

MAT 1 TLC

ORA 21

Titolo nota

18/10/2006

Derivata e differenziale in una variabile

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

Fissiamo $h \neq 0$ (incremento)

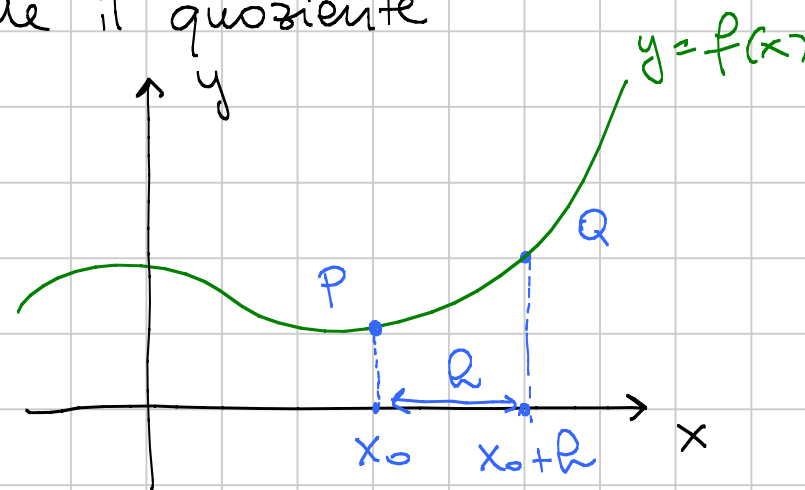
Def. Si dice rapporto incrementale il quoziente

corrisp.

$$\text{Incremento } y \rightarrow \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$\text{Incremento della } x \rightarrow h$$

$$P: (x_0, f(x_0)), \quad Q: (x_0+h, f(x_0+h))$$



Geometricamente il rapporto incrementale è il coeff. angol. della retta passante per P e Q.

Def. f si dice DERIVABILE in x_0 se esiste il limite del rapp. increm. per $h \rightarrow 0$, cioè se esiste ed è $\in \mathbb{R}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Il valore del limite si dice DERIVATA di f in x_0 e si indica in uno dei seguenti modi

$$f'(x_0)$$

$$\frac{df}{dx}(x_0)$$

$$\dot{f}(x_0)$$

Geometricamente, quando $h \rightarrow 0$, il punto Q tende al punto P e la retta PQ tende a diventare la retta tangente al grafico nel punto P.

Rapporto incrementale $\longrightarrow f'(x_0)$
 $\parallel \qquad \qquad \parallel$

Coeff. ang. retta PQ

Coeff. ang. retta tg.

retta PQ $\longrightarrow$ retta tangente in P
 $\text{---} \circ \text{---} \circ \text{---}$

Def. f si dice DIFFERENZIABILE in x_0 se esiste un numero $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha h + o(h) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

Teorema f è differenziabile in $x_0 \Leftrightarrow f$ è derivabile in x_0 .
Inoltre $\alpha = f'(x_0)$.

Dim che se f è differenziabile, allora f è derivabile

Hp f diff., cioè $f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha h + o(h)$ per $h \rightarrow 0$

Tesi f deriv., cioè esiste lim. del rapp. increment.

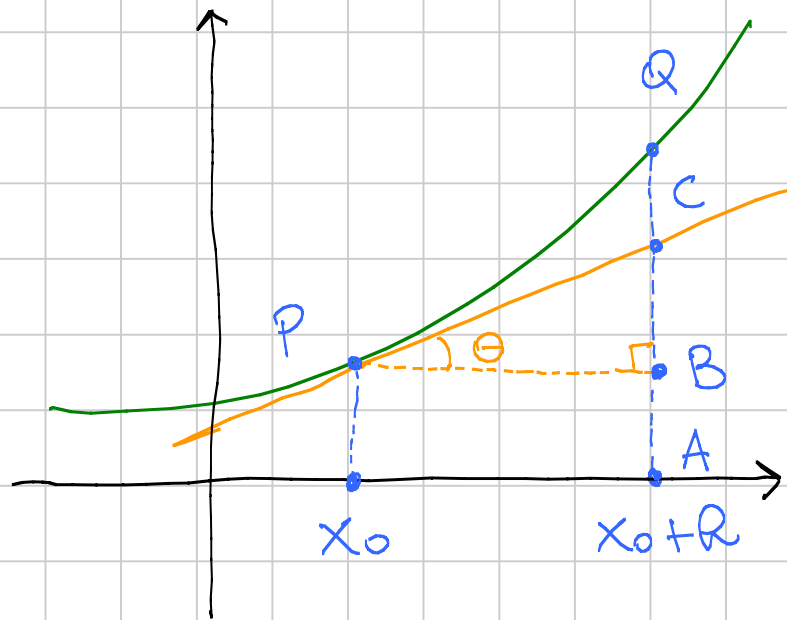
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{f(x_0)} + \alpha h + o(h) - \cancel{f(x_0)}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\alpha + \frac{o(h)}{h} \right) = \alpha = f'(x_0)$$

$\downarrow$
0

L'altra implicazione si dimostra allo stesso modo.

