

MAT I TLC

ORA 31

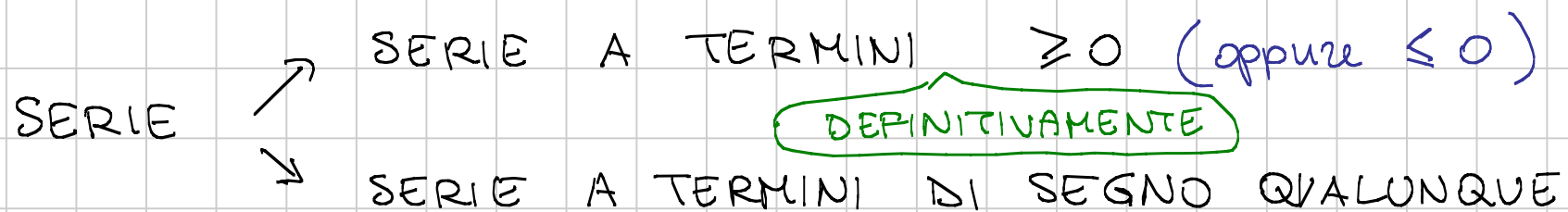
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\arctan(2^n) + \sin(n!)}{(n+3) \sqrt{n+1}}$$

Una formula esplicita
per S_n NON SI TROVA

Ci sono CRITERI che permettono di stabilire se una SERIE
CONVERGE O NO senza calcolare S_n .

↓
Se converge, i criteri non dicono a cosa converge
(non permettono di calcolare)

(Una volta che si sa che converge, ci sono metodi per
calcolare in modo approssimato il valore di L)



Se una serie è a termini ≥ 0 , la successione delle somme parziali è DEBOLMENTE CRESCENTE

$$s_{n+1} = s_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \geq s_n$$

Di conseguenza la serie ha solo 2 possibili comportamenti

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \begin{cases} \nearrow \text{CONVERGE ad un certo } l \in \mathbb{R} \\ \searrow \text{DIVERGE a } +\infty \end{cases}$$

CRITERIO DELLA RADICE

Sia $a_n \geq 0$. Supponiamo che

$$\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Allora * se $l > 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$

* se $0 \leq l < 1$, $\sum a_n$ converge

* se $l = 1$, allora BOH

CRITERIO RAPPORTO

Sia $a_n > 0$. Supponiamo che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Allora Come Sopra.

CRITERIO CONFRONTO

Siano $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$. Supp. che

$$a_n \leq b_n \quad \text{definitivamente}$$

Allora

$$\sum a_n = +\infty \Rightarrow \sum b_n = +\infty$$

$$\sum b_n = l_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum a_n = l_2 \in \mathbb{R} \quad (\text{con } l_2 \leq l_1)$$

Negli altri casi non si può dire nulla.

— 0 — 0 —

CONDIZIONE NECESSARIA

Sia $\sum a_n$ una serie
(nessuna ipotesi sui segni
degli a_n).

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $a_n \rightarrow 0$

NON VALE IL VICEVERSA. Se $a_n \rightarrow 0$, la serie può fare quello che gli pare (conv., div., essere insol.)

Operativamente: data una serie, controllo se verifica la cond. nec., cioè faccio il limite di a_n

→ se viene $\neq 0$, oppure che non esiste, di sicuro la serie NON CONVERGE

→ se viene $= 0$, la serie POTREBBE convergere, ma non è obbligata a farlo.

Esempio 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 8}{(n+1)(n+5)} \quad a_n$$

$a_n \geq 0$ sempre

La serie può

→ ~~conv.~~
→ div. a $+\infty$

No perché cond. nec. non verificata

Controllo la cond. nec.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$, quindi la serie NON CONV,
quindi diverge a $+\infty$.

Esempio 2

$$\sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\frac{n^2}{2^n}} = a_n \quad a_n \geq 0 \text{ sempre}$$

la serie $\begin{matrix} \nearrow \text{conv.} \\ \searrow \text{div. a } +\infty \end{matrix}$

Cond. necessaria: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$

quindi POTREBBE CONVERGERE

Applico RAPPORTO (verrebbe anche con RADICE: provane!)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{\frac{1}{2} < 1}$$

La serie converge.

Esempio 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{3}\right)^{3^2} \cdot \frac{1}{n^2 + 25} \right] \rightarrow a_n$$

$a_n > 0$ sempre

RADICE: $\sqrt[n]{a_n} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{3}\right)^3}_e \cdot \underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{n^2 + 25}}}_{\substack{1 \\ \text{polin.}}}$ $\rightarrow e > 1$

Abbiamo dim. che $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow e$, ma allora

$\Rightarrow$ la serie DIVERGE

$a_n \rightarrow +\infty$, quindi COND. NEC. non verificata, quindi NON converge

SERIE ARMONICA GENERALIZZATA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \begin{cases} \nearrow \text{DIVERGE A } +\infty & \text{se } 0 \leq \alpha \leq 1 \\ \searrow \text{CONVERGE} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

SI PUÒ DARE PER BUONA [L'armonica classica è quella con $\alpha = 1$]

Esempio...

$$\sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\frac{n^2 - 8}{n^4 + n^3 + 82}} = a_n$$

$a_n > 0$ DEFINITIV.

$$\sum a_n \begin{cases} \nearrow \text{DIV. A } +\infty \\ \searrow \text{CONV.} \end{cases}$$

Cond. nec. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ (può convergere)

$$a_n \leq \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2} \quad \left[\begin{array}{l} \text{Num + grande} \\ \text{Den + piccolo} \end{array} \right]$$

$$a_n \leq \boxed{\frac{1}{n^2}} = b_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{converge perché armonica gen. con } \alpha = 2$$

$$\sum b_n \text{ conv.} \quad \xRightarrow{\text{CONFRONTO}} \quad \sum a_n \text{ conv.}$$

Esempio ...

$$\sum_{n=1}^{\infty} \boxed{\frac{\arctan(n!)}{n \sqrt{n+4}}} \quad a_n$$

$$a_n \geq 0 \text{ sempre}$$

$$\frac{\arctan(n!)}{n\sqrt{n+4}} \ll \frac{30}{n\sqrt{n}} \quad \leftarrow \text{abbondare !!!}$$

$\parallel$
 a_n
 $\parallel$
 b_n

$$\sum b_n = 30 \sum \frac{1}{n\sqrt{n}} = 30 \sum \frac{1}{n^{3/2}} \quad \alpha > 1 \text{ converge!}$$

CONFRONTO

$$\sum b_n \text{ conv.} \Rightarrow \sum a_n \text{ conv.}$$