

MAT 1 TLC

ORA 24

Titolo nota

19/10/2006

Derivabilità $\Rightarrow$ continuità
 $\nLeftarrow$

Derivata della funzione inversa (con esempi)
— o —

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile in un p.to x_0 .
Allora f è continua in x_0 .

Hp esiste $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ ed è $\in \mathbb{R}$

Tesi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, oppure equivalentemente

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$$

Pongo $x - x_0 = h$. Quando $x \rightarrow x_0$, ho che $h \rightarrow 0$ ($x = x_0 + h$)

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \boxed{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}} \cdot \boxed{h} = 0$$

$\downarrow$
 $f'(x_0)$

$\downarrow$
 0

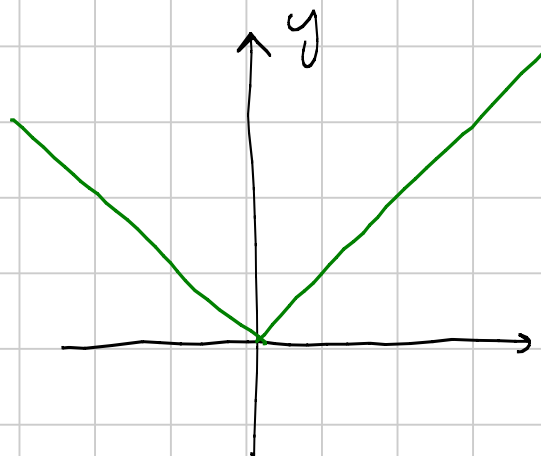
$\cdot$

— 0 — 0 —

f continua in $x_0 \stackrel{?}{\Rightarrow} f$ è derivabile in x_0
NO

Esempio $f(x) = |x|$

$x_0 = 0$. Per calcolare $f'(0)$,
devo calcolare



NON
ESISTE

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| - |0|}{h} = \boxed{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}} = 1$$

Quando $h \rightarrow 0^-$, si ha che $h < 0$.
Dunque $|h| = -h$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}} = -1$$

Conclusione $f(x) = |x|$ è continua in $x_0 = 0$, ma non derivabile in $x_0 = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ \text{N.E.} & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{|x|}{x}$$

Esempio $f(x) = |\sin x^3|$ $x_0 = 0$

Esiste $f'(0)$??

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\sin h^3| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\sin h^3|}{h}$$

$$\frac{|\sin R^3|}{R} \rightarrow 0$$

Fatto generale :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = 0$$

Usando il fatto generale
per dimostrare che

TABELLINA

$$\frac{|\sin R^3|}{R} \rightarrow 0 \quad \text{mi basta dimostrare che} \quad \left| \frac{|\sin R^3|}{R} \right| \rightarrow 0$$

$$\left| \frac{|\sin R^3|}{R} \right| = \left| \frac{\sin R^3}{R} \right| = \left| \underbrace{\frac{\sin R^3}{R^3}}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{R^2}_{\downarrow 0} \right| \rightarrow |0| = 0$$

Esempio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} \sin \frac{1}{x^2} = 0 \quad \frac{0}{0} \text{ N.E.}$$

Uso il criterio di prima, Dico che il lim è 0. Per dim.
mi basta far vedere che $\lim | \cdot | = 0$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\cos x - 1}{x} \sin \frac{1}{x^2} \right| \\ & \leq \left| \frac{\cos x - 1}{x} \right| \cdot \left| \sin \frac{1}{x^2} \right| \leq \left| \frac{\cos x - 1}{x} \right| = \left| \frac{\cos x - 1}{x^2} \cdot x \right| \\ & \leq \left| \frac{\cos x - 1}{x^2} \right| \cdot |x| \leq \frac{1}{2} \cdot |x| \leq |x| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Diagram illustrating the limit process with annotations:

- The expression $\left| \frac{\cos x - 1}{x} \sin \frac{1}{x^2} \right|$ is shown at the top.
- Below it, the inequality $\leq \left| \frac{\cos x - 1}{x} \right| \cdot \left| \sin \frac{1}{x^2} \right|$ is shown, with a blue box around the product and a blue arrow pointing to 0.
- Next, the inequality $\leq \left| \frac{\cos x - 1}{x} \right|$ is shown, with a blue box around the fraction and a blue arrow pointing to 0.
- Finally, the expression $\left| \frac{\cos x - 1}{x^2} \cdot x \right|$ is shown, with a blue box around the fraction and a blue arrow pointing to 0, and another blue box around the x term and a blue arrow pointing to 0.

