

MAT 1 TLC

ORA 11

Teoremi algebrici

- ↗ somma di 2 succ.
- prodotto costante · succ.
- ↘ prodotto di 2 succ.
- ↘ quoziente di 2 succ.

Retta reale estesa

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

$a_n \rightarrow l \in \overline{\mathbb{R}}$ (è come dire a_n di tipo ①, ②, ③)

Su $\overline{\mathbb{R}}$ posso, entro certi limiti, estendere le operazioni aritmetiche

$$27 + (+\infty) = +\infty$$

$$27 + (-\infty) = -\infty$$

$$27 \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$$

Teorema somma $a_n \rightarrow l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$, $b_n \rightarrow l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, $c_n = a_n + b_n$

Allora $c_n \rightarrow l_1 + l_2$

TRANNE nel caso

$$(+\infty) + (-\infty)$$

Teorema prodotto costante. successione
succ. . succ.

$$a_n \rightarrow l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$b_n \rightarrow l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$c_n = a_n \cdot b_n$$

$$c_n \rightarrow l_1 \cdot l_2$$

TRANNE nel caso

$$0 \cdot \pm \infty$$

$$\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$$

$$c_n = \lambda \cdot a_n, \text{ allora } c_n \rightarrow \lambda l_1$$

Teorema quoziente

$$\begin{aligned} a_n &\rightarrow l_1 \in \overline{\mathbb{R}} \\ b_n &\rightarrow l_2 \in \overline{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{a_n}{b_n} \quad \curvearrowright$$

Allora $c_n \rightarrow \frac{l_1}{l_2}$ TRANNE

serve per Hp
che sia

$$b_n \neq 0$$

definitivamente

* nei casi $\frac{0}{0}$ e $\frac{\pm \infty}{\pm \infty}$

* nei casi in cui $l_2 = 0$. In questi casi bisogna vedere se è 0^+ oppure 0^- .

ACHTUNG, ACHTUNG

Se $a_n \rightarrow +\infty$, $b_n \rightarrow -\infty$,

$c_n = a_n + b_n$, si dice che c_n è una forma indeterminata

Cosa vuol dire? NON VUOL DIRE che il limite non esiste (cioè che a_n non ha limite, è di tipo ④) VUOL dire che il limite di a_n non si può dedurre dal limite di a_n e b_n . Occorre vedere come sono fatte a_n e b_n .

IDEM per le forme indeterminate $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $0 \cdot (\pm\infty)$.

Esempio 1

$$a_n = n^2 - n$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $+\infty \quad -\infty$

Forma indeterminata
 $+\infty - \infty$

$$n^2 - n = n(n-1) \longrightarrow +\infty$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $+\infty \cdot +\infty = +\infty$

Esempio 2

$$a_n = \underbrace{n^2}_{+\infty} - \underbrace{n^7}_{-\infty}$$

Forma indebitata

$$n^2 - n^7 = \underbrace{n^2}_{+\infty} \underbrace{(1 - n^5)}_{1 - \infty = -\infty} \longrightarrow -\infty$$

$$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$$

Commento sul teo. quoziente

$$a_n \rightarrow l_1, b_n \rightarrow l_2$$

l_1

	$-\infty$	2	0^+	0^-	-3	$+\infty$
$-\infty$	B	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	B
-5	0^+	$-\frac{5}{2}$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{5}{3}$	0^-
0	0	0	B	B	0	0
4	0^-	2	$+\infty$	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	0
$+\infty$	B	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	B

$\leftarrow l_2$

$$\frac{a_n}{b_n}$$

Esempio 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - \cos n = +\infty$

$$\boxed{n^2 - \cos n} \geq \boxed{n^2 - 1}$$

$\downarrow$ $+\infty$ $\downarrow$ $+\infty$

per confronto a 2

Esempio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 - n^2 \sin n^3 = +\infty$

$$\boxed{n^3 - n^2 \sin n^3} \geq \boxed{n^3 - n^2} = \overset{+\infty}{\uparrow} n^2 \overset{+\infty}{\uparrow} (n-1)$$

$\downarrow$ $+\infty$ $\downarrow$ $+\infty$

confr. a 2.

$$n^3 - n^2 \sin u^3 = n^3 \left(1 - \frac{\sin u^3}{n} \right) \rightarrow +\infty$$

$$+\infty \cdot (1 - 0) = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

Divido per n

$$-1 \leq \sin(u^3/n) \leq 1$$

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(u^3/n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$\downarrow$
 0

Carabinieri

Esempio 3

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 + 3n^2 + 5}{n^3 - 27} = 1$$

Raccolgo n^3 sopra e sotto

$$\frac{\cancel{n^3} \left(1 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^3} \right)}{\cancel{n^3} \left(1 - \frac{27}{n^3} \right)} \rightarrow \frac{1}{1} = 1$$

Esempio 4

$\lim_{n \rightarrow +\infty}$

$$\left(\frac{n^2+2}{5n+1} - \frac{n^3+2}{n^2+3} \right)$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $(+\infty)$ $(+\infty)$

Forma
indeterminata

Facciamo denominatore

$$\frac{(n^2+2)(n^2+3) - (n^3+2)(5n+1)}{(n^2+3)(5n+1)}$$

$$= \frac{\cancel{n^4} + 3n^2 + 2n^2 + 6 - 5\cancel{n^4} - \cancel{n^3} - 10n - 2}{5n^3 + n^2 + 15n + 3}$$

$-\infty$



$$= \frac{-4n^4 - n^3 + 5n^2 - 10n + 4}{5n^3 + n^2 + 15n + 3}$$

raccolgo n^4 sopra
" n^3 sotto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2+2}{5n+1} - \frac{n^3+2}{n^2+3} \right)$$

$$\approx \frac{n^2}{5n} - \frac{n^3}{n^2}$$

$$= \frac{1}{5} - n = -\frac{4}{5}n \rightarrow -\infty$$