

LIMITI DI FUNZIONI

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

↑
solo su un
sottoinsieme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

Ciascuno di questi può avere 4 possibili comportamenti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} l \in \mathbb{R} \\ +\infty \\ -\infty \\ \text{NON ESISTE} \end{cases}$$

①

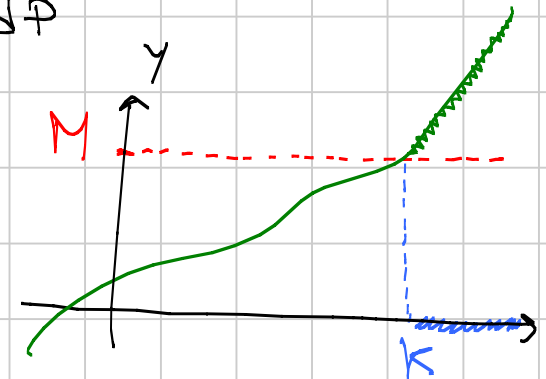
②

③

④ ← NdP

Def. di ② $\forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $\exists k \in \mathbb{R}$

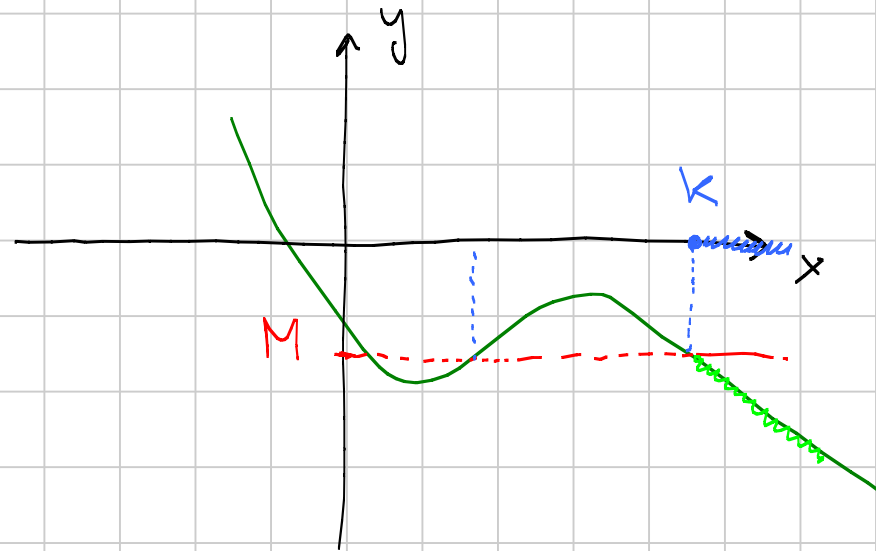
$$f(x) \geq M \quad \forall x \geq k$$



Def. di ③ $\forall M \in \mathbb{R} \exists k \in \mathbb{R}$

$$\text{b.c. } f(x) \leq M$$

$$\forall x \geq k$$



Def. di ① $\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|f(x) - l| \leq \varepsilon \quad \forall x \geq k$$

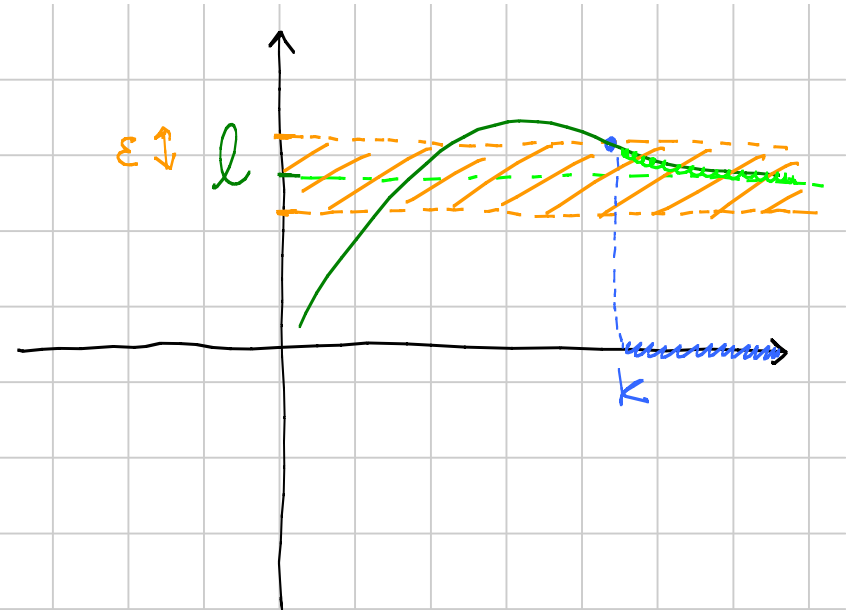
① bis $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l^+$

