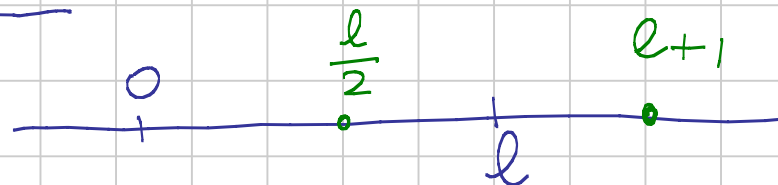


MAT 1 TLC

ORA 34

Dim. criterio confronto asintotico



Se $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow l$, allora definitivamente

$$\frac{l}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq l+1$$

[Avevo supposto $b_n > 0$,
posso moltiplicare
conservando i versi]

$$\frac{l}{2} b_n \leq a_n \leq (l+1) b_n$$

Supponiamo che $\sum b_n = +\infty$, allora per la di'sug. di sinistra avremo che $\sum a_n = +\infty$.

Se invece $\sum b_n$ conv., allora per la disug. di destra anche $\sum a_n$ conv. [In entrambi i casi abbiamo usato il confronto]

CASI LIMITE Supponiamo che $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$.

[Se $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$, allora defn. $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$, dunque $a_n \leq b_n$ def., dunque]

$$\sum b_n \text{ conv.} \Rightarrow \sum a_n \text{ conv.}$$

$$\sum b_n = +\infty \Rightarrow \text{BOH}$$

— 0 — 0 —

Supponiamo che $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow +\infty$ [Se $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow +\infty$, allora defn. $\frac{a_n}{b_n} \geq 1$, dunque $a_n \geq b_n$]

$$\sum b_n \text{ conv.} \Rightarrow \text{BOH}$$

$$\sum b_n = +\infty \Rightarrow \sum a_n = +\infty$$

— 0 — 0 —

Esempio 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \boxed{\frac{\log n}{n}} \quad a_n \geq 0$$

→ a_n

Confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{\log n}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{\log n}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n} = \log n \rightarrow +\infty \quad \text{caso limite!}$$

[Se $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow +\infty$, allora $\frac{a_n}{b_n} \geq 1$ def., quindi $a_n \geq b_n$ defn.]

$$\text{Nel nostro caso} \quad \sum b_n = \sum \frac{1}{n} = +\infty \Rightarrow \sum a_n = +\infty$$

Esempio 2

$$\sum_{n=2}^{\infty}$$

$$\frac{1}{n^2 \log n}$$

$= a_n$

$$a_n \geq 0$$

Confr. asint. con $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{n^2 \log n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\cancel{n^2} \log n} \cdot \cancel{n^2} = \frac{1}{\log n} \rightarrow 0 \quad [\text{CASO LIMITE!}]$$

[$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$, quindi def. $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$, dunque $a_n \leq b_n$ def.]

Nel nostro caso $\sum b_n = \sum \frac{1}{n^2}$ conv. ($\alpha = 2 > 1$), quindi

$\sum a_n$ converge.

Esempio 3

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$$

$$a_n \geq 0$$

Confr. asiut. con $b_n = \frac{1}{n^2}$. $\frac{a_n}{b_n} = \frac{\log n}{n^2} \cdot n^2 = \log n \rightarrow +\infty$

$$\left[\frac{a_n}{b_n} \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \geq 1 \text{ def.} \Rightarrow a_n \geq b_n \text{ def.} \right]$$

Nel nostro caso $\sum b_n = \sum \frac{1}{n^2}$ conv. $\Rightarrow$ BOM.

