

Formula di Taylor

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $n \in \mathbb{N}$. Sotto opportune ipotesi su f
[esistenza delle prime n derivate]
esiste un unico polinomio $P_n(x)$ di grado $\leq n$ tale che

$$f(x) = P_n(x) + \underbrace{o(x^n)}_{\text{ERRORE / RESTO DI PEANO}} \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

[Si può approssimare $f(x)$ con un polinomio $P_n(x)$ commettendo un errore che è $o(x^n)$, dunque "piccolo" quando $x \rightarrow 0$]

Il polinomio $P_n(x)$ è dato dalla formula

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Dim. nel caso $n=3$

$P_3(x)$

$$\text{Devo dim. che } f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + o(x^3)$$

il che equivale a dim. che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x - \frac{f''(0)}{2}x^2 - \frac{f'''(0)}{6}x^3}{x^3} = 0$$

Il limite è $\frac{f(0) - f(0)}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{H\ddot{o}p}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0) - f''(0)x - \frac{f'''(0)}{2}x^2}{3x^2}$$

$$\frac{0}{0} \Rightarrow \text{H\ddot{o}p}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x) - f''(0) - f'''(0)x}{6x} \quad \frac{0}{0} \Rightarrow \text{H\ddot{o}p}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'''(x) - f'''(0)}{6} = \frac{f'''(0) - f'''(0)}{6} = 0$$

— 0 — 0 —

SVILUPPI DI TAYLOR

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\sin R x =$$

$$\cos R x =$$

come $\sin x$ e $\cos x$
 solo con tutti +
 invece che
 con segni
 alternati

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$



$$\operatorname{arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!} x^4 + \dots$$

Casi particolari

^{da x}
[Per esponenti $> \alpha$, il coeff diventa 0]

α intero positivo $\Rightarrow$ solito sviluppo del "binomio di Newton"

$$\boxed{\alpha = -1} \quad (1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$$

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{2}} \quad (1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2}-1)}{2} x^2 + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

Domanda: deb. il pol. di Taylor di ordine 4 ($n=4$) per $f(x) = \sin x$

$$\boxed{x \rightarrow 0}$$

$$P_4(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

$$P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

VERA (Taylor con $n=3$)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

VERA (Taylor con $n=4$)

E MIGLIORE DELLA PRECEDENTE

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^5)$$

FALSA (dovrei aggiungere $+\frac{x^5}{120}=5!$)

$$\sin x = x - \boxed{\frac{x^3}{6}} + o(x^2)$$

$= o(x^2)$

VERA MA "INUTILE" (BUFFA)

Se si mette $o(x^2)$, questo
mangia tutte le potenze con $\text{exp.} > 2$
Quindi è INUTILE SCRIVERLE

Esempio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x + x^5}{x^3} = \text{uso Taylor}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} - \cancel{\sin x} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right) = \frac{1}{6}$$

per def.
di $o(x^3)$

$$\frac{x - \sin x + x^5}{x^3} = \frac{\cancel{x} - \cancel{\sin x} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + o(x^5) + x^5}{x^3}$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{x^2}{120} + \frac{o(x^5)}{x^3} + x^2 \rightarrow \frac{1}{6}$$

$\frac{o(x^5)}{x^3} \rightarrow 0$ $x^2 \rightarrow 0$

$$\frac{x - \sin x + x^5}{x^3} \quad \parallel \quad \frac{\cancel{x} - \cancel{\sin x} + o(x^2)}{x^3} = \frac{o(x^2)}{x^3} = \text{BOH}$$

mi fermo
con $n=2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(\sin x) + x^5}{x^3}$$

$$\frac{o(x^2)}{x^2} \cdot \frac{1}{x} \rightarrow 0 \cdot \infty$$