

MAT 1 TLC

ORA 8

Titolo nota

07/10/2006

Funzioni monotone Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Diciamo che f è

- **DEBOLMENTE CRESCENTE** se

$$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

- **STRETT. CRESCENTE** se

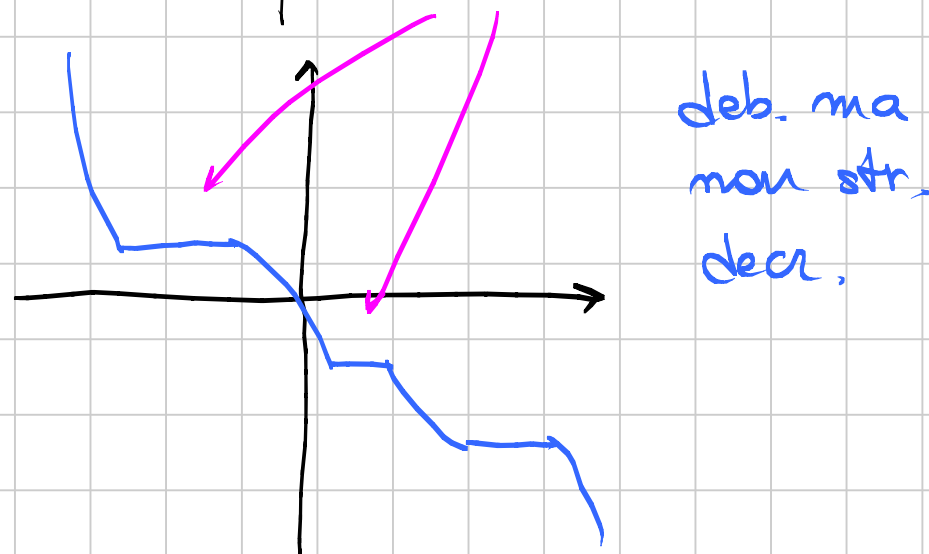
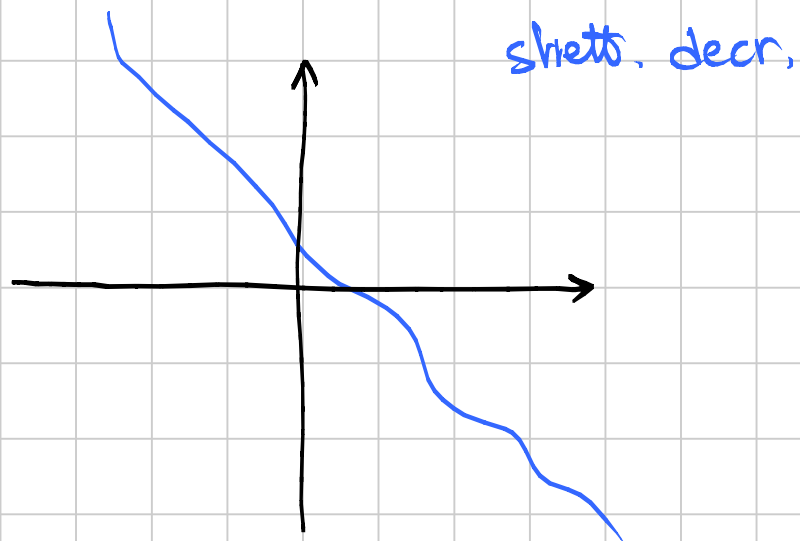
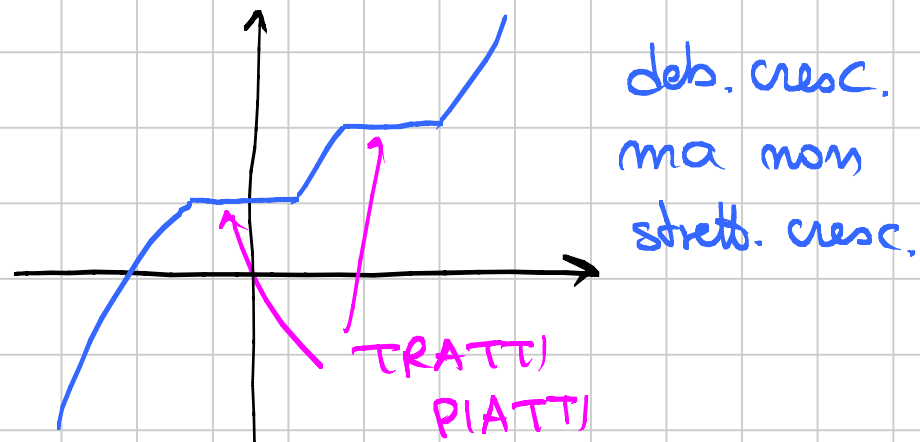
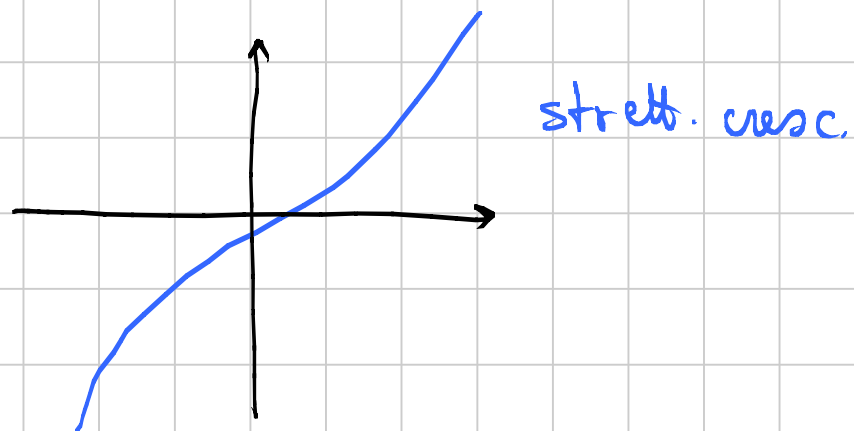
$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

