

MAT 1 TLC

Derivate successive

f''

$$\frac{d^2 f}{dx^2}$$

f'''

$$\frac{d^3 f}{dx^3}$$

$f^{(4)}$

$$\frac{d^4 f}{dx^4}$$

$$\frac{d^{127} f}{dx^{127}}$$

ORA 25

$$f'' = (f')'$$

derivata SECONDA

$$f''' = (f'')'$$

...

$f^{(k)}$

FINE
CORSO

Derivata
127-esima



$f^{(127)}$

$f^{(k)}$

TEOREMA DI DE L'HÔPITAL

Supponiamo di voler calcolare $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ ($x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$)

Supponiamo che

(i) un po' di burocrazia...

$\rightarrow g(x) \neq 0$ vicino a x_0 (tranne al + in x_0)
 $\rightarrow f'(x)$ e $g'(x)$ devono esistere
 $\rightarrow g'(x) \neq 0$ bla bla...

(ii) il limite sia del tipo

$\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

(iii) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

(ESCLUSO QUINDI IL TIPO ④)

Allora $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$

Esempio 1

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{x}$$

NO: non è una
forma indeterminata

Applico De L'Hôpital $= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{1} = 0$

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

Infatti $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{x} = +\infty$

NO: il limite è $\frac{\infty}{\infty}$, ma

Esempio 2

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sin x}{x}$$

$\lim \frac{f'}{g'}$ N.E.. Allora
BOH.

Applico De L'Hôpital $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \cos x}{1} = \text{N.E.}$

Non si
può

applicare

dunque non esiste il limite iniziale

Infatti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{\sin x}{x} \right) = 2$$



Esempio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \xrightarrow{\text{H\ddot{o}p}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

Ho usato che la derivata di $\sin x$ è $\cos x$, ma per dimostrare, se questo si era usato quello stesso limite.

Esempio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x + x^5}{x^3}$$

[$\frac{0}{0}$ uso Hôp.]

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + 5x^4}{3x^2}$$

[$\frac{0}{0}$ uso Hôp.]

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 20x^3}{6x}$$

[$\frac{0}{0}$ uso Hôp.]

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 60x^2}{6} = \frac{1}{6}$$

Risultando, il limite
originario è $\frac{1}{6}$

Altro
modo:

$$\frac{x - \sin x + x^5}{x^3}$$

=

$$\frac{x \left(1 - \frac{\sin x}{x} + x^4 \right)}{x^3}$$

$$= \frac{\cancel{x} (\cancel{1} - \cancel{1} + x^4)}{x^{\cancel{3}2}}$$

$$= \frac{x^4}{x^2} = x^2 \rightarrow 0$$

NO!!!!

LIMITE METÀ
PER VOLTA

Utilità pratica di De L'Hôpital
per il calcolo dei limiti:

3%

Esempi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{x} = 0 \quad \left[\frac{0}{+\infty} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) = \infty \cdot 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} \quad \left[\frac{0}{0} : \text{H\^opital} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{\frac{1}{1+x^2}}}{\cancel{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$$

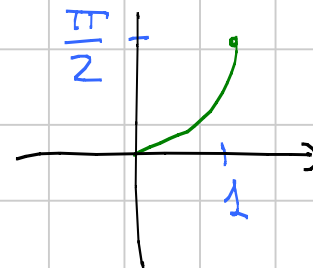
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{\pi}{2} - \arctan n \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)$$

↑
 Applico criterio
 funzioni $\rightarrow$ succ.
 (pongo $x = n$,
 quando $n \rightarrow +\infty$,
 anche $x \rightarrow +\infty$)

|| Hôp
 1

Esempio

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{x - 1}$$



$\frac{0}{0}$: Hôp

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{\sqrt{1-x}} = \sqrt{2} \quad \left[\frac{0}{0} \Rightarrow \text{H\^op} \right]$$

N.B. Quando $x \rightarrow 1^-$, questo è > 0

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\cancel{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}}{\cancel{\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}} =$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{1-x})' &= ((1-x)^{1/2})' \\ &= \frac{1}{2} (1-x)^{-1/2} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Der. di} \\ 1-x}}{(-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2\sqrt{\frac{1-x}{1-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2\sqrt{\frac{\cancel{1-x}}{(1+x)(\cancel{1-x})}} \\ &= 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^{n!} - (n!)^3$$

$$3^{n!} - (n!)^3 = \boxed{3^{n!}} \left(1 - \frac{(n!)^3}{3^{n!}} \right) \rightarrow +\infty$$

$\downarrow +\infty$ $\downarrow 0$ DA DIMOSTRARE

DISUG. UTILE

$$n! \leq 3^n$$

$n \cdot (n-1) \cdot \dots$

$n \cdot n \cdot \dots \cdot n$

$$\frac{1}{3^{n!} - n^2}$$

$$0 \ll \frac{(n!)^3}{3^{n!}} \ll \frac{(n^3)^3}{3^{n!}} = \frac{3^{n^2}}{3^{n!}}$$