arctan x \leq \frac{\pi}{2}$
sempre

$a_n \rightarrow 0$ cond. nec. ok

Studioso ricorda che $n \left(\frac{\pi}{2} - \arctan n \right) \rightarrow 1$

cioè

↑
Fatto a suo tempo come
esempio di Hôpital

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan n}{\frac{1}{n}} \rightarrow 1 \neq 0 \neq +\infty$$

Quindi $\sum a_n$ si comporta
come $\sum \frac{1}{n}$, dunque
diverge

Variante: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan n \right)^a$

Come prima faccio il congr. asint. con $b_n = \frac{1}{n^a}$ e
ottenengo che converge $\Leftrightarrow a > 1$.

— o —

Esempio 5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \arctan \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

$a_n \rightarrow 0$

Brutale: $\sin x \sim x - \frac{x^3}{6}$; $\arctan x \sim x - \frac{x^3}{3}$

$$\sin x - \arctan x \sim \cancel{x} - \frac{x^3}{6} - \cancel{x} + \frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{6}$$

mettendolo $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ (e va bene perché $\frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$) abbiamo

$$\sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \arctan \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{6} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^3 = \frac{1}{6} \frac{1}{n^{3/2}}$$

$\Rightarrow$ la serie converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \arctan \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^a$$

costante e non
cambia la conv.

$$\left(\right)^a \sim \left(\frac{1}{6} \frac{1}{n^{3/2}} \right)^a = \boxed{\frac{1}{6^a}} \frac{1}{n^{3a/2}}$$

$$\text{converge} \Leftrightarrow \frac{3a}{2} > 1 \Leftrightarrow 3a > 2 \Leftrightarrow a > \frac{2}{3}$$

Rigoroso : C.A. con $\frac{1}{n^{3a/2}}$

Esempio (7-1) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+2}{n^2+7}$

Non può convergere
perché non è verificata
la cond. nec.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{n^2+2}{n^2+7} - 1 + 1 \right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{n^2+2}{n^2+7} - 1 \right] + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

$$\frac{n^2+2}{n^2+7} - 1 = \frac{\cancel{n^2}+2-\cancel{n^2}-7}{n^2+7}$$

$$= -5 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+7} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

Conv. per assol. conv.

ci si riduce a studiare

$$\sum \frac{1}{n^2+7}$$

⇓ La serie data è
involterminata.

$$|-|+|-|+|-|$$

le somme parziali sono

$$| = 1$$

$$|-| = 0$$

$$|-|+| = 1$$

$$|-|+|-| = 0$$

altern. 0 e 1 ⇒

la serie è INDET.