$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{R}$ t.c.

$$l < f(x) \leq l + \varepsilon \quad \forall x \geq k$$



IMPORTANTE



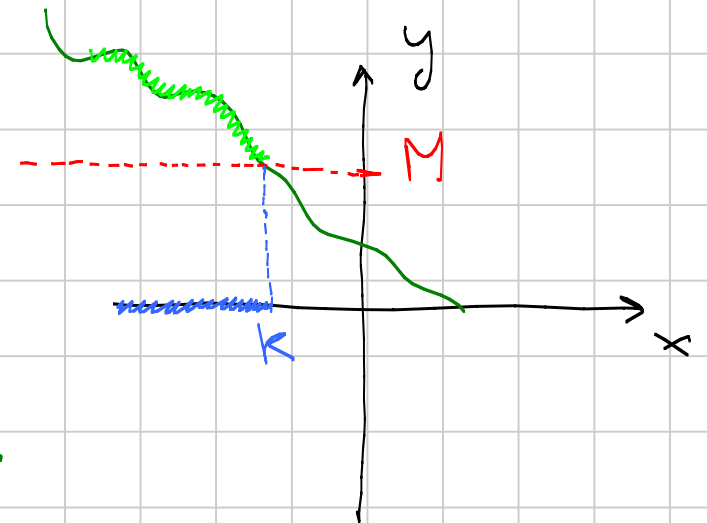
① ter $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l^-$: $\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{R}$ t.c.

$$l - \varepsilon \leq f(x) < l \quad \forall x \geq k$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \begin{cases} l \in \mathbb{R} & \textcircled{1} \\ +\infty & \textcircled{2} \\ -\infty & \textcircled{3} \\ \text{NON ESISTE} & \textcircled{4} \text{ N.d.P.} \end{cases}$$

Def. ② $\forall M \in \mathbb{R}$ (anche
 enorme) $\exists K \in \mathbb{R}$ t.c.

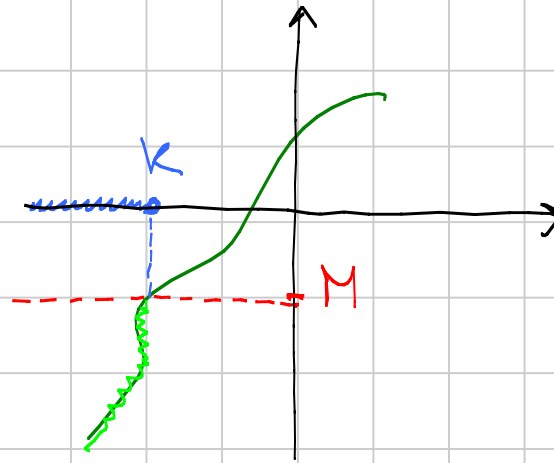
$$f(x) \geq M \quad \forall x \leq K$$



Def. ③ $\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorm.
 negat.)

$\exists K \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x) \leq M \quad \forall x \leq K$$



Def. ① $\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a zero)

$\exists k \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|f(x) - l| \leq \varepsilon \quad \forall x \leq k$$



Idem per $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l^+, l^-$

— 0 — 0 —

Sia ora $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \begin{cases} l \in \mathbb{R} \quad (l^+, l^-) & \textcircled{1} \\ +\infty & \textcircled{2} \\ -\infty & \textcircled{3} \\ \text{NON ESISTE} & \textcircled{4} \end{cases} \quad \text{NAP}$$

Def. di ② $\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)

$\exists \delta > 0$ b.c.

