

MAT 1 TLC

Titolo nota

ORA 6

05/10/2006

Max, min, Sup, inf.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme

Def. Dico che $M \in \mathbb{R}$ è il massimo di A , e scrivo

$$M = \max A$$

Commenti

se

① $M \in A$;

② $M \geq a \quad \forall a \in A$.

① M non è obbligato ad esistere

② Se esiste, è unico

Esempi 1. $A = [0, 1]$ $M = 1$ $m = 0$

2. $A = (0, 1)$ M non esiste "vorrebbe
essere 1, ma $1 \notin A$ "

3. $A = [0, +\infty)$
 $= \mathbb{R}_{\geq 0}$ m non esiste
 M non esiste
 $m = 0$.

Def. Dico che $m = \min A$ se

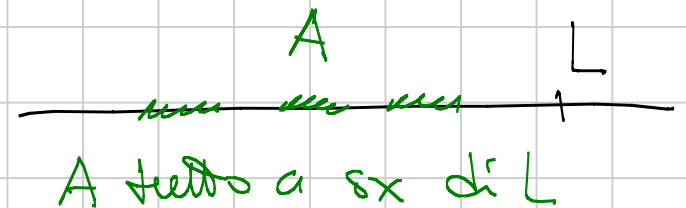
① $m \in A$

② $m \leq a \quad \forall a \in A$

Stessi commenti
di sopra

Def. A si dice limitato superiormente se esiste $L \in \mathbb{R}$
(anche non appartenente ad A) tale che

$$L \geq a \quad \forall a \in A$$



Ogni L che va bene in questa def. si dice **MAGGIORANTE** di A.

A si dice limitato inferiormente se esiste $K \in \mathbb{R}$ t.c.

$$K \leq a \quad \forall a \in A.$$

Tutti i K che vanno bene si dicono **MINORANTI** di A.

A si dice limitato se A è limitato sia superiormente sia inferiormente.

COMMENTI

- ① I maggioranti non sono obbligati ad esistere.

Esempio $A = [0, +\infty)$

- ② Se esiste un maggiorante, di sicuro non è unico

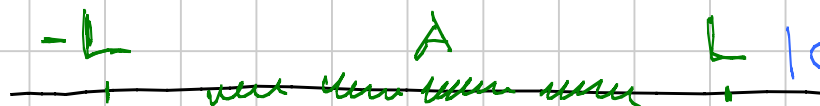
Esempio $A = (0, 5)$ $L = 7$ è un magg.
 $L = 8$ è pure un magg.

Tutti i numeri $L \geq 5$ sono maggioranti

- ③ Idem per i minoranti

- ④ A è limitato $\Leftrightarrow$ esiste $L \in \mathbb{R}$ tale che

$-L$ A L $|a| \leq L \quad \forall a \in A$



ESTREMO INFERIORE

ESTREMO SUPERIORE

Def. ① Dico che $\sup A = +\infty$ se A non è limitato superiormente, cioè non esistono maggioranti

② Dico che $\inf A = -\infty$ se A non è limitato inferiormente, cioè non esistono minoranti

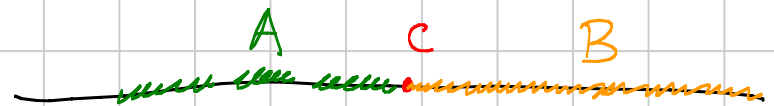
③ Dico che $\sup A = L \in \mathbb{R}$ se esistono dei maggioranti, ed L è il + piccolo di loro (L è il minimo dei maggioranti)

④ Dico che $\inf A = l \in \mathbb{R}$ se l è il massimo dei minoranti,

Teorema Se A è limitato superiormente (dunque esistono dei maggioranti) allora il minimo dei maggioranti esiste per forza.

Dim. Prendiamo l'insieme A ,
Indichiamo con B l'insieme dei maggioranti di A .
Per def. di maggiorante, A sta tutto a sx di B

Per l'assioma di CONTINUITÀ
esiste un elemento $c \in \mathbb{R}$ t.c.



① $a \leq c \quad \forall a \in A \quad \leftrightarrow \quad c$ è un maggiorante di A

② $c \leq b \quad \forall b \in B \quad \leftrightarrow \quad c$ è più piccolo di tutti gli altri maggioranti

Quindi c è il minimo dei maggioranti.