- **DEBOL. DECR.** $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

- **STRETT. DECR.** $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

N.B. Mai usare (de)cresc. senza aggettivo (deb./strett.)

Oss. Se f è strett. cresc. $\Rightarrow f$ è anche deb. cresc.
 " decres. $\Rightarrow$ " " decr.



GRANDI TENTAZIONI

$$\textcircled{1} \quad 2^{x+3} = 2^{2x+1} \Rightarrow x+3 = 2x+1 \quad \dots \quad \textcircled{\text{SI}}$$

$$\textcircled{2} \quad \log_5 (x+3) = \log_5 (2x+1) \Rightarrow x+3 = 2x+1 \quad \dots \quad \textcircled{\text{NO}}$$

$$\textcircled{3} \quad \sin (x+3) = \sin (2x+1) \Rightarrow x+3 = 2x+1 \quad \dots \quad \textcircled{\text{NO}}$$

$$\text{G.T.} \quad \cancel{f}(A) = \cancel{f}(B) \Rightarrow A = B$$

$$\textcircled{4} \quad (x+3)^2 = (2x+1)^2 \Rightarrow x+3 = 2x+1 \quad \dots \quad \textcircled{\text{NO}}$$

Si può fare tranquillamente se f è INIETTIVA.

Chiaramente A e B devono essere insieme di partenza di f

① SI perché $f(x) = 2^x$ è INIETTIVA e def. su tutto $\mathbb{R}$

② si può di porre $A > 0, B > 0$ (ins. di partenza di log)

③ e ④ no perché $\sin x$ e x^2 no INIETTIVE

$$2^{x+1} > 2^{2x+3} \Rightarrow x+1 > 2x+3 \quad \text{S!}$$

$$\log_3(x+1) > \log_3(2x+3) \Rightarrow x+1 > 2x+3 \quad \text{NI}$$

$$\sin(\quad) > \sin(\quad) \Rightarrow \quad, \quad \text{NO}$$

G.T. ~~$\mathcal{P}$~~ (A) > ~~$\mathcal{P}$~~ (B) $\Rightarrow$ A > B

Si può fare se f è STRETT. CRESC.

Supponiamo $f(A) > f(B) \Rightarrow$

- $A > B \leftarrow$ UNICO POSS.
- $A = B \rightarrow$ NO, sarebbe $f(A) = f(B)$
- $A < B \rightarrow$ NO, perché essendo f strett. cresc. sarebbe $f(A) < f(B)$

Se f è strett. decr. posso "eliminare f " pur di
INVERTIRE I VERSI della disug.

$$f(A) > f(B) \Rightarrow A < B$$

3 G.T. Eliminare una funzione con la sua inversa.

Se g è l'inversa di f , allora $g(f(x)) = x$

$$\arcsin(\sin x) = x$$

$$\arccos(\cos x) = x$$

$$\sin(\arcsin x) = x$$

⋮

$f: A \rightarrow B$ e l'inversa $g: B \rightarrow A$

$$g(f(a)) = a \quad \forall a \in A$$

SI

$$f(g(b)) = b \quad \forall b \in B$$

SI

$$\arcsin(\sin x) = x$$

$\forall x \in$ insieme di partenza della
restrizione di $\sin$ usata
per definire $\arcsin x$

$$\arcsin(\sin x) = x$$

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$x=0$ SI
 $x=1$ SI $x=2$ NO

$$\sin(\arcsin x) = x$$

$$\forall x \in [-1, 1]$$

insieme di arrivo
della restrizione
di $\sin x$ ("B")

$$\arccos(\cos x) = x$$

$$\forall x \in [0, \pi]$$

←

$x=1$

$x=2$ SI

$x=4$

NO

$x=3$

$x=-1$

NO

$$\cos(\arccos x) = x$$

$$\forall x \in [-1, 1]$$

idem con $\tan$ e $\arctan x$

— — — — —

Considero $f(x) = \arcsin(\sin x)$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

