

MAT 1 TLC

ORA 4

Titolo nota

04/10/2006

- 1) Principio di induzione
- 2) Presentazione funzioni elementari

— o — o —
INDUZIONE

Serve per dimostrare proprietà dei numeri naturali ($\mathbb{N}$)

P_n = proprietà dei naturali

P_n può essere

$$n^2 \geq n+27$$

$$n+7 \geq n$$

$$n+7 \leq n$$

espressione che contiene al suo interno un parametro n naturale e che, a seconda del valore di n può essere vera o falsa

Supponiamo di voler dimostrare che P_n è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$

Induzione

Supponiamo che

(i) P_0 è vera (cioè sostituendo $n=0$
viene vera)

PASSO BASE

(ii) P_n vera $\Rightarrow P_{n+1}$ è vera (se è vera per un
certo n , è vera
anche per il successivo)

PASSO INDUTTIVO

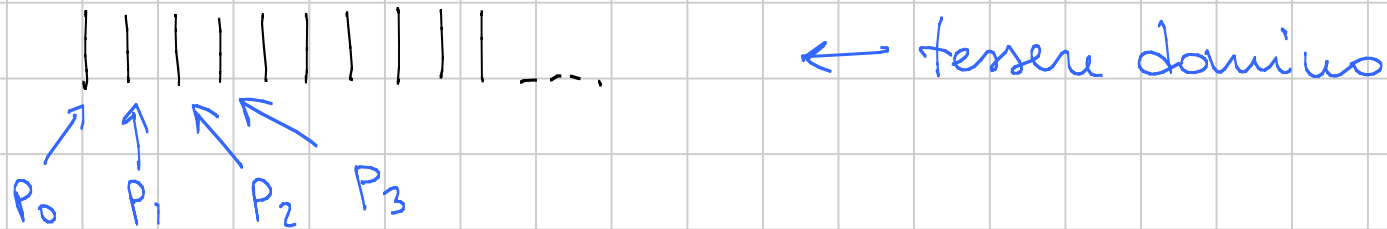
Allora P_n è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Perché funziona? So che P_0 è vera. Applico il pass. ind.
con $n=0$. Se P_0 è vera, allora P_1 è vera. So già P_0 vera
e quindi anche P_1 è vera.

Applico (i) con $n=1$. $P_1 \text{ vera} \Rightarrow P_2 \text{ vera}$.

" " $n=2$ $P_2 \text{ vera} \Rightarrow P_3 \text{ vera}$

In questo modo prima o poi arrivo a dim. che sono tutte vere.



(i) Passo base $\Rightarrow$ la tessera P_0 cade

(ii) Meccanismo caduta: se cade una tessera, cade succ.

Estensione: supponiamo che

(i) P_7 è vera

(ii) P_n vera $\Rightarrow P_{n+1}$ vera

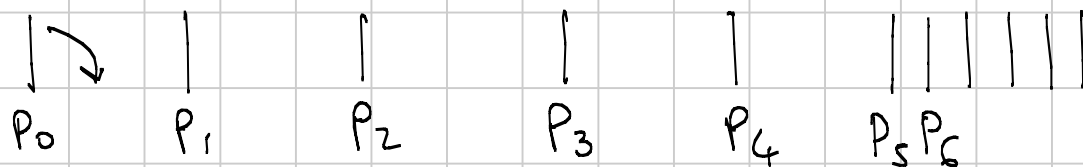
Allora P_n è vera $\forall n \geq 7$
— — —

Altra estensione

(i) P_0 è vera

(ii) Se $n \geq 5$ P_n vera $\Rightarrow P_{n+1}$ vera

Allora non si può concludere niente



Esempi di dimostrazione per induzione

Es. 1 $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ P_n

Vera $\forall n \geq 1$.

Passo base $[n=1]$ $1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$ ok.

Per scrupolo provo $[n=2]$ $1 + 2 = \frac{2 \cdot 3}{2}$ ok

Passo Induttivo $[H_p]$ $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Tesi $1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Devo: dimostrare la tesi usando l'ipotesi

Dim, $1 + 2 + \dots + n + (u+1) \stackrel{\text{uso Hp}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (u+1) =$

$$= \frac{n(n+1) + 2(u+1)}{2} = \frac{(u+2)(u+1)}{2}$$

Ho ottenuto la tesi. $\square$

Esempio 2 Dimostrare che $2^n \geq n+1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

Passo base: $\boxed{n=0}$ $2^0 \geq 0+1$; $1 \geq 1$ ok

Passo induttivo Hp $2^n \geq n+1$
 Tesi $2^{n+1} \geq n+2$

Dim. $2^{n+1} \stackrel{\text{P.C.}}{=} 2 \cdot 2^n \geq 2(n+1) =$

uso Hp

$= 2n + 2 \geq n + 2$

↑
ovvio

Guardando il primo e l'ultimo, abbiamo dim. che

$2^{n+1} \geq n+2$, cioè la tesi.

Esempio 3

$n!$ ← n fattoriale

$0! = 1$ $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ per $n \geq 1$

$1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = \dots = 24$

Dimostrare che $n! \geq 2^n \quad \forall n \geq 4$

Passo base $n=4$ $4! \geq 2^4$; $24 \geq 16$ ok.

PI. Hp $n! \geq 2^n$ Tesi $(n+1)! \geq 2^{n+1}$

Dim. $(n+1)! = (n+1) \underbrace{(n)(n-1)(n-2) \dots 1}_{n!}$

$$= (n+1) \cdot n!$$

Uso
Hp



$$\geq (n+1) \cdot 2^n$$

SPERO

$$\geq 2^{n+1}$$

ok

Controllo ultimo passaggio

$$(n+1) 2^n \stackrel{?}{\geq} 2^{n+1}$$

$$(n+1) \cdot \cancel{2^n} \geq 2 \cdot \cancel{2^n}$$

$$n+1 \geq 2, \text{ cioè } n \geq 1$$

N.B. Il meccanismo di caduta vale per $n \geq 1$



Esempio Disuguaglianza di BERNULLI

Per ogni $x > -1$ si ha che $(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

P.B. $n=0$ $(1+x)^0 \geq 1+0 \cdot x$; $1 \geq 1$ OK

P.I. Hp $(1+x)^n \geq 1+nx$ Tesi: $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

Dim.

$$(1+x)^{n+1} = (1+x) \cdot (1+x)^n$$

Uso Hp

$$\rightarrow \geq (1+x) - (1+ux)$$

$$= 1+ux + x + ux^2$$

$$= 1 + (u+1)x + ux^2$$

$$\geq 1 + (u+1)x$$

Tesi

è sempre ≥ 0 ,
quindi se lo
bolgo ottengo q.c.
di più piccolo

L'Hp diceva $(1+x)^n \geq 1+ux$ Io ho dedotto che

$$(1+x)(1+x)^n \geq (1+ux)(1+x)$$

Posso molt. IMPUNEMENTE se e solo se $(1+x) > 0$

$$\text{cioè } \Leftrightarrow x > -1.$$

Esempio 5

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Esempio 6

Per ogni $a \neq 1$

$$1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$