

MAT 1 TLC

ORA 15

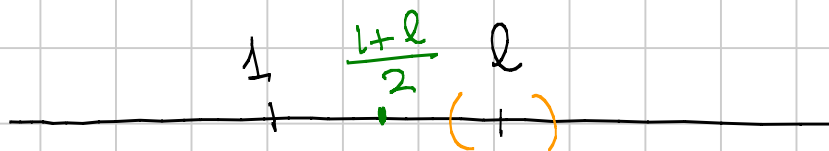
Titolo nota

12/10/2006

Giustificazione criterio radice

1° caso

$$\left. \begin{array}{l} \text{Hp} \\ a_n \geq 0 \\ \sqrt[n]{a_n} \rightarrow l > 1 \end{array} \right\} \text{ Tesi } a_n \rightarrow +\infty$$



$\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$, ma allora $\sqrt[n]{a_n} \geq \frac{1+l}{2}$ definitivamente,

ma allora elevando alla n -esima

confronto
a 2

$$a_n \geq \left(\frac{1+l}{2} \right)^n$$

espon,
con base
> 1

Diagram showing two arrows pointing downwards from the circled terms a_n and $\left(\frac{1+l}{2} \right)^n$ to $+\infty$.

2° caso

Hp

$$a_n \geq 0$$

Tesi

$$a_n \rightarrow 0$$

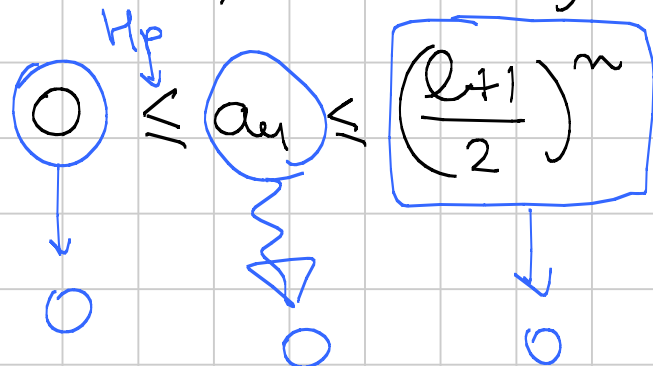
$$\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l < 1$$

$$l \quad \frac{l+1}{2} \quad 1$$

$$\frac{l+1}{2} < 1$$

Se $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l < 1$, allora defiu.

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{l+1}{2}, \text{ quindi}$$



esponenb.
con base < 1

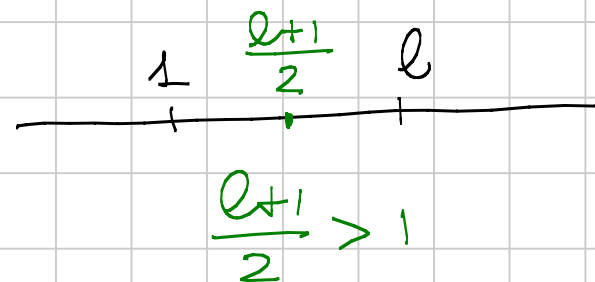
Carab.

— 0 — 0 —

"DIM" CRITERIO RAPPORTO

1° caso Hp $a_n > 0$
 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l > 1$

Tesi: $a_n \rightarrow +\infty$



Se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l > 1$, allora

definitiv.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{l+1}{2}$$



Questa vale solo definit.
Facciamo finta che valga
sempre

$$\frac{a_1}{a_0} \geq \frac{l+1}{2}, \quad a_1 \geq \frac{l+1}{2} a_0$$

$$\frac{a_2}{a_1} \geq \frac{l+1}{2}, \quad a_2 \geq \frac{l+1}{2} a_1 \geq \left(\frac{l+1}{2}\right)^2 a_0$$

$$\frac{a_3}{a_2} \geq \frac{l+1}{2}, \quad a_3 \geq \frac{l+1}{2} a_2 \geq \left(\frac{l+1}{2}\right)^3 a_0$$

In questo modo si dimostra (per induzione: FARLA FORM.)

che

$$a_{n+1} \geq \left(\frac{l+1}{2} \right)^n a_0$$

$\downarrow$ $+\infty$ $\downarrow$ $+\infty \cdot a_0 = +\infty$
 > 0

Stessa cosa (fare per esercizio) succede nel 2° caso ($l < 1$)

Se invece di avere $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{l+1}{2}$ sempre abbiamo che

è vero solo per $n \geq n_0$, allora vorrà dire che l'induzione deve partire da $n = n_0$ e si dim. una disug.

$$a_n \geq \left(\frac{l+1}{2} \right)^{n-n_0} a_{n_0} \quad \forall n \geq n_0$$

SUCCESIONI MONOTONE

Una successione a_n si dice

* DEB. CRESC.	se	$a_{n+1} \geq a_n$	$\forall n \in \mathbb{N}$	$m > n \Rightarrow a_m \geq a_n$
* STRETT. CRESC.	se	$a_{n+1} > a_n$	$\forall n \in \mathbb{N}$	$m > n \Rightarrow a_m > a_n$
* DEB. DECR.	se	$a_{n+1} \leq a_n$	$\forall n \in \mathbb{N}$	$m > n \Rightarrow a_m \leq a_n$
* STRETT. DECR.	se	$a_{n+1} < a_n$	$\forall n \in \mathbb{N}$	$m > n \Rightarrow a_m < a_n$

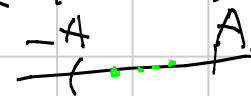
↔
equivalenti

a_n si dice limitata superiormente se $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

" " inferiormente " " $a_n \geq M$ "

" LIMITATA se valgono entrambe oppure (equiv.)

se $\exists A \in \mathbb{R}$ t.c. $|a_n| \leq A \quad \forall n \in \mathbb{N}$



[Teo. succ. MONOTONE] Sia a_n una succ. DEB. CRESC.
(se è STRETT, ancora meglio).