$$f(x) \geq M$$

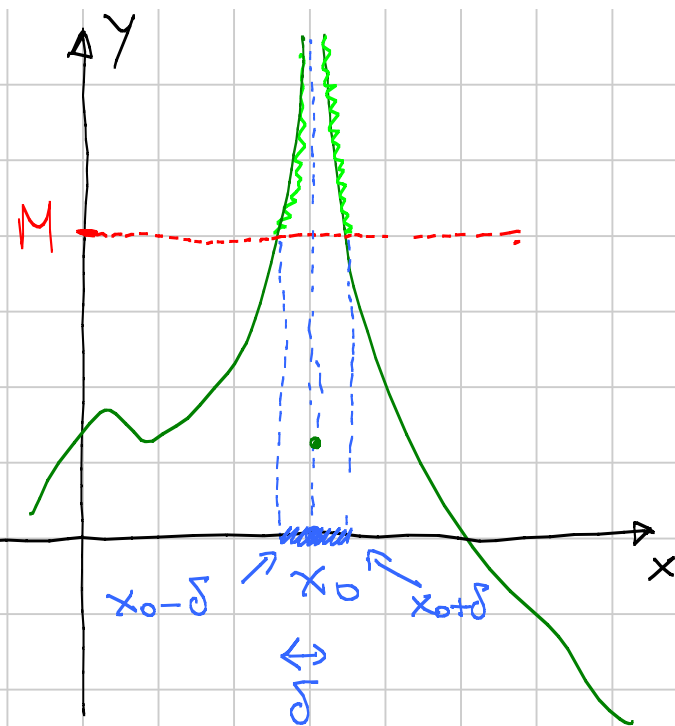
$$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$$

intervallo meno il
punto x_0

Il limite guarda cosa accade
per x vicino ad x_0 e se ne

frega di quello che accade in $x = x_0$

in questo punto f
potrebbe anche non
essere definita.

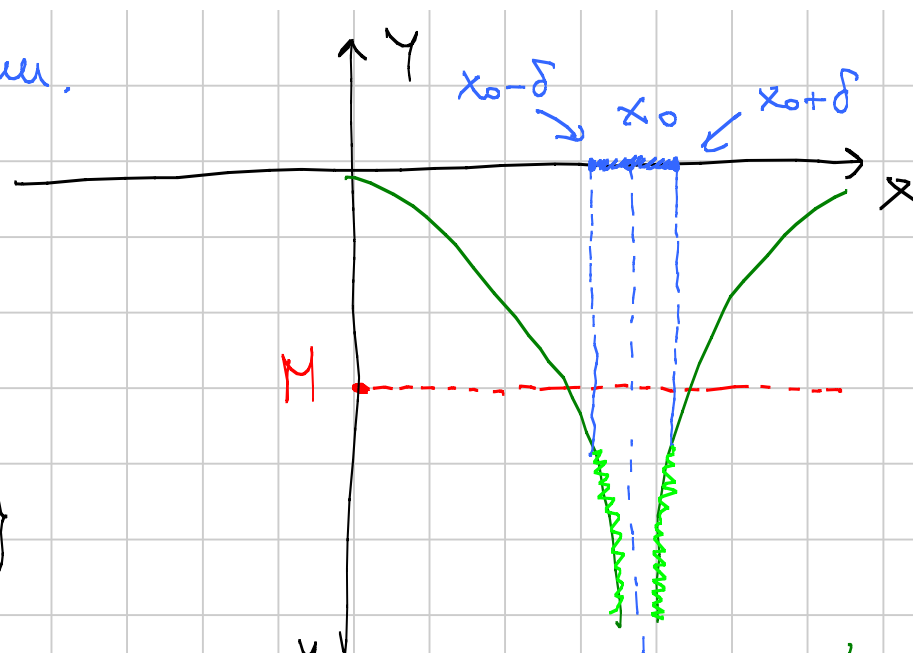


Def. di ③ $\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorm. neg.)

