

Successioni

Limiti

Una successione burocraticamente è una funzione $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

Di solito invece di scrivere $a(0), a(1), a(2), \dots, a(n)$ si scrive
 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

Diciamo che una certa proprietà vale DEFINITIVAMENTE se vale da un certo p.to in poi, cioè se $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ tale che la proprietà vale $\forall n \geq m_0$.

Def + elastica di successione: non si chiede che a_n sia definita $\forall n \in \mathbb{N}$, ma solo definitivamente.

Esempi

$$a_n = 3n + 4$$

SI BURO

$$b_n = \frac{5n^2 + 6}{n+1}$$

SI BURO

$$c_n = \frac{1}{n-5}$$

NO BURO (male per $n=5$)

SI ELAS. (OK per $n \geq 6$)

$$d_n = \sqrt{n - 2006}$$

NO BURO

SI ELAST.

$$e_n = \sqrt{2006 - n}$$

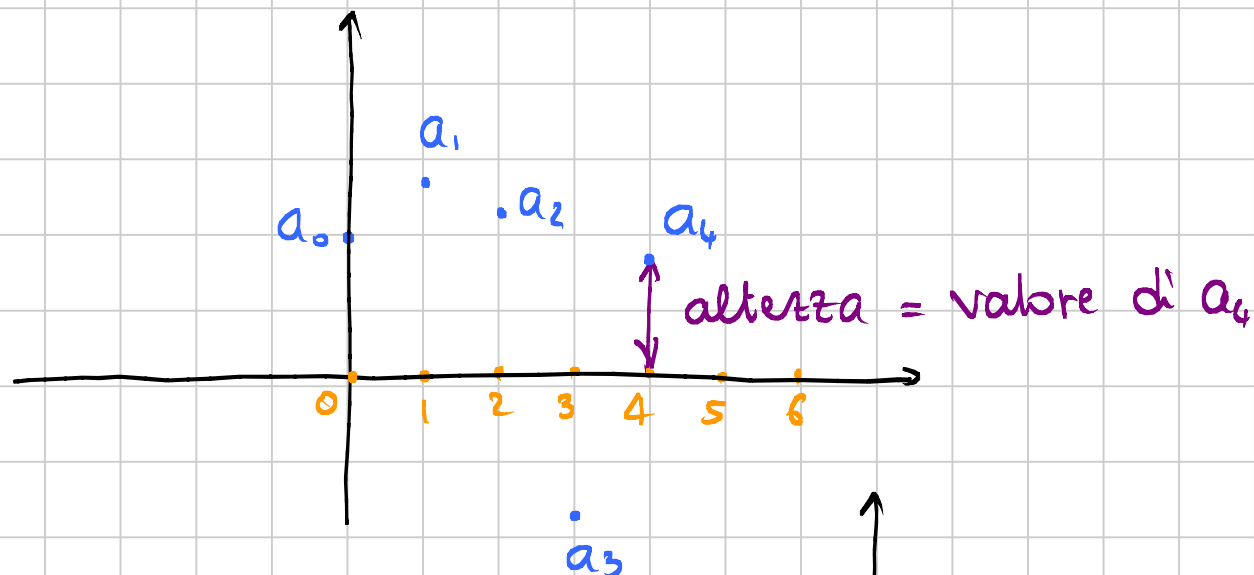
NO BURO

NO ELAST.

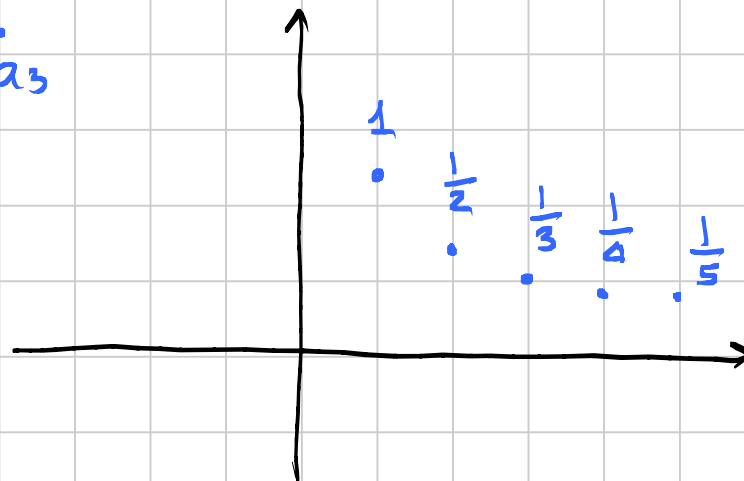
NON È UNA SUCCESSIONE

Come rappresentare una successione?

