

MA 1 TLC

Titolo nota

ORA 10

10/10/2006

a_n successione

Def. 1 $N \in \mathbb{P}$



Def. 2 $\forall M \in \mathbb{R}, a_n \geq M$ definitivamente.

Def. 3 $\forall M \in \mathbb{R}, a_n \leq M$ definitivamente.

Def. 1 $\forall \varepsilon > 0, |a_n - l| \leq \varepsilon$ definitivamente.

Def. 1 bis $a_n \rightarrow l^+$ $\forall \varepsilon > 0, l < a_n \leq l + \varepsilon$ definitivamente.
 $a_n \rightarrow l^-$ $\forall \varepsilon > 0, l - \varepsilon \leq a_n < l$ definitivamente.

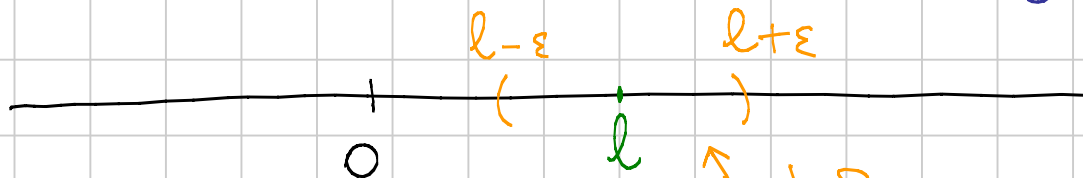
Teo. permanenza del segno

* Se $a_n \rightarrow l > 0$, allora definitivamente $a_n > 0$

* Se $a_n \rightarrow +\infty$, allora definitivamente $a_n > 0$

Analoghi: se $a_n \rightarrow l < 0$, allora def. $a_n < 0$
se $a_n \rightarrow -\infty$, allora def. $a_n < 0$

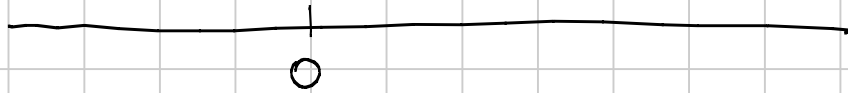
Dim. Hp. $a_n \rightarrow l > 0$ Tesi $a_n > 0$ defiu.



defiu. a_n sta tra $l-\varepsilon$ e $l+\varepsilon$, quindi sopra 0.

Hp $a_n \rightarrow +\infty$

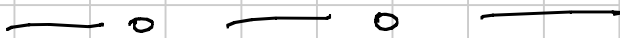
Tesi $a_n > 0$ defiu.



Fisso $M = 2006$

Per defiu. di ② defiu. $a_n \geq 2006$,
dunque > 0

Per esercizio fare enunciati analoghi con < 0 .



Estensioni

Se $a_n \rightarrow l > 27$, allora defiu. $a_n > 27$

$a_n \rightarrow -\infty$, allora defiu. $a_n < -85$.



Teo. unicità del limite. Una successione a_n può avere uno ed uno solo dei comportamenti ①, ②, ③, ④.

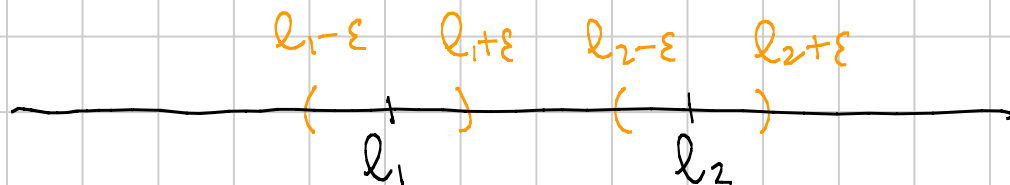
Inoltre, se è di tipo ①, lo è per un solo valore di l .

[Una successione NON può avere 2 limiti diversi]

"Dim" Dimostriamo che non può essere contemporaneamente

$$a_n \rightarrow l_1 \quad \text{con } l_1 < l_2$$

$$a_n \rightarrow l_2$$



prendo 2 intornoi di l_1 ed l_2 disgiunti.
Definit. a_n dovrebbe stare in entrambi
ASSURDO.

Calcolo dei primi limiti. Dim. che $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$

Uso def. Devo mostrare che $\forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $n^2 \geq M$ definit.

$n^2 \geq M$ $\nearrow$ se $M \leq 0$ è vero $\forall n \in \mathbb{N}$ $\searrow$ in entrambi i casi
 $\searrow$ se $M > 0$ è vero $\forall n \geq \sqrt{M}$ $\nearrow$ è vero definit.

