

MAT 1 TLC

ORA 2

INSIEMI NUMERICI

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \text{numeri NATURALI}$$

(Note: In the original image, the number 0 is boxed in pink, and three pink arrows point to it from below.)

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\} = \text{numeri INTERI RELATIVI}$$

ZAHLEN = numeri in tedesco

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \ n \neq 0 \right\} = \text{numeri RAZIONALI}$$

Q sta per QUOTIENT

$$\mathbb{R} = \text{"tutti i numeri"} = \text{numeri REALI}$$

$\mathbb{C}$ = numeri COMPLESSI

Proprietà numeri reali

□ Proprietà algebriche. Sui numeri reali sono definite 2 operazioni: $+$ e $\cdot$ con le seguenti proprietà

$\uparrow$ $\uparrow$
SOMMA PRODOTTO

- (S1) $a+b = b+a \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}$ $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ $a \cdot b = b \cdot a$ $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ (P1)
- (S2) $a+(b+c) = (a+b)+c \quad \forall a, b, c$ $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (P2)
- (S3) $\exists$ el. speciale (che si indica con 0) $b \cdot c$ $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ $\rightarrow \exists$ el. speciale (che si indica con 1) $b \cdot c$ (P3)
- $a+0 = 0+a = a$ $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
- (S4) $\forall a \in \mathbb{R} \exists$ un elemento che si indica con $-a$ t.c. $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0, \exists$ un elemento che si indica (P4)

$$a + (-a) = 0$$

↑ opposto

~~N~~, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$

$$\text{con } \frac{1}{a} \quad b \cdot c$$

~~N~~, ~~Z~~, $\mathbb{Q}$

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

↑ reciproco

$$(D) \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

↑

DISTRIBUTIVA

[2] ORDINAMENTO

che

$$a \leq b$$

Per ogni $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ si ha
oppure $b \leq a$

$$(01) \quad a \leq a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$

$$(02) \quad \text{Se } a \leq b \text{ e } b \leq a, \text{ allora } a = b$$

$$(03) \quad \text{Se } a \leq b \text{ e } b \leq c, \text{ allora } a \leq c$$

(OA1) Se $a \leq b$, allora

$$a + c \leq b + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

"Posso aggiungere impunemente a dx e sx"

(OA2) Se $a \leq b$, allora

$$a \cdot c \leq b \cdot c \quad \forall c > 0$$

OCCHIO

Se $a \leq b$, allora

$$a \cdot c \geq b \cdot c \quad \forall c < 0$$

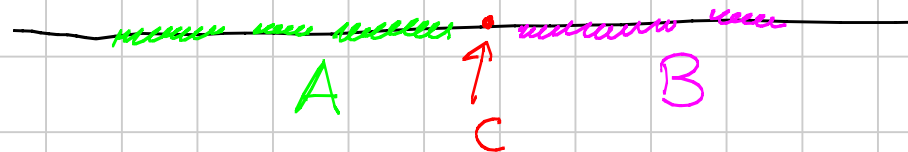
"Posso moltiplicare a dx e sx per roba positiva impunem.
" " per roba < 0 , ma devo girare i versi"

Tutte le proprietà elencate valgono in $\mathbb{Q}$.
Cosa distingue $\mathbb{Q}$ da $\mathbb{R}$?

[3] ASSIOMA DI CONTINUITÀ

Siano dati 2 sottoinsiemi $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ non vuoti.
Diciamo che A sta a sinistra di B se

$\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ si ha che
 $a \leq b$.



Assioma di continuità: se A sta a sx di B , allora

$\exists c \in \mathbb{R}$ tale che

↑
separatore

$$a \leq c$$

$$c \leq b$$

$\forall a \in A$ (più grande di tutti el. di A)

$\forall b \in B$ (più piccolo tutti el. B)

Domande: se A sta a sx di B , cosa possiamo dire di $A \cap B$?

$A \cap B$ $\rightarrow \emptyset$
 $\rightarrow |A \cap B| = 1$ contiene un solo elemento
in questo caso l'unico el. in comune
è il separatore.

L'esistenza del separatore vale in $\mathbb{R}$, ma non in $\mathbb{Q}$.

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ e } x^2 < 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ e } x^2 > 2\}$$

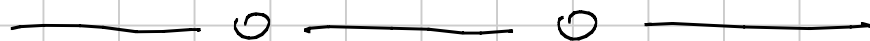


A sta a sx di B

Se ci fosse un separatore $c \in \mathbb{Q}$, dovrebbe essere $c^2 = 2$ ma in $\mathbb{Q}$ non esistono numeri il cui quadrato è 2.

Dunque in $\mathbb{Q}$ può non esistere il separatore.

In $\mathbb{R}$ esiste sempre (nell'esempio $c = \sqrt{2}$).