CONSEGUENZA

Inf e sup sono OBBLIGATI AD ESISTERE,
finiti o infiniti

Commenti

- ① Inf e sup esistono sempre e sono UNICI
- ② Se esiste $M = \max A$, allora $M = \sup A$
Se esiste il max, questo è anche sup.
[Se esiste min, questo è anche inf].
- ③ Se $\sup A \in \mathbb{R}$ e $\sup A \in A$, allora
è anche il $\max A$.
Idem per min e inf.
- ④ Se $\sup A = +\infty$, allora di SICURO
 $\max A$ non esiste

Esempi

A	Inf	Sup	min	max
$[0, 1]$	0	1	0	1
$(0, 1]$	0	1	N.E.	1
$\mathbb{N}$	0	$+\infty$	0	N.E.
$(0, 1) \cup (2, 4]$	0	4	N.E.	4
$\mathbb{Z}$	$-\infty$	$+\infty$	N.E.	N.E.

OCCHIO : il massimo è (QUANDO ESISTE) un maggiore, anzi è il min. dei maggioranti, cioè il sup.

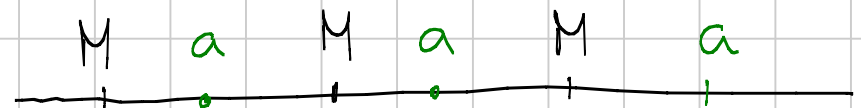
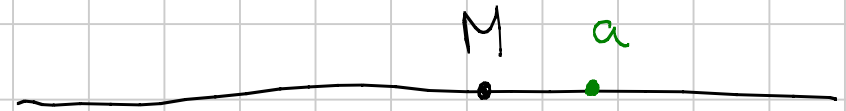
CARATTERIZZAZIONE DEL SUP

(altro modo di dare la definizione)

① $\sup A = +\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)

esiste $a \in A$ t.c. $a \geq M$



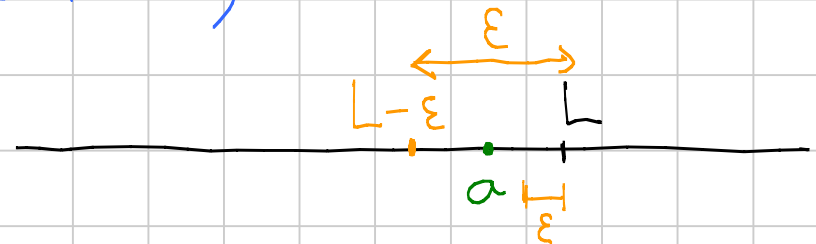
② $\sup A = L \in \mathbb{R}$ se

(i) $a \leq L \quad \forall a \in A$ (L è un maggiorante)

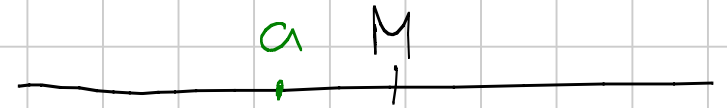
(ii) $\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a zero)

esiste $a \in A$ t.c.

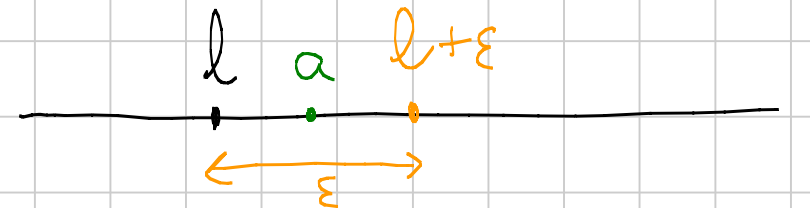
$a \geq L - \varepsilon$



③ $\inf A = -\infty$ se
 $\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorm. neg.)
 esiste $a \in A$ t.c., $a \leq M$



④ $\inf A = l \in \mathbb{R}$ se



(i) $l \leq a \quad \forall a \in A$ (l è minovante)

(ii) $\forall \varepsilon > 0$

esiste $a \in A$ t.c., $a \leq l + \varepsilon$.