Derivata Funzione inversa

Sia f una funzione e sia g la sua inversa. Allora

$$g(f(x)) = x$$

$\forall x \in$ insieme di partenza
di f

$$f(g(x)) = x$$

$\forall x \in$ insieme di partenza di g
= insieme di arrivo di f

Prendiamo $x_0 \in \mathbb{R}$ e supponiamo di poter derivare f e g

$$f(g(x)) = x$$

Derivando...

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1$$

Quindi

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

FORMULA RICAIVATA SUPPONENDO
CHE f e g siano DERIVABILI

e $f'(g(x)) \neq 0$

Applicazioni :

$$\boxed{1} \quad f(x) = \tan x \quad g(x) = \arctan x$$

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x$$

$$g'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(g(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)}$$

Uso
FORMULA
DATA

$$= \frac{1}{1 + x^2}$$

Nessun problema
di annullamento
del den.

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{2} \quad f(x) = e^x, \quad f'(x) = e^x \quad g(x) = \log x$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{e^{g(x)}} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}$$

NESSUN PROBLEMA PER $x > 0$
 dove $\log$ è definito

$$\boxed{3} \quad f(x) = \sin x, \quad f'(x) = \cos x, \quad g(x) = \arcsin x$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\cos(g(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

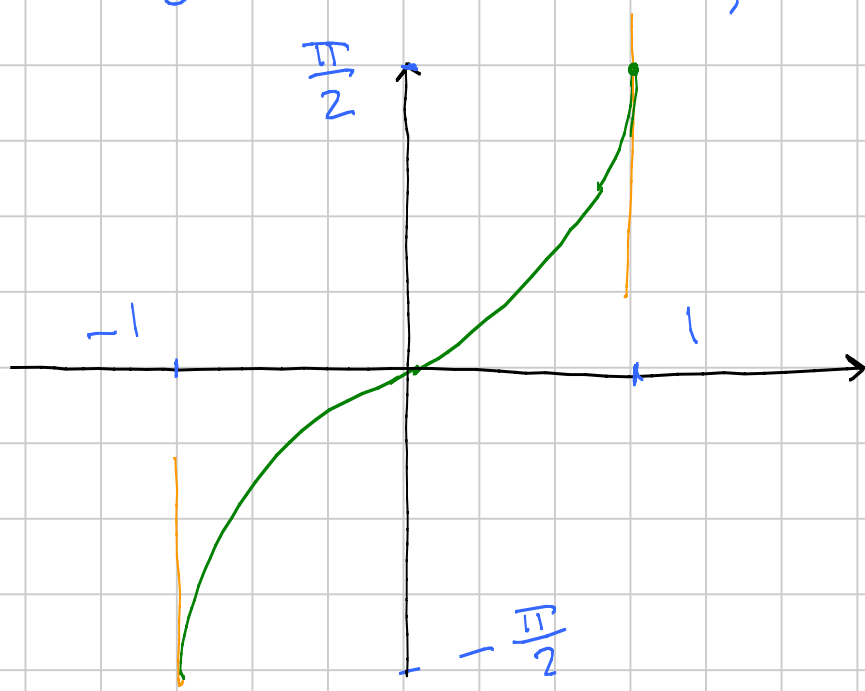
↑
 vale solo se $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(g(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

Problemi per $x < -1$ e $x > 1$,
 ma già sappiamo che $x \in [-1, 1]$

Ho usato la formula con $\alpha = g(x) = \arcsin x$ e questo, per definizione, spunta valori in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

I problemi ci sono per $x = \pm 1$. In quei punti $\arcsin x$ è definito e continuo, ma non derivabile.



Geometricamente: la tg. al grafico in $x=1$ e $x=-1$ è verticale.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$$

Es. Fare
stessa cosa
con $\cos x$
 $\arccos x$