

MAT I TLC

ORA28

Titolo nota

24/10/2006

Formula di Taylor $\rightarrow$ composizione di funzioni

$\searrow$ centro in un p.to $x_0 \neq 0$

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{6} + o((2x)^3) =$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$o((2x)^3) = (2x)^3 \omega(2x) = x^3 \cdot \underbrace{8\omega(2x)}_{\omega_2(x) \rightarrow 0}$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + o(x^6) + o(x^7)$$

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{(\sin x)^2}{2} + \frac{(\sin x)^3}{6} + o((\sin x)^3)$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$$

$$= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^2 + \frac{1}{6} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^3 + o((\sin x)^3)$$

$$= 1 + x - \cancel{\frac{x^3}{6}} + \frac{1}{2}x^2 + \cancel{\frac{1}{6}x^3} + o((\sin x)^3) + o(x^3)$$

↑
il resto del $(\dots)^2$
se lo è mangiato
 $o(x^3)$

MANGIATO?

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$o((\sin x)^3) \Leftrightarrow o(x^3)$$

↑ ↑
STESSA FORZA

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \underbrace{t^3 \omega(t)}$$

$$\omega(t) \rightarrow 0 \text{ per } t \rightarrow 0$$

$$o((\sin x)^3) = (\sin x)^3 \cdot \omega(\sin x) =$$

$$= x^3 \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x} \right)^3 \omega(\sin x)}_{\omega_2(x)}$$

$$\omega_2(x) \rightarrow 1 \cdot 0 = 0$$

$$\cos(\sin x) =$$

$$\boxed{n=4}$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(\sin x)^2 + \frac{1}{24}(\sin x)^4 + o((\sin x)^4)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4 + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ 2 \cdot x \left(-\frac{x^3}{6}\right) \\ \text{DOPPIO} \\ \text{PRODOTTO} \end{array}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)$$

$f(x) = \cos(\sin x)$ è una funzione PARI

$$f(-x) = \cos(\sin(-x)) = \cos(-\sin x) = \cos(\sin x) = f(x)$$

$\uparrow$ $\sin$ DISP. $\uparrow$ $\cos$ PARI

Essendo f pari, nel suo sviluppo compaiono solo potenze PARI, quindi non c'è il termine in x^5

— 0 — 0 —

$$f(x) = \sin(\cos x) = \boxed{m=4}$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^4)$$

$$= \cos x - \frac{(\cos x)^3}{6} + o((\cos x)^4)$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) - \frac{1}{6} \left(\quad \right)^3 + \boxed{o(x^4)} \quad ???$$

$$o((\cos x)^4) = (\cos x)^4 \omega(\cos x) = x^4 \underbrace{\left(\frac{\cos x}{x} \right)^4 \omega(\cos x)}_{\omega_2(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \omega_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\left(\frac{\cos x}{x} \right)^4}_{+\infty} \cdot \underbrace{\omega(\cos x)}_{\omega(1)}$$

Con $\sin(\cos x)$ non va bene perché la funzione è intera, nel nostro caso $\cos x$, non tende a 0 per $x \rightarrow 0$.

$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^4)$ buona approssimazione per $t \approx 0$
 Se mettiamo $t = \cos x$ e poi facciamo $x \rightarrow 0$,
 ho che $t \rightarrow 1$.

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)$$

buona per $t \approx 0$

Se metto $t = \sin x$ e faccio $x \rightarrow 0$
ho che $t \rightarrow 0$, quindi ok.

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) - \frac{1}{6} \left(\quad \right)^3 +$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{6} \left(1 + \dots \right) + \frac{1}{5!} \left(\begin{matrix} \downarrow \\ 1 + \dots \end{matrix} \right)^5 + o(x^4)$$

tutte $(\quad)^k$ producono delle costanti, quindi non finì,
so mai nemmeno di calcolare il termine noto.

Esempio $\boxed{x \rightarrow 0}$

SVILUPPI DI
ORDINE 1

$$\frac{e^{2x} + \cos(3x) + \sqrt{1+x} - 3}{\arctan x + \arcsin x} \stackrel{!}{=} \frac{\cancel{1} + 2x + \cancel{1} + \cancel{1} + \frac{x}{2} - \cancel{3} + o(x)}{2x + o(x)}$$

$$e^{2x} = 1 + 2x + o(x)$$

$$\cos(3x) = 1 + o(x)$$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$$

$$\arctan x = x + o(x)$$

$$\arcsin x = x + o(x)$$

$$= \frac{\frac{5}{2}x + o(x)}{2x + o(x)}$$

$$= \frac{\cancel{x} \left(\frac{5}{2} + \boxed{\frac{o(x)}{x}} \right)}{\cancel{x} \left(2 + \boxed{\frac{o(x)}{x}} \right)} \rightarrow \frac{5}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log^4(1+x)}{\cos x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + o(x^4)}{\cancel{1} - \frac{x^4}{2} + o(x^4) - \cancel{1}} = -2$$

$$\log(1+x) = x + o(x) ; [\log(1+x)]^4 = (x + o(x))^4 \\ = x^4 + o(x^4)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

— 0 — 0 —

$x \rightarrow 0$

$$x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{x\sqrt{x} + \cos x - 1}{\sin x^5 + \sin^5 x + \sqrt{\arctan(2x^3)}} =$$

$$= \frac{x\sqrt{x} + \cancel{1} + o(x^{3/2}) - \cancel{1}}{\sqrt{2x^3} \quad o(x^{3/2})}$$

$$= \frac{x\sqrt{x} + o(x^{3/2})}{\sqrt{2}x\sqrt{x} + o(x^{3/2})} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos x = 1 + o(x^{\frac{3}{2}})$$

$$\sin x^5 = o(x^{3/2})$$

$$(84x)^5 = o(x^{3/2})$$