

MAT 1 TLC

Titolo nota

ORA 17

14/10/2006

Strumenti per limiti di funzioni:

- * congruente a 2 e caratteristici
- * teoremi alg. (somma, prodotto, esponenziale): funziona tutto bene tranne nei casi

$$+\infty - \infty, 0 \cdot (\pm\infty), \frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, 0^0, 1^{\pm\infty}, (\pm\infty)^0$$

Inoltre: attenzione quando c'è 0 al denom. (0^+ , 0^-)

- * Il rapporto non ha molto senso per i limiti di funz.
- * La radice va bene, ma solo quando $x \rightarrow +\infty$.

LIMITI NOTEVOLI

PADRI: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

FIGLI: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$

NIPOTI: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a = \log_e a = \ln a$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

ALTRO FIGLIO $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Cambio di variabili nei limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{Dato per buono}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2}$$

Pongo $x^2 = y$. Quando $x \rightarrow 0$,
anche $y \rightarrow 0$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x}$$

Pongo $y = \sin x$. Quando $x \rightarrow 0$
anche $y \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\cos x)}{\cos x}$$

Pongo $y = \cos x$. Quando $x \rightarrow 0$, si ha
che $y \rightarrow 1 = \cos 0$

$$= \lim_{\boxed{y \rightarrow 1}} \frac{\sin y}{y} = \sin 1 \quad \left[\frac{\sin y}{y} \text{ è continua in } y=1 \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \boxed{\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}} \cdot \boxed{\frac{\sin x}{x}} = 1$$

$\downarrow$ FATTO PRIMA $\downarrow$ PADRE
 1 1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

$-1 \leq \sin x \leq 1$ Divido per $x > 0$

$$\boxed{-\frac{1}{x}} \leq \boxed{\frac{\sin x}{x}} \leq \boxed{\frac{1}{x}}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

stesso motivo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

Divido per $x < 0$
dunque giro i versi!

$$\boxed{-\frac{1}{x}} \geq \boxed{\frac{\cos x}{x}} \geq \boxed{\frac{1}{x}} \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x} \quad \text{N.E.}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{x} \quad \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{x} \quad \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$$

CRITERIO FUNZIONI $\rightarrow$ SUCC.

Le funzioni
imitano le
successioni

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

$\Leftrightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Pongo $\frac{1}{n} = x$. Quando $n \rightarrow +\infty$,
ho che $x \rightarrow 0$

Dico che è 1
quello iniziale

Se il limite di funzioni ottenuto dà un certo $l \in \mathbb{R}$, allora il limite di succ. iniziale è lo stesso l .

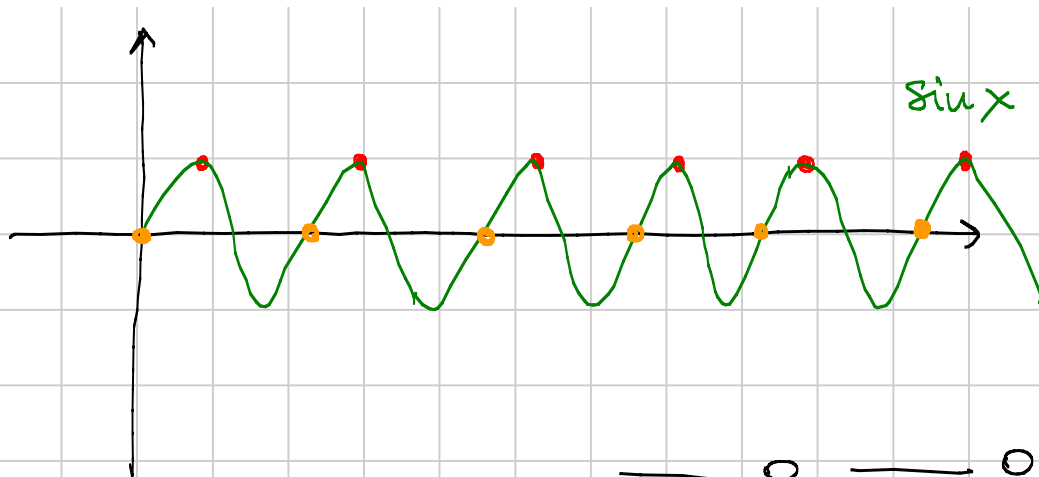
Se il limite di funzioni non esiste, NON SI PUÒ DIRE NULLA (il limite di succ. potrebbe esistere).

Esempio $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ N.E.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(2\pi n) =$ Pongo $x = 2\pi n$. Quando $n \rightarrow +\infty$, ho che $x \rightarrow +\infty$

$\overset{\circ}{=}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ $\nwarrow$ Questo non esiste, dunque l'uguaglianza non è detta

In fatti $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(2\pi n) = 0$ $\swarrow$ Tutti i termini della succ. sono $= 0$



$\sin(2\pi n)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$$

$\downarrow$ 1^2 $\downarrow$ $\frac{1}{2}$

Funzione
continua

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cdot \cos x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} =$$

Pongo $y = \arctan x$. Quando $x \rightarrow 0$,
ho che $y \rightarrow 0 = \arctan 0$.

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan y} = 1$$

Inoltre $x = \tan y$ (siamo nella zona
in cui si può fare)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} =$$

Pongo $y = \arcsin x$ ----

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Pongo $y = -x$. Quando $x \rightarrow -\infty$,
ho che $y \rightarrow +\infty$. Inoltre $x = -y$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^y =$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right) = e$$

Pongo
 $y-1 = z$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = e$$

Teo.
alg.

1