FUNZIONI (tra insiemi)

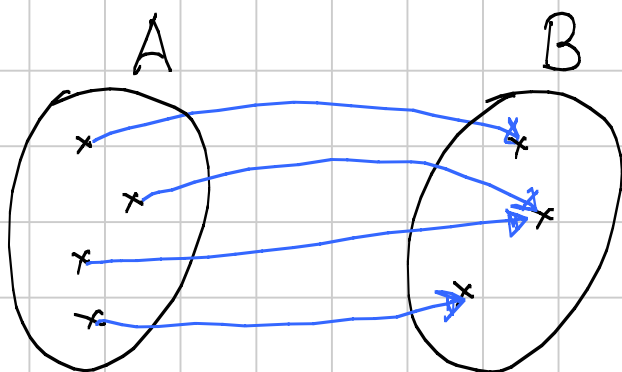
Una funzione sono 3 cose:

- * un insieme di partenza
- * un insieme di arrivo
- * una legge che ad ogni el. dell'insieme di partenza associa 1 solo el. dell'ins. di arrivo

$f: A \rightarrow B$

insieme partenza

insieme
arrivo



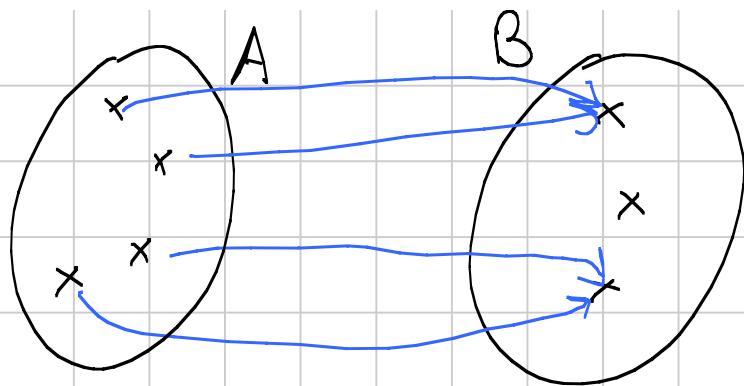
Def. 1 Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice INIETTIVA se
 "el. diversi di A vanno a finire in el. diversi di B"

$$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

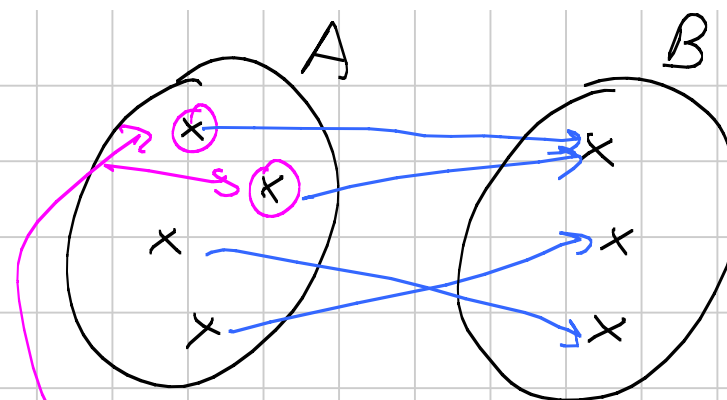
oppure (che è lo stesso) $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

Def. 2 Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice SURGETTIVA se
 "tutti gli el. di B vengono raggiunti"

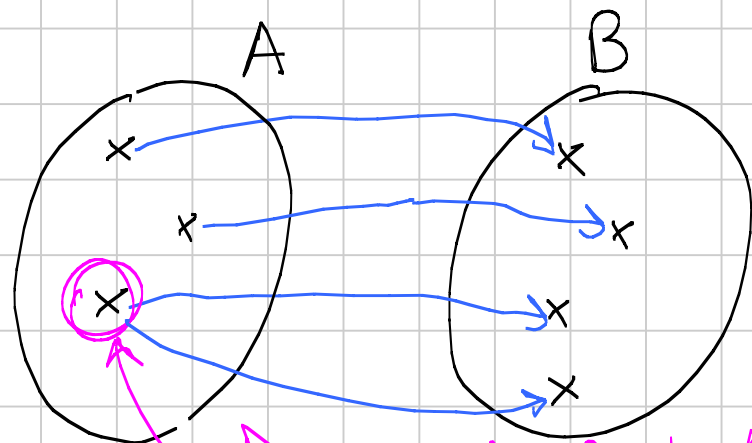
$$\forall b \in B \quad \exists a \in A \quad \text{b.c.} \quad b = f(a)$$



NO INIETTIVA, NO SURG.



NO INIETTIVA
SI SURGETTIVA



NON È
UNA FUNZIONE

Da ogni el. di A deve partire un'unica freccia!!!