

MAT 1 TLC

ORA 27

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\boxed{1} \quad f(x) = e^x \quad f^{(k)}(x) = e^x \quad f^{(k)}(0) = 1$$

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!} = \text{coeff. di } x^k$$

$$\boxed{2} \quad f(x) = \sin x, \quad f^{(1)}(x) = \cos x, \quad f^{(2)}(x) = -\sin x, \quad f^{(3)}(x) = -\cos x$$

$f^{(4)}(x) = \sin x, \quad f^{(5)}(x) = \cos x, \dots$ si ripete con periodo 4

$$f(0) = 0, \quad f^{(1)}(0) = 1, \quad f^{(2)}(0) = 0, \quad f^{(3)}(0) = -1$$

Quindi otteniamo la successione $0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1,$
quindi 0 sui pari e alternativamente 1 e -1 sui dispari

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \text{coeff. di } x^k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ \text{alt. } \pm \frac{1}{k!} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

③ $\cos x$ stessa cosa sfasata di 1-ordine di derivazione!
 $1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0$

$$\textcircled{4} \quad f(x) = \log(1+x) \quad f^{(1)}(x) = \frac{1}{1+x} ; f^{(2)}(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f^{(3)}(x) = 2 \frac{1}{(1+x)^3} ; f^{(4)}(x) = -6 \frac{1}{(1+x)^4}$$

$$f^{(5)}(x) = 24 \frac{1}{(1+x)^5}$$

In generale

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{1}{(1+x)^k} (k-1)!$$

DIMOSTRARE RIGOROSAMENTE PER INDUZIONE

$$\text{coeff. di } x^k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!} (-1)^{k+1} (k-1)!$$

$$= (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{k (k-1)!} = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \dots$$

$$\text{arctan } x =$$

DERIVA

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

DERIVO

Esempio 1

$$f(x) = \sin x + e^x \quad \text{voglio calcolare } P_3(x)$$

$$\left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right] + \left[1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right]$$

$$= \left[1 + 2x + \frac{x^2}{2} \right] + o(x^3)$$

$P_3(x)$

"Lo sviluppo della somma è la somma degli sviluppi"

Quanto vale $f'''(0)$?

$$0 = \text{coeff. di } x^3 = \frac{f'''(0)}{3!}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'''(0) = 0}$$

Idem per la $f^{(2)}$, $f^{(1)}$, $f^{(15)}$, ...

Esempio 2

$$f(x) = e^x \cdot \cos x$$

$P_3(x)$

$$= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \right)$$

$$= 1 - \cancel{\frac{x^2}{2}} + x - \frac{x^3}{2} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$= \boxed{1 + x - \frac{x^3}{3}} + o(x^3)$$

$P_3(x)$

Lo sviluppo del prodotto è il prodotto degli sviluppi
(molti termini vengono inglobati nell' o -piccolo).

Composizione tranquille

PIACEREBBE

$$\sin(3x) = 3x - \frac{(3x)^3}{6} + o((3x)^3) \xrightarrow{\downarrow} 3x - \frac{27}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$$

PIAC,

$$\sin(x^3) = x^3 - \frac{(x^3)^3}{6} + o((x^3)^3) \xrightarrow{\downarrow} x^3 - \frac{x^9}{6} + o(x^9)$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + t^3 \omega(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \omega(t) = 0$$

$$\begin{aligned} \sin(3x) &= 3x - \frac{(3x)^3}{6} + \underbrace{(3x)^3 \omega(3x)}_{27x^3 \omega(3x)} \\ &= x^3 \underbrace{27 \omega(3x)}_{\omega_2(x)} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \overset{\omega_2(x)}{27 \omega(3x)} = 0$$

$$t = 3x \dots$$

$$\sin(x^3) = x^3 - \frac{x^9}{6} + O(x^9) \quad \text{VERA}$$

$$= x^3 - \frac{x^9}{6} + O(x^3) \quad \text{VERA MA BUFFA}$$

$$= x^3 - \frac{x^9}{6} + O(x^{10}) \quad \text{VERA}$$

$$= x^3 - \frac{x^9}{6} + O(x^{12}) \quad \text{VERA}$$

$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + O(t^4)$

USANDO QUESTA

$$= x^3 - \frac{x^9}{6} + O(x^{14}) \quad \text{VERA}$$

Il termine succ. verrebbe fuori

da $\frac{t^5}{120}$

e quindi sarebbe

$$\frac{C x^3)^5}{120}$$

quindi espon.
(15)