Allora ci sono solo 2 tipi di comportamento possibile

* $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

* $a_n \rightarrow +\infty$

sottoinsieme della retta
✓ costituito dai p.ti della succ.
(ELENCO)

Inoltre $l = \sup \{ a_n : n \in \mathbb{N} \}$

Se in aggiunta supponiamo che a_n sia LIMITATA SUPER,

allora di sicuro $l \in \mathbb{R}$,

Sia a_n una succ. DEB. DECR. (e è STRETT., ancora meglio)

Allora ci sono solo 2 possibili comport.

$$* a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$$

$$* a_n \rightarrow -\infty$$

$$\text{Inoltre } l = \inf \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Se in aggiunta supponiamo a_n LIMITATA INFERIORMENTE,

allora di sicuro $l \in \mathbb{R}$,

Dim. caso CRESCENTE

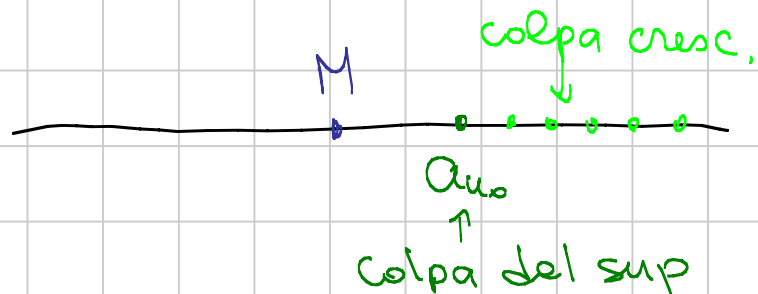
1° CASO

Hp: $\sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\} = +\infty$
an deb. cresc.

$\forall M \in \mathbb{R}$, esiste un el. della
succ. $\geq M$

cioè esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$a_{n_0} \geq M$$



Tesi: $a_n \rightarrow +\infty$



$\forall M \in \mathbb{R}$, $a_n \geq M$ definit.

Grazie al fatto che
 a_n è (deb.) cresc.

Se $a_{n_0} \geq M$, allora

$a_n \geq M \quad \forall n \geq n_0$,
cioè defn.

2° CASO

H_p a_n deb. cresc.

$$\sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\} = l < \mathbb{R}$$

$$a_n \leq l \text{ sempre}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a_{n_0} \geq l - \varepsilon$$

Quindi definitiv.

$$l - \varepsilon \leq a_n \leq l$$

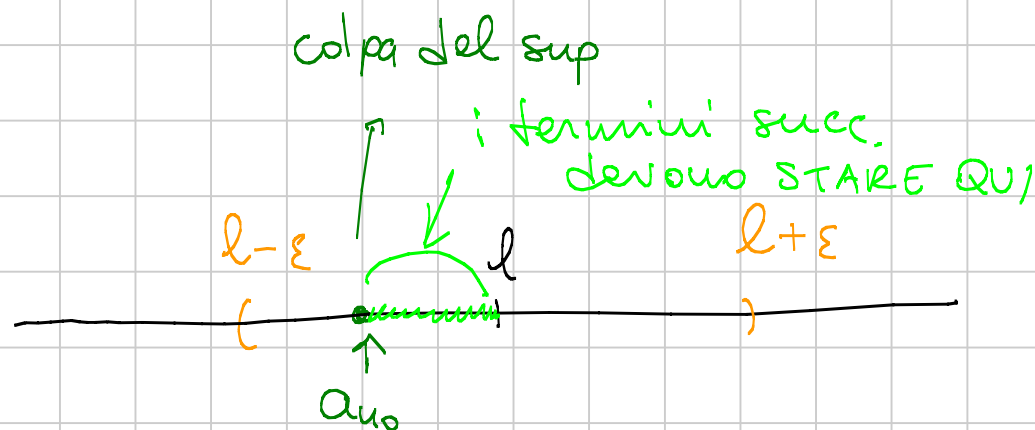
SE a_n STRETT. CRESC., allora

$$\uparrow a_n \rightarrow l^-$$

$$\text{Tesi } a_n \rightarrow l$$

$$\forall \varepsilon > 0, l - \varepsilon \leq a_n \leq l + \varepsilon$$

defin.



Oss. Non è detto che $a_n \rightarrow l^-$, perché per farlo occorre $a_n < l$ sempre. Essendo a_n solo DEB. CRESC. potrebbe anche essere $a_n = l$ SEMPRE