

MAT I TLC

ORA 29

$$1 - \cos^2 x^3 = x^6 + o(x^6)$$

$$1 - \cos^3 x^2 = \frac{3}{2} x^4 + o(x^4)$$

$$\cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^7)$$

$$(\cos x^2)^3 = \left(1 - \frac{x^4}{2} + o(x^7)\right)^3$$

$$= 1 - \frac{3}{2} x^4 + o(x^4)$$

↑
TRIPLO PRODOTTO $3 \cdot (1)^2 \left(-\frac{x^4}{2}\right)$

RICEVIMENTO : GIOVEDÌ
da [FINE LEZIONE $\rightarrow +\infty$]
dove si è fatto lezione

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$\cos x^3 = 1 - \frac{x^6}{2} + o(x^9)$$

$$(\cos x^3)^2 = 1 - x^6 + o(x^6)$$

↑
DOPPIO
PRODOTTO

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x^3}{1 - \cos^3 x^2} &= \frac{x^6 + o(x^6)}{\frac{3}{2} x^4 + o(x^4)} = \\
 &= \frac{\cancel{x^4}^0 x^2 \left(1 + \frac{o(x^6)}{x^6} \right)}{\cancel{x^4}_0 \left(\frac{3}{2} + \frac{o(x^4)}{x^4} \right)} \rightarrow 0 \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}} = 0,
 \end{aligned}$$

SVILUPPI CON CENTRO $x_0 \neq 0$.

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$f(x) = \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

Cambio variabile: $R = x - x_0$ Quando $x \rightarrow x_0$ ho che $R \rightarrow 0$
 $x = x_0 + R$

$f(x) = f(x_0 + R) =$ funzione di R che chiamo $g(R)$

Applico solito Taylor a g . Ottengo

$$g(R) = g(0) + g'(0)R + \frac{g''(0)}{2!} R^2 + \dots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!} R^n + o(R^n)$$

Ora torno indietro:

$$g(R) = f(x_0 + R), \quad g'(R) = f'(x_0 + R), \quad g''(R) = f''(x_0 + R)$$

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + f'(x_0)R + \frac{f''(x_0)}{2!} R^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} R^n + o(R^n)$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots +$$

$$+ \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + o((x-x_0)^m)$$

Quando $x_0 = 0$ tutte le deriv. erano calcolate in 0, ora sono calcolate in x_0 .

Inoltre $x \sim 0$ e nello sviluppo comparivano potenze di x

Ora $x - x_0 \sim 0$ e $\sim$ $\sim$ Compaiono $\sim$ $\sim$ $x - x_0$

$e^{\cos x}$

Non si può fare la sostituzione brutale

$\cos x \rightarrow 1$, quindi mi serve uno sviluppo di e^t
per $t \sim 1$

$$e^{1+h} = \text{dovrei calcolare le derivate di } e^t \text{ per } t=1$$

$$= e \cdot e^h = e \left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + o(h^3) \right) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

$$= e + eh + \frac{e}{2} h^2 + \frac{e}{6} h^3 + o(h^3)$$

$$e^{\cos x} = e^{1 + \boxed{\cos x - 1}}$$

↑
 $e \text{ in } h \rightarrow 0$

$$\cos x - 1 = \cancel{-\frac{x^2}{2} + o(x^3)} \cancel{-}$$

$$= e + e(\cos x - 1) + \frac{e}{2} (\cos x - 1)^2 + \frac{e}{6} (\cos x - 1)^3 + o(\quad)$$

$$= e + e \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3) \right) + \frac{e}{2} \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3) \right)^2 + \frac{e}{6} (\quad)^3 + o(\quad)$$

$$= e - \frac{e}{2} x^2 + o(x^3)$$

$$e^{\cos x} = e - \frac{e}{2} x^2 + o(x^3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - \cos x - x}{\arctan x \cdot \sin(\sin x)} =$$

$$\arctan x = x + o(x)$$

$$\sin(\sin x) = x + o(x)$$

$$\sin t = t + o(t) ; \quad \sin(\sin x) = \sin x + o(\sin x) \\ = x + o(x)$$

$$\text{Denom.: } (x + o(x)) \cdot (x + o(x)) = x^2 + o(x^2)$$

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3) \quad (\text{FATTO PRIMA})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} - \cancel{1} + \frac{x^2}{2} - \cancel{x} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x+x^3) - \sin x}{\log(1+\sin^2 x) \tan x} = \frac{5}{6}$$

$$\tan x = x + o(x) ; \sin x = x + o(x) ; \sin^2 x = x^2 + o(x^2)$$

$$\tan x \sim x ; \sin^2 x \sim x^2 ; \log(1+\sin^2 x) \sim \log(1+x^2) \sim x^2$$

Denominatore $\sim x^3$. Sviluppo numeratore all'ordine 3

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} ; \arctan(x+x^3) \sim x+x^3$$

$$\arctan t \sim t$$

$$\arctan(x+x^3) - \sin x \sim \cancel{x} + x^3 - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} = \frac{7}{6} x^3$$

200000

$$\arctan t = t + o(t) ; \arctan (x+x^3) = x+x^3 + o(x+x^3) \\ = x+x^3 + o(x) = x+o(x)$$

$$o(x+x^3) = (x+x^3) \omega(x) = x \underbrace{(1+x^2)}_{\omega_2(x)} \omega(x)$$

NO
BUONO

NON POSSO
RACCOGLIERE
 x^3

$$= x^3 \left(\frac{1}{x^2} + x \right) \omega(x)$$

⇒ DISASTRO

VA BENE; $\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + o(t^3)$

$$\arctan (x+x^3) = (x+x^3) - \frac{(x+x^3)^3}{3} + o((x+x^3)^3) \\ = x+x^3 - \frac{x^3}{3} + o(x^3) = x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$$

Numeratore =

$$= \arctan(x + x^3) - \sin x = \cancel{x} + \frac{2}{3}x^3 - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$= \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\lim = \frac{5}{6}$$