

MAT 1 TLC

ORA 33

Titolo nota

26/10/2006

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

$$S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

$$S_n \rightarrow ?$$

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$

COND. NEC.

$$\sum a_n \text{ converge} \Rightarrow a_n \rightarrow 0$$

Dim.

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow$
 $0 = l - l$

se la serie converge vuol dire che $S_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

CRITERIO

→ SERIE CON $a_n \geq 0$ def (segno costante)
↘ SERIE CON a_n a segno variabile

CRITERIO CONFRONTO

$0 \leq a_n \leq b_n$ definiti.

$$\sum a_n = +\infty \Rightarrow \sum b_n = +\infty$$

$$\sum b_n = l_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum a_n = l_2 \in \mathbb{R} \quad l_2 \leq l_1$$

Dim.

$$S_n^a = a_0 + a_1 + \dots + a_n ; \quad S_n^b = b_0 + b_1 + \dots + b_n$$

Facciamo finta che $a_n \leq b_n$ sempre. Allora

$$S_n^a \leq S_n^b \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}$$

Se $\sum a_n = +\infty$, allora $S_n^a \rightarrow +\infty$, ma allora $S_n^b \rightarrow +\infty$ pure, dunque anche $\sum b_n = +\infty$

Se $\sum b_n = l$, allora $s_n^b \rightarrow l, l \in \mathbb{R}$, allora di sicuro s_n^a non può tendere a $+\infty$, dunque $\sum a_n$ non può divergere a $+\infty$. Essendo a termini ≥ 0 , non le resta che convergere

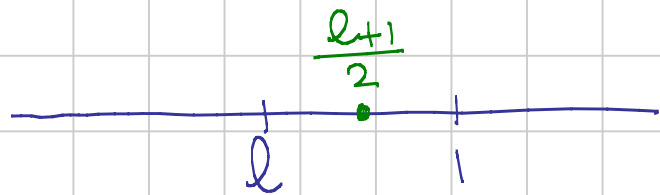
RADICE $a_n \geq 0$, $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$, allora

- $l > 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverge
- $l = 1 \Rightarrow$ BOH
- $0 \leq l < 1 \Rightarrow \sum a_n$ converge

Dim. se $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l > 1$, allora per il criterio radice sui limiti, si ha che $a_n \rightarrow +\infty$, quindi non è verificata la cond. nec., quindi $\sum a_n$ non può conv., quindi div. a $+\infty$.

Se $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l < 1$, allora $a_n \rightarrow 0$, quindi condiz. nec. è verificata, quindi $\sum a_n$ POTREBBE convergere.

FALSA PARTENZA



Se $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l < 1$, allora definit.
 $\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{l+1}{2}$, quindi

$$a_n \leq \overset{b_n}{\left(\frac{l+1}{2}\right)^n}$$

$\sum b_n = \sum \left(\frac{l+1}{2}\right)^n$ è una serie GEOMETRICA, che converge in quanto $\frac{l+1}{2} < 1$.

Poiché $\sum b_n$ conv., anche $\sum a_n$ converge. $\square$



CRITERIO RAPPORTO : analogo per la parte $l > 1$; se $l < 1$ occorre riassorbire la div. fatta per le succ.

— 0 — 0 —

SERIE GEOM.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n$$

→ div. a $+\infty$

se $a \geq 1$

→ conv. a $\frac{1}{1-a}$

se $-1 < a < 1$

$|a| < 1$

→ indet. se

$a \leq -1$

ARMONICA
GENER.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

→ div. a $+\infty$

se $\alpha \leq 1$

→ conv.

se $\alpha > 1$

ARMONICA ARM.
GEN.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\log n)^{\alpha}}$$

→ div. a $+\infty$

se $\alpha \leq 1$

→ conv.

se $\alpha > 1$

CRITERIO CONFRONTO ASINTOTICO

Siano $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$ definitivi. Supponiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix} \quad [\text{Casi standard}]$$

Allora $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso comportamento, cioè

$$\sum a_n \text{ conv.} \Leftrightarrow \sum b_n \text{ conv.}$$

$$\sum a_n = +\infty \Leftrightarrow \sum b_n = +\infty$$

Esempio 1 $\sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\frac{n^2 + 6n + 5}{n^4 - 3n^2 + 28}} = a_n$

Brutale: $a_n \sim \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}$ $\sum \frac{1}{n^2}$ conv perché armonica
con $\alpha > 1$.

Rigoroso: $a_n \geq 0$ definit. Applico confr. asint. con

$$b_n = \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2 + 6n + 5}{n^4 - 3n^2 + 28} \cdot n^2 \rightarrow \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix} \Rightarrow \text{le due serie} \\ \text{hanno lo stesso} \\ \text{Comp.}$$

$\uparrow$ a_n $\uparrow$ DIVISO b_n

Poiché $\sum b_n = \sum \frac{1}{n^2}$ conv., anche $\sum a_n$ conv.

Esempio 2 $\sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\frac{7}{\sqrt{n^2+5}}} \Rightarrow a_n$

Brutale: $a_n \sim \frac{7}{\sqrt{n^2}} = \frac{7}{n}$ $\sum \frac{1}{n} = +\infty$ (ARM. con $\alpha=1$)

Rigoroso: $a_n \geq 0$ def. Confr. asint. con $b_n = \frac{1}{n}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{7}{\sqrt{n^2+5}}}{\frac{1}{n}} = \frac{7n}{\sqrt{n^2+5}} = \frac{\cancel{7n}}{\cancel{n} \sqrt{1 + \frac{5}{n^2}}} \rightarrow 7 \neq 0, \neq +\infty$$

Poichè $l \neq 0$, $l \neq +\infty$, le 2 serie hanno lo stesso comp.

$$\sum b_n = +\infty \Rightarrow \sum a_n = +\infty.$$

Esempio 3 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

NOTA BENE : $0 < \frac{1}{n} \leq 1$, quindi $\sin \frac{1}{n} > 0$

perché $\sin x > 0$ quando $0 < x \leq 1$ in realtà? fino a π .

Brutale : $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$, quindi $\sum \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \sum \frac{1}{n} = +\infty$

Rigoroso : confr. asint. con $b_n = \frac{1}{n}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \longrightarrow \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix} \left[\text{solito } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right]$$

Quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum b_n$, dunque diverge

Esempio 4

$$\sum_{n=1}^{\infty}$$

$$\left(\sqrt[n]{5} - 1 \right)$$

$a_n > 0$

Brutale

$$\sqrt[n]{5} - 1 = e^{\frac{1}{n} \log 5} - 1 \sim$$

$$\sim \cancel{x} + \frac{1}{n} \log 5 - \cancel{x}$$

Confronto asint. con $b_n = \frac{1}{n}$:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sqrt[n]{5} - 1}{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{5^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{n} \log 5} - 1}{\frac{1}{n} \log 5}$$

$$\log 5 \rightarrow \log 5 \neq 0 \neq \infty$$

solito

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

Quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum \frac{1}{n}$, dunque diverge.