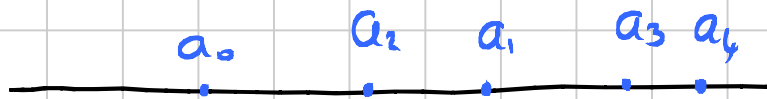
1° modo In modo cartesiano



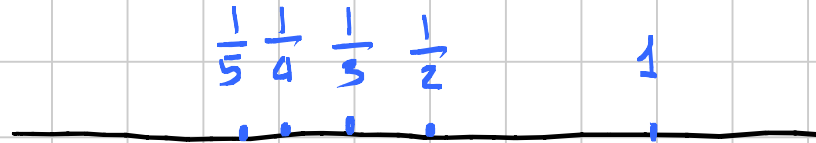
Es. Rapp. di $\frac{1}{n}$
(Defin. per $n \geq 1$)



2° MODO Punti su una retta $\leadsto$ LAMPADINE



Es. con $\frac{1}{n}$



Lampadine: pensare che sulla retta ad ogni secondo si accende una lampadina.

Al secondo k si accende una lampadina nel p.to di ascissa a_k (e sta accesa 1 sec.)

LIMITE Una successione può avere 4 tipi di comportamento

① $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$

② $a_n \rightarrow +\infty$

" $= +\infty$

③ $a_n \rightarrow -\infty$

" $= -\infty$

④ a_n INDETERMINATA

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ NON ESISTE

ACHTUNG

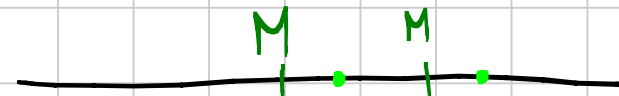
Per le successioni $n \rightarrow +\infty$ e
a nient'altro

Def. RIGOROSE

Def. ④ Nessuna delle precedenti

Def. ② $\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)

$a_n \geq M$ definitivamente



Def. ③ $\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorm. neg.)

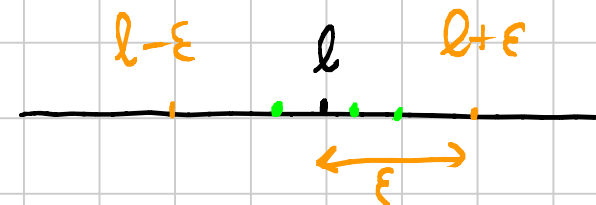
$a_n \leq M$ definitivamente



Def. ① $\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a zero)

$l - \varepsilon \leq a_n \leq l + \varepsilon$ definitiv.

$|a_n - l| \leq \varepsilon \leftarrow \text{dist. tra } a_n \text{ ed } l$

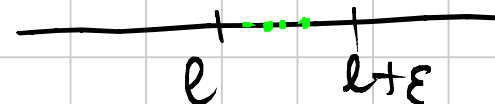


Estensione di ①

$$a_n \rightarrow l^+$$

$$\forall \varepsilon > 0$$

$$l \boxed{<} a_n \leq l + \varepsilon \text{ defiu.}$$



$$a_n \rightarrow l^-$$

$$\forall \varepsilon > 0$$

$$l - \varepsilon \leq a_n \boxed{<} l$$

importante
che siano strette

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 = 0^+$$

Oss. Se $a_n \rightarrow 0$, è obbligata a tendere a 0^+ o 0^- ? **No**
Se $a_n \rightarrow 0^+$, è obbligata ad essere defiu. dec. **No**