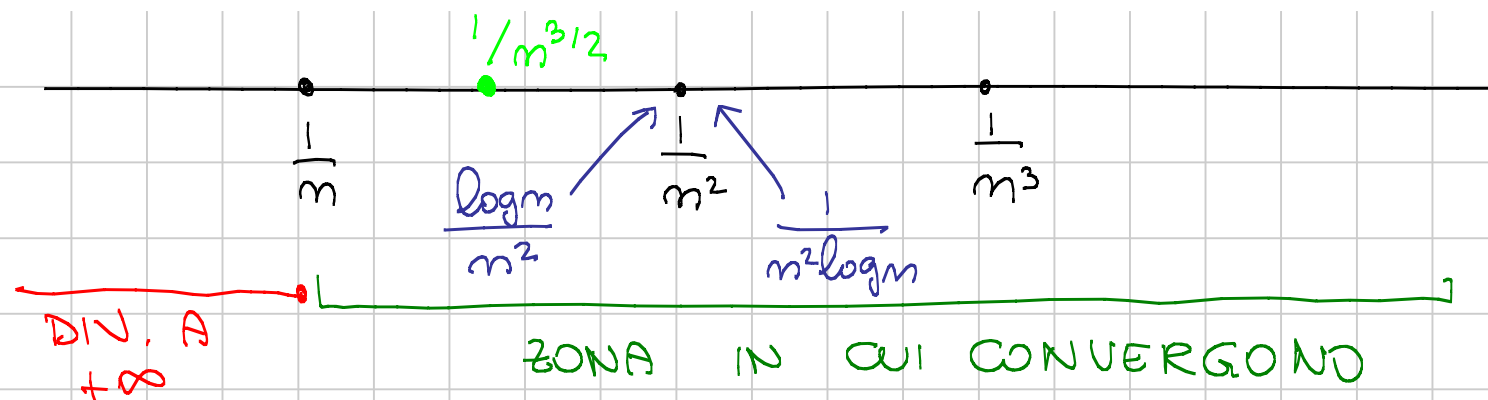
1° TENTATIVO : FALLITO !

Confr. asiut. con $b_n = \frac{1}{n}$. $\frac{a_n}{b_n} = \frac{\log n}{n^2} \cdot n = \frac{\log n}{n} \rightarrow 0$

$$\left[\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \leq 1 \text{ def.} \Rightarrow a_n \leq b_n \text{ def.} \right]$$

Nel nostro caso $\sum b_n = \sum \frac{1}{n} = +\infty \Rightarrow$ BOM

2° TENT.
FALLITO



L'idea brutale è che $\sum \frac{\log n}{n^2}$ converga, ma un po' "meno bene" di $\sum \frac{1}{n^2}$

Confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^{3/2}} = \frac{1}{n\sqrt{n}}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{\log n}{n^2}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} = \frac{\log n}{n^2} \cdot n\sqrt{n} = \frac{\log n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$$

$$\left[\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \leq 1 \text{ def.} \Rightarrow a_n \leq b_n \text{ def.} \right]$$

Nel nostro caso $\sum b_n = \sum \frac{1}{n^{3/2}}$ conv. ($\alpha = \frac{3}{2} > 1$)

$$\Rightarrow \sum a_n \text{ conv.}$$

3° TENTATIVO : ok!

Esempio 4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 5n}{n^a + 2n + 6}$ $\xrightarrow{a_n}$

$a = \text{parametro}$

$$a_n \geq 0$$

Per quali valori di a converge?

Brutale : $a_n \sim \frac{n^2}{n^a} = \frac{1}{n^{a-2}}$

$$\text{converge} \Leftrightarrow a-2 > 1$$

$$\Updownarrow$$

$$a > 3$$

Un po' più rigoroso: se $a \leq 2$, allora a_n non tende a zero
 $\Rightarrow$ no condiz. nec. $\Rightarrow$ DIV. A $+\infty$

Se $a > 2$, allora faccio confr. asint. con $\frac{1}{n^{a-2}}$:

$$\frac{a_n}{b_n} = \dots \rightarrow \begin{cases} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{cases} \quad \text{BLA... BLA...}$$

Esempio 5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 5n}{n^a + 2n^4 + 1}$$

Idea: al den. c'è comunque n^4 che basta per farla convergere

Rigorosamente:

$$\boxed{\frac{n^2 + 5n}{n^a + 2n^4 + 1}}$$

Questa conv. per
confronto

$$\leq \boxed{\frac{n^2 + 5n}{2n^4}}$$

Questa conv. per
C.A. con $\frac{1}{n^2}$

Esempio 6 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin R \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right)$

Brutale: $\sin R x - \sin x = \cancel{x} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \cancel{x} + \frac{x^3}{6}$
 $= \frac{x^3}{3} + o(x^3) \sim \frac{x^3}{3}$

$$\sin R \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n^3}$$

Quindi la serie data si comporta come $\sum \frac{1}{n^3}$, dunque conv.

Rigoroso: Confr. asint. con $b_n = \frac{1}{n^3}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sin R \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}} \quad \text{si riconduce a} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin R x - \sin x}{x^3} \quad \frac{1}{3}$$

Esempio 7

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n+1}{n^2}$$

$$a_n \geq 0$$

$$\sin n+1 \geq 0$$

Taylor non si può usare
perché l'argomento di
 $\sin$ tende a $+\infty$

$$\frac{\sin n+1}{n^2}$$

$\leq$

$$\frac{32}{n^2}$$

converge perché
arm. con $\alpha=2$

converge
per confronto