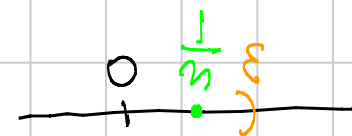
Allo stesso modo si dimostra che $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty$ ($\alpha > 0$)

Caso particolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}$ ($\alpha = \frac{1}{2}$)

Devo dim. che $\forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $\sqrt{n} \geq M$ definit.

$\sqrt{n} \geq M$ $\nearrow$ se $M \leq 0$ è vero $\forall n \in \mathbb{N}$
 $\searrow$ se $M > 0$ è vero $\forall n \geq M^2$ $\nearrow$ cioè definit.

Dimostriamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, anzi 0^+



Devo dimostrare che $\forall \varepsilon > 0$ si ha che $0 < \frac{1}{n} \leq \varepsilon$

$0 < \frac{1}{n}$ questa è vera $\forall n \geq 1$

$\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ questa è vera $\forall n \geq \frac{1}{\varepsilon}$, cioè definitivamente

Allo stesso modo si dimostra che $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\beta = 0^+$ ($\beta < 0$)

CONCLUSIONE

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases}$$

→ TABELLINA

La successione n^0 è la succ.
 $1^0, 2^0, 3^0, 4^0, \dots$
" " " "
1 1 1 1
dunque $\rightarrow 1$.

Teorema di confronto (confronto a 2).

Siano a_n e b_n due succ. Supponiamo che

$$a_n \leq b_n \text{ definitivamente.}$$

Allora * se $a_n \rightarrow +\infty$, anche $b_n \rightarrow +\infty$

* se $b_n \rightarrow -\infty$, anche $a_n \rightarrow -\infty$

* se $a_n \rightarrow l_1 \in \mathbb{R}$ e $b_n \rightarrow l_2 \in \mathbb{R}$, allora
 $l_1 \leq l_2$

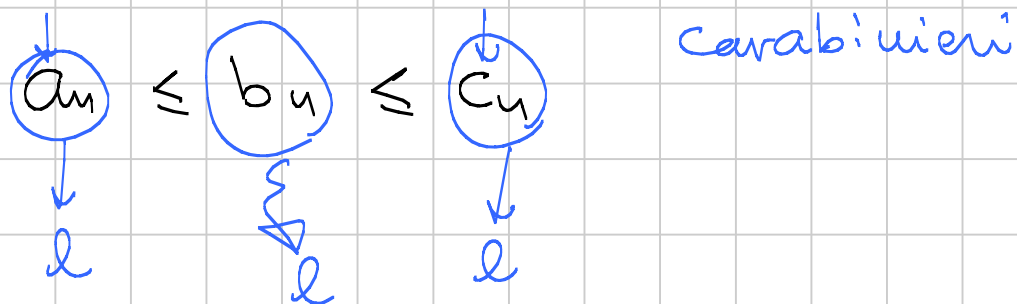
ACHTUNG Sapendo solo che $a_n \rightarrow l_1 \in \mathbb{R}$,
non possiamo concludere che $b_n \rightarrow l_2 \in \mathbb{R}$ e $l_2 \geq l_1$,
(potrebbe essere $b_n \rightarrow +\infty$ oppure b_n senza limite (nolet).)

Teorema dei Carabinieri (confronto a 3).

Siano a_n, b_n, c_n 3 succ. Supponiamo che
 $a_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente.

Supponiamo inoltre che $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ $\nwarrow$ stesso limite
 $c_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ $\swarrow$

Allora $b_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ (stesso limite delle altre 2).



Esempio 1

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

Dim.

$$-1 \leq \sin u \leq 1$$

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

Divido per n conservando
i versi (si può per $n \geq 1$)

vera $\forall n \geq 1$, cioè
definitiva.

(Dim. prima)

(si dim.
come
quell'altro)



Esempio 2

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\arctan(n! - 2^n + \sin n^2)}{n^3} = 0$$

$\leftarrow a_n$

Dim. Devo verificare che $\forall \varepsilon > 0$ si ha che $-\varepsilon \leq a_n \leq \varepsilon$ definitivamente, il che si riduce ad una semplice diseq.

NO!!!!!!!!!!

Nuova partenza

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arctan(\text{nostro}) \leq \frac{\pi}{2}$$

Divido per n^3

$$\underbrace{-\frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{n^3} \right)}_{\downarrow 0} \leq \underbrace{\frac{\arctan(\text{nostro})}{n^3}}_{\downarrow 0} \leq \underbrace{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n^3}}_{\downarrow 0}$$