

MAT 1 TLC

Titolo nota

ORA 19

17/10/2006

o piccolo

Def. Siano f e g due funzioni $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Diciamo che f è o piccolo di g per $x \rightarrow x_0$ (e scriviamo

$$f = o(g) \quad \text{per } x \rightarrow x_0)$$

se esiste una funzione $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & f(x) = g(x) \cdot \omega(x) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \\ \text{(ii)} \quad & \lim_{x \rightarrow x_0} \omega(x) = 0 \end{aligned}$$

$f = g \cdot$
funzione
che tende
a zero

Definizione quasi equivalente

Supponiamo di poter dividere per $g(x)$, cioè che $g(x) \neq 0$ almeno per $x \neq x_0$

Allora

(i) si riscrive come $w(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

(ii) si riscrive come $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Oss. Supponiamo per un momento che f e g tendano a 0 per $x \rightarrow x_0$. Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

sarebbe una forma $\frac{0}{0}$.

La (ii) ci dice che f "batte g ".

Quindi, detto brutalmente, $f = o(g)$ per $x \rightarrow x_0$ vuol dire
" f tende a zero $\uparrow$ + velocemente di g per $x \rightarrow x_0$ "

perché in realtà non è detto che f e g tendano
a zero, e non è detto che si possa dividere per g .

Esempi $\boxed{1}$ $x^3 = o(x)$ per $x \rightarrow 0$ VERA

$\uparrow$ $\uparrow$
" "
 $f(x)$ $g(x)$

Devo poter scrivere

$$f(x) = g(x) \cdot w(x) \quad \text{con} \quad \lim_{x \rightarrow 0} w(x) = 0$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 $x^3 = x \cdot x^2$ $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

$\boxed{2}$ $x^2 = o(\sin x)$ per $x \rightarrow 0$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $f(x)$ $g(x)$

$$f(x) = g(x) \cdot w(x)$$

$$x^2 = \sin x \cdot \frac{x^2}{\sin x}$$

definita almeno per
x vicini a 0 e diversi
da 0

Calcolo

$$\lim_{x \rightarrow 0} w(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \boxed{x} \cdot \boxed{\frac{x}{\sin x}} = 0$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 0 1

[3]

$$\sin x = o\left(\frac{1}{x}\right)$$

per $x \rightarrow 0$?

SI, VERA

$$f(x) = g(x) \cdot w(x)$$

$$\sin x = \frac{1}{x} \cdot x \sin x$$

N.B. $g(x)$ non tende a
zero per $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} w(x) = 0 \cdot 0$$

Operazioni algebriche su o piccolo.

Supponiamo che $f_1 = o(g)$ per $x \rightarrow x_0$

$f_2 = o(g)$ per $x \rightarrow x_0$

Cosa possiamo dire di $f_1 \pm f_2$, λf_1 , $f_1 \cdot f_2$, $\frac{f_1}{f_2}$, ...

$\downarrow$
 $o(g) \pm o(g)$

$\downarrow$
 $o(g) \cdot o(g)$

Hp. $f_1(x) = g(x) \cdot \omega_1(x)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \omega_1(x) = 0$$

$$f_2(x) = g(x) \cdot \omega_2(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \omega_2(x) = 0$$

$$f_1(x) + f_2(x) = g(x) \underbrace{\{\omega_1(x) + \omega_2(x)\}}_{\omega_3(x)} = g(x) \omega_3(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \omega_3(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\omega_1(x) + \omega_2(x)) = 0 + 0 = 0$$

Conclusione $f_1 + f_2 = o(g)$. Allo stesso modo $f_1 - f_2 = o(g)$
 $o(g) + o(g) = o(g)$ $o(g) - o(g) = o(g)$

$$\begin{aligned} f_1(x) \cdot f_2(x) &= g(x) \omega_1(x) \cdot g(x) \cdot \omega_2(x) \\ &= g^2(x) \underbrace{\omega_1(x) \cdot \omega_2(x)}_{\omega_3(x)} = g^2(x) \cdot \omega_3(x) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \omega_3(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\omega_1(x) \cdot \omega_2(x)) = 0 \cdot 0 = 0$$

Conclusione $f_1 \cdot f_2 = o(g^2)$ $o(g) \cdot o(g) = o(g^2)$

Dato un numero $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda f_1(x) = \lambda g(x) \omega_1(x) = g(x) \underbrace{\lambda \omega_1(x)}_{\omega_3(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \omega_3(x) = \lambda \cdot 0 = 0$$

Conseguenza $\lambda f_1 = o(g)$

$$\lambda o(g) = o(g)$$

Rapporto

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\cancel{g(x)} \omega_1(x)}{\cancel{g(x)} \omega_2(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\omega_1(x)}{\omega_2(x)} \text{ e' } \frac{0}{0}$$

$$\frac{o(g)}{o(g)} = \text{BOH !!!}$$

e non ci sono elementi
per decidere

Supponiamo che $f(x) = o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$.

Posso concludere che $f(x) = o(x)$ per $x \rightarrow 0$? S1

$$o(x^3) \Rightarrow o(x)$$

Hp $f(x) = x^3 \omega(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \omega(x) = 0$$

$$= x \underbrace{(x^2 \omega(x))}_{\omega_3(x)}$$

$$= x \cdot \omega_3(x)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \omega_3(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \omega(x) \\ &= 0 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

SVILUPPINI Limiti notevoli e o piccolo. Tutti per $x \rightarrow 0$

$$\sin x = x + o(x)$$

$$\cos x = 1 + o(x)$$

$$\tan x = x + o(x)$$

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

$$\log(1+x) = x + o(x)$$

$$\arctan x = x + o(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\sin x = x + o(x)$$

$$\underbrace{\sin x - x}_{f(x)} = \underbrace{o(x)}_{g(x)} \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$f(x) = g(x) \cdot \omega(x)$ oppure,
visto che posso dividere per $g(x)$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) = 1 - 1 = 0$$

$$e^x \approx 1 + x + o(x) \quad \text{vuol dire che} \quad e^x - 1 - x = o(x)$$

Dividendo per $g(x) = x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} - 1 \right) = 1 - 1 = 0$$

Per esercizio verificare le altre.

Oss. Supponiamo che $f(x) = o(x)$ per $x \rightarrow 0$.

$$\text{Cosa posso dire di } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{o(x)}}{\cancel{x}} = 0$$

$$\text{Brutalmente} \quad \frac{o(x)}{x} \rightarrow 0, \quad \frac{o(x^2)}{x^2} \rightarrow 0$$

Esempio

$$\sin x^2 = o(x)$$

VERA

$$f(x) = g(x) \cdot \omega(x)$$

$$\sin x^2 = x \cdot \frac{\sin x^2}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x^2}{x^2} \cdot \boxed{x} \right) = 0$$

$\downarrow$ $\downarrow$
0 0

Esempio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + e^x - \cos x + \arctan x^2}{\log(1+3x) - 5x} = -1$$

Per es:
 $o(3x) = o(x)$

$$= \frac{x + o(x) + \cancel{1} + x + o(x) - \cancel{1} - o(x) + o(x)}{3x + o(3x) - 5x} = \frac{2x + o(x)}{-2x + o(x)}$$
$$= \frac{\cancel{x} \left(2 + \frac{o(x)}{x} \right)}{\cancel{x} \left(-2 + \frac{o(x)}{x} \right)} \rightarrow \frac{2}{-2} = -1$$