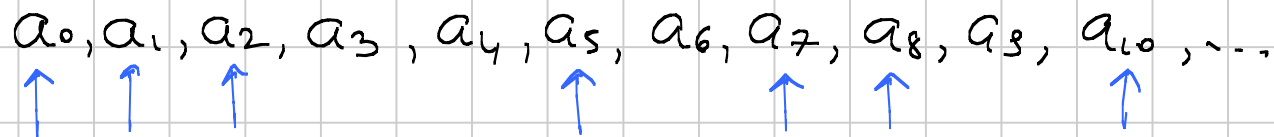


Successioni e sottosuccessioniSia data una succ.  $a_n$ . $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, \dots$   
Prendiamo una successione  $n_k$  di indici

$$n_0 = 0, n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 5, n_4 = 7, n_5 = 8, n_6 = 10$$

Costruisco ora la successione  $a_{n_k}$ : questa successione

~ "pesca" solo gli elementi  $a_i$  che ho deciso di prendere con gli indici  $n_k$ .  $a_{n_k}$  si dice sottosuccessione

2 scuole di pensiero

↗ gli indici  $u_k$  devono essere presi in modo strett. crescente

↘ gli indici  $u_k$  devono essere presi in modo che  $u_k \rightarrow +\infty$  (posso fermarmi e prendere + volte lo stesso elem. e posso anche formare indici)

Esempi di sottosucc.

$a_{2n}$  = sottosucc. costituita dai fermioni di indice pari  
 $a_0, a_2, a_4, a_6, a_8, \dots$

$a_{2n+1}$  = sottosucc. dei dispari :  $a_1, a_3, a_5, a_7, a_9, \dots$

$a_{3n}$  :  $a_0, a_3, a_6, a_9, a_{12}, \dots$

$$a_{n^2} : a_0, a_4, a_8, a_{16}, \dots$$

$$a_{n+8} = \text{tutti i termini con indice } \geq 8 : a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, \dots$$

↑ sottosucc. finita perché definitivamente prende tutti i termini  
OTTENUTA MEDIANTE SHIFT degli indici

Cosa lega il limite di una succ. al limite delle sottosucc.?

Teorema Sia  $a_n$  una succ., e sia  $a_{n_k}$  una s.succ.

Supponiamo che  $a_n \rightarrow l \in \overline{\mathbb{R}}$ . Allora  $a_{n_k} \rightarrow l$   
(stesso  $l$ ).

ACHTUNG! Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$  NON esiste, non si può dire nulla sul limite della sottosucc. (a seconda dei casi può esistere o non esistere).

UTILIZZO OPERATIVO DEL TEOREMA. Sia data una succ.  $a_n$ .

Supponiamo che esistano 2 sottosuccessioni

$$a_{n_k} \rightarrow l_1 \in \bar{\mathbb{R}}$$

con  $l_1 \neq l_2$ .

$$a_{m_k} \rightarrow l_2 \in \bar{\mathbb{R}}$$

Allora la succ.  $a_n$   
NON ha limite  
(cioè tipo ④)

Se  $a_n \rightarrow l \in \bar{\mathbb{R}}$ , allora tutte le s. succ. dovrebbero  $\rightarrow l$   
(stesso  $l$ )

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$$
$$a_{2m} = \text{succ pari} = (-1)^{2m} = 1 \rightarrow 1 = l_1$$

$$a_{2n+1} = \text{succ. dispari} = (-1)^{2n+1} = -1 \rightarrow -1 = l_2$$

$$Q_1 \neq Q_2 \Rightarrow \text{an NON HA LIMITE}$$

Esempio 2  $a_n = (2 + (-1)^n)^n$

NON  
ESISTE

$$a_{2n} = (2 + (-1)^{2n})^{2n} = (2 + 1)^{2n} = 3^{2n} \rightarrow +\infty \quad \text{DIVERST}$$

$$a_{2n+1} = (2 + (-1)^{2n+1})^{2n+1} = (2 - 1)^{2n+1} = 1^{2n+1} = 1 \rightarrow 1$$

Esempio 3

$$a_n = (3 + (-1)^n)^n \rightarrow +\infty$$

$$3 + (-1)^n \geq 2$$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

$$(3 + (-1)^n)^n \geq 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\rightarrow$   
 $+\infty$

$\rightarrow$   
 $+\infty$

Esempio 4

$$a_n = n^2 + (-1)^n n \rightarrow +\infty$$

$$n^2 + (-1)^n n \geq n^2 - n \quad n(n-1)$$

$\rightarrow$   
 $+\infty$

$\rightarrow$   
 $+\infty$

Esempio 5

$$a_n = (-1)^n n^2 + n$$

NON ESISTE

$$a_{2n} = (-1)^{2n} (2n)^2 + (2n) = 4n^2 + 2n \rightarrow +\infty$$

$$a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} (2n+1)^2 + (2n+1) = -(2n+1)^2 + (2n+1)$$

$$= -4n^2 - 4n - 1 + 2n + 1 = -4n^2 - 2n \rightarrow -\infty$$

Esempio 6

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0 \text{ visto prima.}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty}$$

$$\frac{n^{2000}}{2^n} \sim a_n$$

Criterio rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{2000}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^{2000}} = \left( \frac{n+1}{n} \right)^{2000} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \downarrow \quad l < 1$$

Il limite originario è 0.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^a}{b^n} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{per ogni } a \in \mathbb{R} \\ \text{per ogni } b > 1 \end{array}$$

Gli esponenziali (con base  $> 1$ ) battono le potenze

## Fattoriale vs esponenziale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{20^n}{n!} = 0$$

$\text{---} a_n$

Rapporto:  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{20^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{20^n}$

$$= \frac{20 \cdot \cancel{20^n}}{(n+1) \cdot \cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{20^n}} = \frac{20}{n+1} \rightarrow 0 \quad \text{!!}$$

$l < 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

FATTORIALE  
batte  
esponenziale