

MAT I TLC

ORA 30

Titolo nota

25/10/2006

SERIE

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

a_n è una successione data
Voglio sommare tutti gli
infiniti termini della successione

$$\sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

← SOMMATORIA, cioè una
somma finita.

||

s_n [somma parziale]

$\{s_n\}$ risulta una successione di numeri, di cui posso pro-
vare a fare il limite

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

$$s_0 = a_0$$

$$s_1 = a_0 + a_1$$

$$s_2 = a_0 + a_1 + a_2$$

⋮

$$s_m = a_0 + a_1 + \dots + a_m$$

s_m per $m \rightarrow +\infty$

- ↗ $s_m \rightarrow l \in \mathbb{R} \Rightarrow$ La serie converge ad l
- $s_m \rightarrow +\infty \Rightarrow$ La serie diverge a $+\infty$
- ↘ $s_m \rightarrow -\infty \Rightarrow$ La serie diverge a $-\infty$
- ↙ s_m NON HA LIMITE $\Rightarrow$ La serie è INDETERMINATA

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = l \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = -\infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ INDET.}$$

Variante ovvia

$$\sum_{n=37}^{\infty} a_n$$

$$\Delta_{37} = a_{37}$$

$$\Delta_{38} = a_{37} + a_{38}$$

$$\Delta_{39} = a_{37} + a_{38} + a_{39}$$

⋮

$$\Delta_{m+1} = \Delta_m + a_{m+1}$$

RELAZIONE RICORSIVA
CHE DEFINISCE $\{\Delta_m\}$

— 0 — 0 —

Es. ①. $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$

$$\Delta_0 = a_0 = 0$$

$$\Delta_1 = a_0 + a_1 = 0 + 0 = 0$$

allo stesso tutti gli $\Delta_m = 0$

$$\Delta_m \rightarrow 0$$

Es. ② $a_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum a_n = +\infty$

$$s_0 = a_0 = 1$$

$$s_1 = a_0 + a_1 = 1 + 1 = 2$$

$$s_2 = a_0 + a_1 + a_2 = 1 + 1 + 1 = 3$$

In generale

$$s_n = n + 1 \longrightarrow +\infty$$

↑
si dimostra per
induzione a partire
dalla relaz. ricorrente.

Esempio ③ Fissiamo un parametro $a \in \mathbb{R}$. $a_n = a^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots$$

$$s_2 = 1 + a + a^2$$

$$S_m = 1 + a + a^2 + \dots + a^m = \frac{1 - a^{m+1}}{1 - a}$$

Dimostrato
per induzione
(VALE se $a \neq 1$)

$$S_m \rightarrow \begin{cases} +\infty \\ \frac{1}{1-a} \\ \text{N.E.} \\ \text{N.E.} \end{cases}$$

se $a > 1$ [Num $\rightarrow -\infty$
Den. < 0]

se $-1 < a < 1$ [In questo caso
 $a^{m+1} \rightarrow 0$]

se $a < -1$ [sui pari $\rightarrow +\infty$
sui dispari $\rightarrow -\infty$]

se $a = -1$ [Den = 2
Num = 2, 0, 2, 0, 2, 0]

RIASSUMENDO

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \begin{cases} \text{Diverge a } +\infty & \text{se } a \geq 1 \\ \text{Converge a } \frac{1}{1-a} & \text{se } -1 < a < 1 \\ \text{Indeterminata} & \text{se } a \leq -1 \end{cases}$$

SERIE GEOMETRICA

— 0 — 0 —

SERIE TELESOPICHE

Esempio 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots = 1$

$$\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\left[= \frac{\cancel{n+1} - n}{n(n+1)} \right]$$

Devo calcolare Δ_n e poi fare il $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n$.

$$\Delta_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$
$$= \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} \right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} \right) + \dots + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}$$

RIMANGONO SOLO IL 1° e L'ULTIMO

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\Delta_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Ufficialmente:
INDUZIONE

↓
1

⇒ LA SERIE CONVERGE A 1.

Esempio 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

$$\begin{aligned} \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) &= \log \left(\frac{n+1}{n} \right) \\ &= \log(n+1) - \log n \end{aligned}$$

$$S_n = \log \left(1 + \frac{1}{1} \right) + \log \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \log \left(1 + \frac{1}{3} \right) + \dots + \log \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

$$\begin{aligned} &= (\cancel{\log 2} - \log 1) + (\cancel{\log 3} - \cancel{\log 2}) + (\cancel{\log 4} - \cancel{\log 3}) + (\cancel{\log 5} - \cancel{\log 4}) + \dots \\ &\quad + (\log(n+1) - \cancel{\log n}) \end{aligned}$$

$\log 1 = 0$

INDUZIONE

Conclusione

$$S_n \xrightarrow{\downarrow} \log(n+1) \rightarrow +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) = +\infty$$

PROPRIETÀ GENERALI

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = l_1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = l_2$$

$$c_n = (a_n + b_n)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$$

SOMMA PARZIALE
n-esima rel. alla
serie c

$$\boxed{S_n^c}$$

$$= c_0 + c_1 + \dots + c_n$$

$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + \dots + (a_n + b_n)$$

$$= (a_0 + a_1 + \dots + a_n) + (b_0 + b_1 + \dots + b_n)$$

$$= \overset{a}{S_n} \downarrow l_1$$

$$+ \overset{b}{S_n} \downarrow l_2$$

Di conseguenza

$$S_n^c \rightarrow l_1 + l_2 \text{ TRANNE}$$

nei casi $+\infty - \infty$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad \begin{array}{l} \text{TRANS NEI} \\ \text{CASI } +\infty - \infty \end{array}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \neq 0 \quad \left| \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n) \right|$$

$$(\lambda a_0) + (\lambda a_1) + (\lambda a_2) + \dots + (\lambda a_n) = \lambda (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

$$Q_1 \in \overline{\mathbb{R}}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cdot b_n)$ NULLA DI FURBO!! (È falso anche per somme FINITE)

$$a_0 b_0 + a_1 b_1 \neq (a_0 + a_1)(b_0 + b_1)$$