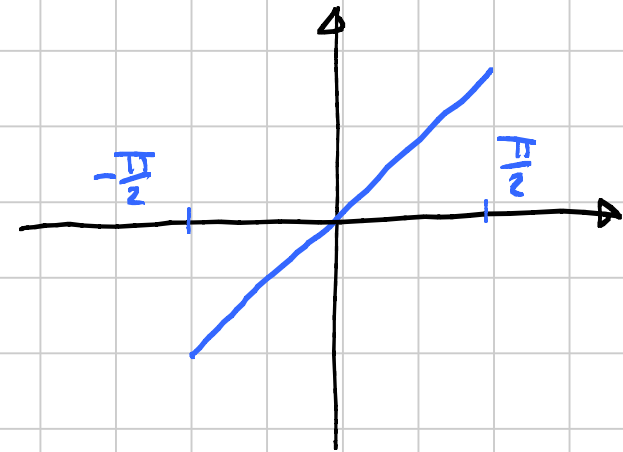
Qual è il grafico?

Per $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $f(x) = x$

f ha delle simmetrie?

f è DISPARI

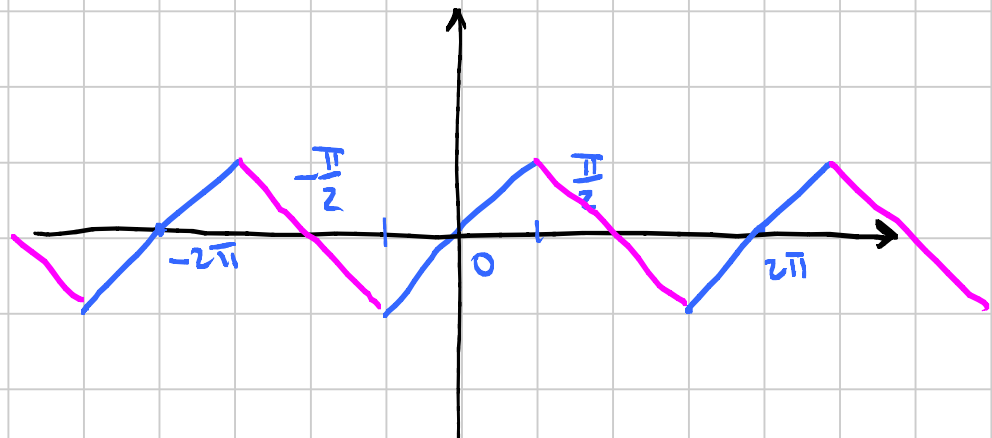
f è PERIODICA di periodo 2π



$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= \arcsin(\sin(x+2\pi)) \quad \leftarrow \text{poich\'e } \sin \text{ \u00e9 periodica} \\ &= \arcsin(\sin x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Per esercizio.

Nei tratti rimanenti:



$$f(x) = \arctan(\sin x)$$

$$= \sin x^2$$

$$= \sin^2 x$$

$$= \sin^3 x$$

$$= \sin x^3$$

$$= \cos x^3$$

$$= \sin x$$

$$= 2$$

$$= \cos(2^x)$$

PARI

DISP

PER

SI

NO

SI

NO

SI

SI

NO

SI

NO

SI

NO

NO

NO

NO

SI

$$f(x) = \sin x^3$$

Pari ?

Dispari ?

$$f(-x) = \sin (-x)^3 = \sin (-x^3) = -\sin x^3 = -f(x)$$

$\uparrow$ x^3 dispari $\uparrow$ $\sin$ DISPARI

$$f(x) = \cos x^3$$

PARI

$$f(-x) = \cos (-x)^3 = \cos (-x^3) = \cos x^3 = f(x)$$

$\uparrow$ $\cos$ PARI

$$f(x) = \sin (\cos x)$$

$\cos$ PARI

$$f(-x) = \sin (\cos (-x)) = \sin (\cos x) = f(x) \quad \text{PARI!}$$

$$f(x) = 2^{\sin x}$$

Periodica?

sin periodico

Provo con 2π

$$f(x+2\pi) = 2$$

$$\begin{array}{c} \sin(x+2\pi) \\ \downarrow \\ \sin x \end{array} = 2 = f(x)$$

$\Rightarrow f$ è PERIODICA

Oss. Se in una composizione la + interna è periodica, allora la composizione è periodica

$f(x) = \sin x^2$ NON è periodica

I p.ti in cui si annulla f sono sempre + ravvicinati invece di essere equispaziati

