

MAT 1 TLC

ORA 14

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,71827 \dots$$

BISOGNA DIM. CHE ESISTE

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} = a_n \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$$

Rapporto:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} \\ &= \frac{\cancel{(n+1)} \cdot (n+1)^n}{\cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e = l > 1 \end{aligned}$$

Esempio

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{2^{n^2}} = 0$$

$\swarrow a_n$

Precorso

Radice

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^3}{2^{n^2}}} \stackrel{\checkmark}{=} \frac{n}{2^n} \rightarrow 0$$

perché già in
tabellina
 $l < 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty}$$

$$\sqrt[n]{n} \swarrow a_n$$

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}}$$

∞^0 indeterminata

RAPPORTO $\rightarrow$ RADICE : $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \rightarrow \text{stesso } l$

Basta calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \rightarrow 1, \text{ quindi anche } \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n} \rightarrow 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2n^2 + 27}$$

$$a_n = 2n^2 + 27$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(n+1)^2 + 27}{2n^2 + 27} = \frac{2n^2 + \dots}{2n^2 + \dots} \rightarrow 1$$

$$\text{quindi anche } \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{2n^2 + 27} \rightarrow 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\text{polinomio in } n} = 1$$

∞^0

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

$$a_n = n!$$

$$(n!)^{\frac{1}{n}} \quad \infty^0$$

RAPPORTO RADICE

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1) \cancel{n!}}{\cancel{n!}} = n+1 \rightarrow +\infty$$

Esempio $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n]{n^3}} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^3}}$$

$$a_n = \frac{n!}{n^3}$$

RAPPORTO $\rightarrow$ RADICE

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} \rightarrow \frac{1}{e}$$

(vedi alcune
schermate
precedenti)

Ma allora $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \rightarrow \frac{1}{e}$

— 0 — 0 — $\rightarrow$

Esempio 1 $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \rightarrow 0$

$$a_3 = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2}$$

$$a_5 = \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{10^2}$$

$$a_4 = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2}$$

$$\rightarrow a_4 \leq \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} = \frac{5}{4^2}$$

Il teo. algebrico della somma vale quando il numero di addendi è FISSO.

In questo caso il numero di addendi cresce di volta in volta.
Quindi il teo. non si applica.

$$0 \leq a_n \leq \overbrace{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2}}^{n+1}$$

Ho sostituito tutti gli addendi con il + grande

numero addendi

$$\begin{array}{ccc} \textcircled{0} & \leq & \textcircled{a_n} \leq \textcircled{(n+1) \cdot \frac{1}{n^2}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \textcircled{0} & & \textcircled{0} \end{array}$$

Esempio 2

$$a_n = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1}}}_0 + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}_0 + \dots + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2n}}}_0 \rightarrow 0$$

Noooooo!!!!!!

In questo caso $a_n \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} a_n &\geq \overbrace{\frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}}}^{n+1} \\ &= \frac{n+1}{\sqrt{2n}} = \frac{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{n}} = \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}}_{+\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{-} \end{aligned}$$

Sostituisco tutti
gli addendi con
il + piccolo

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$