— o — o —



Per trigonometria elementare

$$\frac{CB}{PB} = \tan \theta = \text{coeff. ang. retta tg} \\ = f'(x_0)$$

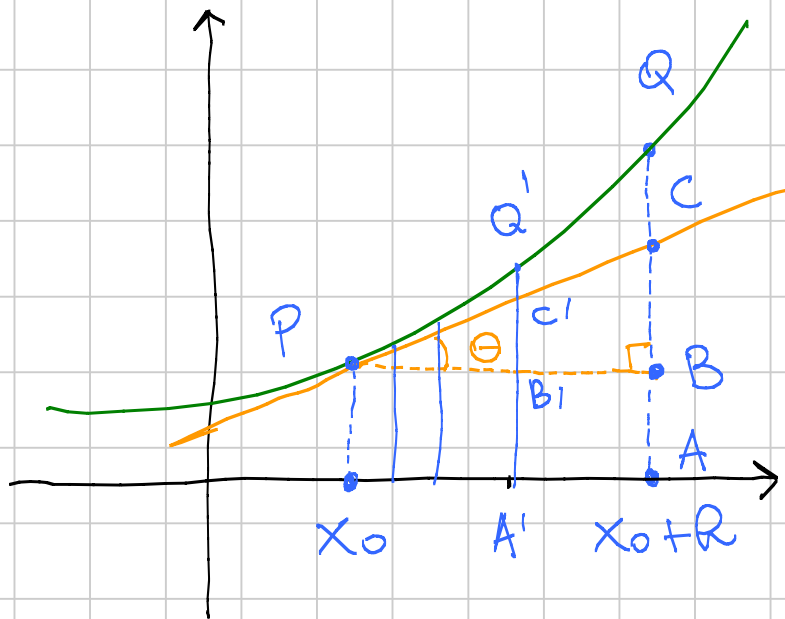
$$CB = f'(x_0) \cdot PB = f'(x_0) \cdot R$$

$$AQ = AB + BC + CQ$$

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + R \cdot f'(x_0) + \boxed{o(R)} \\ ???$$

Facciamo $R \rightarrow 0$, Il pezzo AB non cambia. Il pezzo BC tende a zero in maniera proporzionale ad R (linearmente in R).

Il pezzo CA tende a zero più velocemente di R , e dunque il terzo pezzo è $o(R)$.



Equazione retta tangente.

È una retta che passa per $P(x_0, f(x_0))$ e ha coeff. ang. $f'(x_0)$

$$y - f(x_0) = f'(x_0) (x - x_0)$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Se $x - x_0$ lo chiamiamo h :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)h$$

↑ ↑
primi 2 pezzi dello
sviluppo precedente

Interpretazione geometrica; la retta tangente è quella retta che approssima il grafico per x vicini ad x_0 con un errore che è $o(x - x_0)$.

Teorema Se f e g sono deriv. in x_0 , allora $(f+g)$ è deriv. in x_0 e

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Dim. Per ipotesi sappiamo

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0) + f'(x_0)h + o(h) \Leftrightarrow f \text{ deriv.} \\ g(x_0+h) &= g(x_0) + g'(x_0)h + o(h) \Leftrightarrow g \text{ deriv.} \end{aligned}$$

Sommiamo

$$(f(x_0+h) + g(x_0+h)) = (f(x_0) + g(x_0)) + (f'(x_0) + g'(x_0))h + o(h)$$

Se chiamo $s(x) = f(x) + g(x)$

$$s(x_0+h) = s(x_0) + \overset{s'(x_0)}{(f'(x_0) + g'(x_0))}h + o(h)$$

Del tutto analogo il caso della differenza e anche del prodotto di una funzione per una costante.

$f(x), g(x)$. Chiamiamo $p(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$p(x_0 + h) = f(x_0 + h) \cdot g(x_0 + h)$$

$$= (f(x_0) + h f'(x_0) + o(h)) \cdot (g(x_0) + h g'(x_0) + o(h))$$

$$= f(x_0) \cdot g(x_0) +$$

$$+ h f(x_0) g'(x_0) + h f'(x_0) g(x_0)$$

$$+ \underbrace{f(x_0) \cdot o(h)}_{+ \dots} + \underbrace{h^2 f'(x_0) g'(x_0)}_{+ \dots} + \underbrace{h f'(x_0) \cdot o(h)}_{+ \dots}$$

$$= p(x_0) + R \underbrace{[f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)]}_{p'(x_0)} + o(R)$$