$\exists \delta > 0$ t.c.

$$f(x) \leq M$$

$$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$$

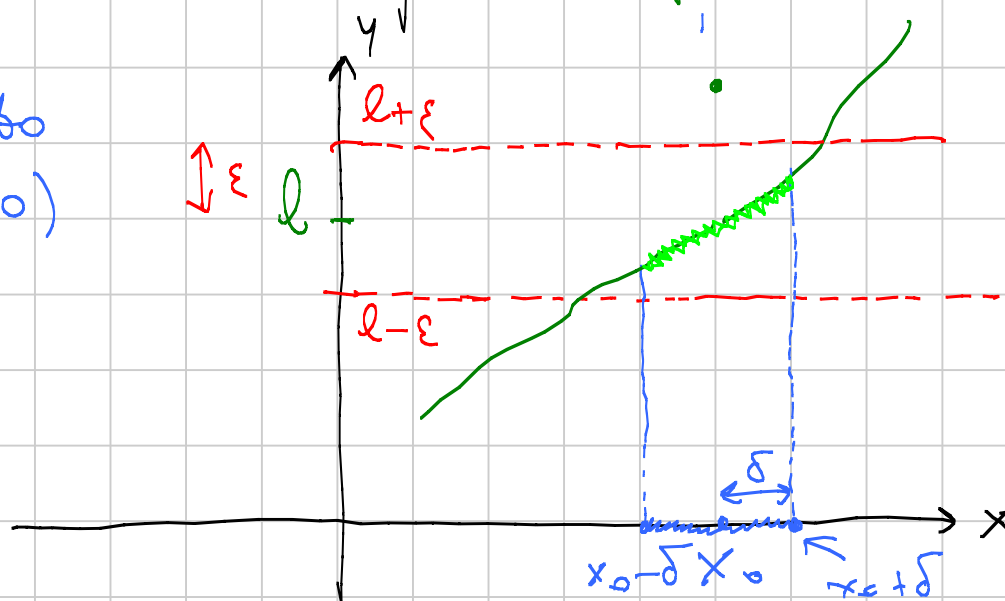


Def. di ① $\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a zero)

$\exists \delta > 0$ t.c.

$$|f(x) - l| \leq \varepsilon$$

$$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \dots$$

Le disuguaglianze richieste su $f(x)$ devono valere

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta]$$

↑
escludere il p.to x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \dots$$

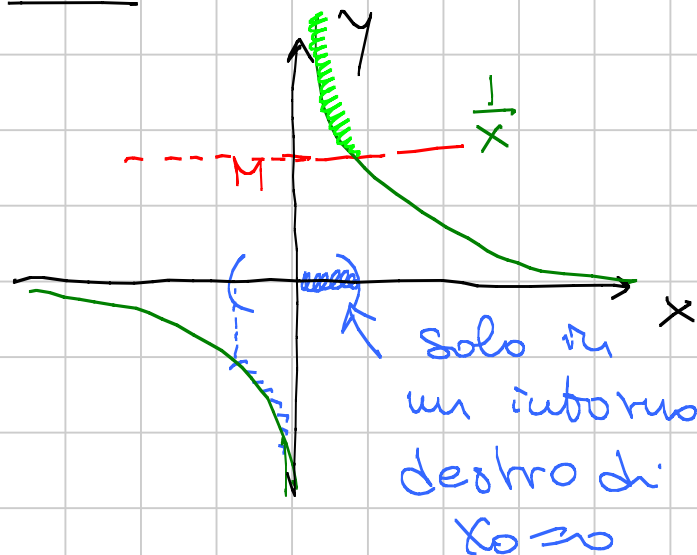
$$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0)$$

— 0 — 0 —

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ NON ESISTE}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$



DEF. Se succede che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

(cioè il valore in $x = x_0$ è quello che vorrebbe essere guardando gli x vicini a x_0)

si dice che $f(x)$ è CONTINUA nel p.to x_0

TEOREMA Ogni funzione ottenuta a partire dalle funzioni
usando op. alg. e/o composizioni,

elementari (quelle presentate) è CONTINUA in tutti i punti

in cui non presenta problemi burocratici (denomin. $\neq 0$,

radici di roba ≤ 0 , log di roba ≤ 0 , ...)

Esempio.

$\lim_{x \rightarrow 1}$

$$\frac{\overset{f(x)}{\arctan((x-1)3^x) + x^2 - 6}}{\sin(x-1) + 2^x} = -\frac{5}{2}$$

Questa funzione NON ha
nessun tipo di problema in
 $x=1$. Quindi è continua,
dunque il limite è $f(1)$