

MAT 1 TLC

ORA 35

Titolo nota

28/10/2006

SERIE A TERMINI DI SEGNO QUALUNQUE

- CRITERIO LEIBNITZ (serie a segno alterno)
- ASSOLUTA CONVERGENZA

LEIBNITZ Consideriamo $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_n$. Supp. che

(i) $\alpha_n \geq 0$ definit., (cioè a_n ha segno alterno)

(ii) $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ definit., Allora la serie converge.

(iii) $\alpha_n \rightarrow 0$

Esempio 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = -\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$$

In questo caso $a_n = \frac{1}{n}$. Controllo le Hp:

(i) $a_n \geq 0$ $\frac{1}{n} \geq 0$ Sì!

(ii) $a_{n+1} \leq a_n$ $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ Ok

(iii) $a_n \rightarrow 0$ $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ Sì

$\Rightarrow$ La serie converge.

Esempio 1.1

Stessa vale per le serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$$

Nell'ultimo caso $\alpha_n = \frac{1}{\log n}$

(i) $\frac{1}{\log n} \geq 0$ si

(iii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log n} = 0$

(ii) $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$; $\frac{1}{\log(n+1)} \stackrel{?}{\leq} \frac{1}{\log n} \Leftrightarrow$

$\log n \stackrel{?}{\leq} \log(n+1)$ Ok perché $\log x$ è crescente

Oss. Se le ipotesi non sono verificate?

Se non sono verificate (i) e/o (ii), allora BOM

Se non è verificata (iii) allora non è verificata la

cond. nec., dunque di sicuro la serie non converge
(e quindi può div. a $\pm \infty$, oppure essere INDETERMINATA),

(iii) $x_n \rightarrow 0$. Condiz. nec.; $a_n \rightarrow 0$

$a_n = (-1)^n x_n$. Se $a_n \rightarrow 0$, allora $|a_n| \rightarrow 0$,
ma allora
 $|x_n| \rightarrow 0$

$$a_n \rightarrow 0 \Rightarrow |a_n| \rightarrow 0 \Rightarrow |x_n| \rightarrow 0 \Rightarrow x_n \rightarrow 0$$

↑
visto a suo tempo:
una succ. tende a 0
⇕
il suo val. ass. $\rightarrow 0$

Esempio

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \boxed{\frac{n+4}{n+7}} \alpha_n$$

$\alpha_n \rightarrow 1 \Rightarrow$ ipotesi (iii) non verificata $\Rightarrow$ NO COND NEC.

$\Downarrow$
la serie NON
CONVERGE

Cosa fa il limite di $a_n = (-1)^n \alpha_n$?

Non esiste : infatti $a_{2n} \rightarrow 1$ e $a_{2n+1} \rightarrow -1$

ASSOLUTA CONVERGENZA

Data la serie $\sum a_n$, studio

$\boxed{\sum |a_n|}$ Allora

$$\sum |a_n| \text{ conv.} \Rightarrow \sum a_n \text{ conv.}$$

È una serie a

termini ≥ 0 , dunque ho + criteri a disposizione!

ACHTUNG

$$\sum |a_n| = +\infty \Rightarrow \text{BOH.}$$

Esempio 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \boxed{\frac{\cos n}{n^2}} \Rightarrow a_n$$

a_n segni qualunque

Proviamo con l'assoluta conv., e studiamo $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right|$

$$\left| \frac{\cos n}{n^2} \right| = \frac{|\cos n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

$$\sum \frac{1}{n^2} \text{ conv. (arm. con } \alpha = 2) \Rightarrow \sum \frac{|\cos n|}{n^2} \text{ conv.}$$

Confronto
tra serie
a termini
 ≥ 0

ASSOL.
CONV.

$$\sum \frac{\cos n}{n^2} \text{ conv.}$$

$$\frac{\cos m}{m^2} \leq \frac{1}{m^2}$$

$$\sum \frac{1}{m^2} \text{ conv.} \Rightarrow \sum \frac{\cos m}{m^2} \text{ conv.}$$

↓
No perché il
confronto vale solo
tra serie a termini ≥ 0 .

Esempio 2

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + 8 - 7n}{n^4 - 25n^2 + 14} \quad \alpha_n$$

Uso Leibnitz. Verifico ipotesi.

(i) $\alpha_n \geq 0$ def. OK (Numer e den $\rightarrow +\infty$, dunque def. sono > 0)

(iii) $\alpha_n \rightarrow 0$ OK (ii) $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ DISEQ. POCO PIACEVOLE

Proviamo con assol. conv.

$$a_n = (-1)^n \alpha_n$$

Studio $\sum |a_n| = \sum \frac{n^2 + 8 - 7n}{n^4 - 25n^3 + 14}$

↑
Def. hanno gli stessi
termini, dunque stesso
comp.

→ Questa converge
PER confr. asint.

$$\text{con } b_n = \frac{1}{n^2}$$

In fatti:

$$\frac{\frac{n^2 + 8 - 7n}{n^4 - 25n^3 + 14}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^4 + 8n^2 - 7n^3}{n^4 - 25n^3 + 14} \rightarrow 1 \neq 0 \neq +\infty$$

Quindi $\sum \frac{n^2 + \dots}{n^4 - \dots}$ si comporta come $\sum \frac{1}{n^2}$, quindi
CONV.

Poiché $\sum |a_n|$ conv., anche $\sum a_n$ conv.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \boxed{\frac{n^2 + 8 - 7n}{n^2 - 25n + 14}} = \alpha_n$$

$\alpha_n \rightarrow 1$ ↗ Non è verificata ipotesi (iii) di LEIBNITZ

$\Downarrow$
No COND. NEC.

$\Downarrow$
Di sicuro non conv.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \boxed{\frac{n^2 + 8 - 7n}{n^3 - 25n + 14}} = \alpha_n$$

Ora $\alpha_n \rightarrow 0$ (L-iii)

$\alpha_n \geq 0$ defiu, (L-i)

(L-ii) Terribile

Assol. conv. : studio $\sum |a_n| = \sum \frac{n^2 + 8 - 7n}{n^3 - 25n + 14}$

↙ Questa diverge a $+\infty$ per confr. asint.
con $b_n = \frac{1}{n}$

$$\sum |a_n| \text{ div. } \Rightarrow \text{BOH}$$

$$\boxed{\frac{n^3 + 8 - 7n}{n^3 - 25n + 14}} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{\cancel{n^3} + 8n - 7\cancel{n^3} - \cancel{n^3} + 25n - 14}{n(n^3 - 25n + 14)} + \frac{1}{n}$$

α_n

$$= \frac{1}{n} + \frac{-7n^2 + 33n - 14}{n^4 - 25n^2 + 14n}$$

Toruo da capo

$$\boxed{\sum (-1)^n \alpha_n} = \sum (-1)^n \left[\alpha_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right]$$

conv. perché somma
di 2 serie che
convergono.

CONV. PER
LEIBNITZ

$$= \sum (-1)^n \left[\frac{1}{n} + \frac{-7n^2 + \dots}{n^4 + \dots} \right]$$

grado den.
1

↗ grado num.
+2

$$\boxed{\sum (-1)^n \frac{-7n^2 + \dots}{n^4 + \dots}}$$

CONV. PER ASSOLUTA
CONVERGENZA