

MAT 1 TLC

ORA 12

Titolo nota

11/10/2006

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$$

1° modo : Devo dim. che $\forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $2^n \geq M$ definit.

$$2^n \geq M \begin{cases} \nearrow \text{se } M \leq 1 \text{ è vera } \forall n \in \mathbb{N} \\ \searrow \text{se } M \geq 1 \text{ è vera } \forall n \geq \log_2 M \end{cases} \rightarrow \text{cioè defn.}$$

2° modo : abbiamo dim. per induzione che

$$\begin{array}{ccc} \textcircled{2^n} & \geq & \textcircled{n+1} & \forall n \in \mathbb{N} \\ \text{confronto} & & & \\ \text{a 2} & & & \\ \downarrow & & \downarrow & \\ +\infty & & +\infty & \end{array}$$

Più in generale $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$ se $a > 1$

Dim.: Se $a > 1$, posso scriverlo nella forma $a = 1+x$ con $x > 0$

disug. di BERNOLLI, dim. per induzione

$$a^n = (1+x)^n \geq 1+nx$$

confronto a 2

$\rightarrow +\infty$

$\rightarrow +\infty$ (si usa che $x > 0$)

Se $0 < a < 1$, allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$

Se $a \in (0,1)$ posso scrivere
 $a = \frac{1}{b}$ con $b = \frac{1}{a} > 1$

$$a^n = \left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{1}{b^n} \rightarrow 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } 0 \leq a < 1 \end{cases} \leftarrow \begin{array}{l} \text{e' una succ.} \\ \text{di uni} \end{array}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty$$

Per induzione $n! \geq 2^n$ defin.
si conclude con confronto a 2.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2} = 1$$

Dim. abusiva: $\sqrt[n]{2} = 2^{\frac{1}{n}} \rightarrow 2^0 = 1$
Per il momento nessuno ci autorizza a
passare al limite negli esponenti

Disug. Bernoulli

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \text{Pongo } x = \frac{1}{n}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2 \quad \text{Estraggo } \sqrt[n]{}$$

$$1 \leftarrow 1 + \frac{1}{n} \geq \sqrt[n]{2} \geq 1$$

Dim. con Bernoulli

uso che $\sqrt[n]{x}$ è crescente
 $2 \geq 1 \Rightarrow \sqrt[n]{2} \geq \sqrt[n]{1} = 1$

Più in generale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{per ogni } a > 0$$

Teo. algebrico sull'esponenziale.

$$a_n \rightarrow l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$b_n \rightarrow l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$c_n = (a_n)^{b_n}$$

↖ Sesse come ipotesi che $a_n > 0$

Allora $C_n \rightarrow (l_1)^{l_2}$ TRANNE nei casi

0^0 ∞^0 1^∞

N.B., 0^∞ non è indeterminata $0^\infty = 0$

— 0 — 0 —

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{2^n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{27}}{n!} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1,01)^n}{\sqrt{n}} = +\infty$$

— 0 — 0 —

STRUMENTI :

* criterio radice

* criterio rapporto

* criterio rapporto $\rightarrow$ radice

CRITERIO RADICE Sia $a_n \geq 0$ definitivamente

Supponiamo che $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora

* se $l > 1$ (anche se $l = +\infty$), allora $a_n \rightarrow +\infty$

* se $0 \leq l < 1$, allora $a_n \rightarrow 0$

* se $l = 1$, allora BOH (non si può per ora concludere nulla, bisogna inventarsi altro)

CRITERIO RAPPORTO . Sia $a_n > 0$ definitivamente.

Supponiamo che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora

Come sopra

Esempio

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2}{2^n} \right) = a_n$$

$$\frac{+\infty}{+\infty}$$

Applico criterio rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{\cancel{2^n}}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{2 \cdot \cancel{2^n} \cdot n^2}$$

$$= \frac{n^2 + 2n + 1}{2n^2} \rightarrow \frac{1}{2} = l < 1$$

Poichè $l < 1$, si ha che $a_n = \frac{n^2}{2^n} \rightarrow 0$

Esempio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = a_n$

Provo a farlo con il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} \rightarrow 1 \Rightarrow \text{BOH}$$

— 0 — 0 —

CRITERIO RAPPORTO $\rightarrow$ RADICE Sia $a_n > 0$ defn.

Supponiamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \mathbb{R}$.

Allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ (stesso l).

Conclusione pessimistica: se facendo il rapporto viene
che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1$ (senque BOH) è inutile provare success.
con la radice, perché si sa già che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

— o — o —

Il contrario (se $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$, allora anche $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l$)

non vale !!! Può succedere (es: trovare un esempio)

che $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l \in \mathbb{R}$, ma $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ NON ha limite.

Se ce l'ha, coincidono