

A.A. 2006/2007
Analisi Matematica 1

Stampato integrale delle lezioni
(Volume 2)

Massimo Gobbino

Indice

Lezione 055. Linguaggio vettoriale	5
Lezione 056. Funzioni di più variabili: grafici, linee di livello, restrizioni	10
Lezione 057. Funzioni di più variabili: limiti e continuità	14
Lezione 058. Funzioni di più variabili: derivate parziali e direzionali	17
Lezione 059. Funzioni di più variabili: gradiente e differenziale	21
Lezione 062. Moltiplicatori di Lagrange	25
Lezione 063. Massimi e minimi in più variabili su insiemi chiusi e limitati	31
Lezione 064. Massimi e minimi in più variabili su insiemi non limitati	36
Lezione 065. Integrali in una variabile: notazioni, significato geometrico, definizione	40
Lezione 066. Teorema fondamentale del calcolo integrale	45
Lezione 067. Integrazione per parti	49
Lezione 068. Integrazione per sostituzione	53
Lezione 069. Integrazione delle funzioni razionali	57
Lezione 070. Integrazione delle funzioni razionali	61
Lezione 071. Sostituzioni razionalizzanti	65
Lezione 072. Sostituzioni razionalizzanti	69
Lezione 073. Calcolo della somma di serie di potenze mediante derivate ed integrali	74
Lezione 074. Integrali impropri: definizioni	78
Lezione 075. Integrali impropri: primi esempi	82
Lezione 076. Integrali impropri: criterio del confronto asintotico	86
Lezione 077. Integrali impropri: criterio dell'assoluta integrabilità	92
Lezione 078. Integrali doppi: notazioni, significato geometrico, definizione	96

Lezione 079. Integrali doppi su insiemi normali rispetto all'asse x	101
Lezione 080. Integrali doppi su insiemi normali rispetto all'asse y	105
Lezione 081. Integrali doppi: coordinate polari	109
Lezione 082. Cambi di variabile negli integrali doppi	114
Lezione 083. Integrali tripli: introduzione formula di riduzione per colonne	119
Lezione 084. Integrali tripli: formula di riduzione per sezioni	124
Lezione 085. Integrali tripli: coordinate cilindriche e sferiche	128
Lezione 086. Integrali impropri oscillanti: trucco dell'integrazione per parti	133
Lezione 087. Confronti serie-integrali	138
Lezione 088. Equazioni differenziali: terminologia	143
Lezione 089. Problema di Cauchy per equazioni del primo ordine a variabili separabili	148
Lezione 090. Studio delle soluzioni di Problemi di Cauchy	152
Lezione 091. Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti omogenee	157
Lezione 092. Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti non omogenee	162
Lezione 093. Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti non omogenee	166
Lezione 094. Equazioni differenziali lineari del primo ordine	170
Lezione 095. Studio di equazioni differenziali dipendenti da parametri	176
Lezione 096. Baricentro di figure piane e solidi	179
Lezione 097. Solidi di rotazione	184
Lezione 098. Lunghezza di una curva e integrale curvilineo	188
Lezione 099. Teorema di Guldino per l'area di una superficie di rotazione	193
Lezione 100. Esercizi misti	197

MAT I TLC

ORA 55

Titolo nota

16/11/2006

VETTORI n-DIMENSIONALI

$$\mathbb{R}^n \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

$\uparrow$ vettore $\uparrow \uparrow$ componenti (sono numeri)

$$(1, 2, 3) \neq (1, 3, 2)$$

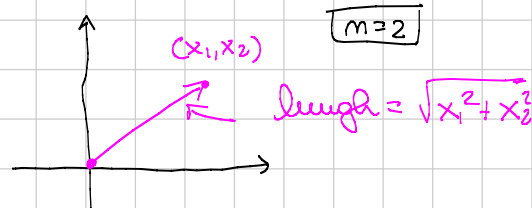
$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \quad \vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \quad \text{somma di 2 vettori}$$

$$\lambda \vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \quad \text{prodotto di un numero } \lambda \text{ per un vettore } \vec{x} : \text{viene un vettore}$$

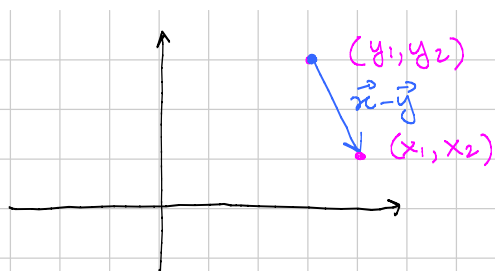
NORMA DI UN VETTORE

$$|\vec{x}| = \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \text{lunghezza del vettore}$$



DISTANZA TRA 2 VETTORI

$$\begin{aligned} \text{dist}(\vec{x}, \vec{y}) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \\ &= \|\vec{x} - \vec{y}\| \quad \vec{x} - \vec{y} = (x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n) \end{aligned}$$



lunghezza di $\vec{x} - \vec{y}$ = norma di $\vec{x} - \vec{y}$
 $= \text{dist}(\vec{x}, \vec{y})$

PRODOTTO SCALARE

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

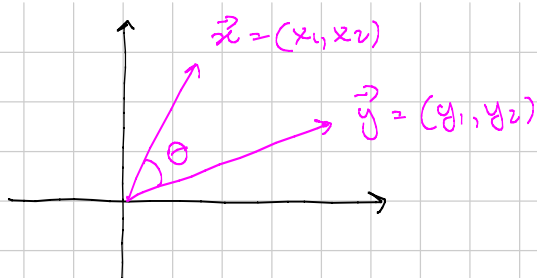
$$(\vec{x}, \vec{y}) \equiv$$

Il prodotto scalare ha in INPUT 2 vettori
 e il risultato è un numero

SIGNIFICATO GEOMETRICO

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos \theta$$

$\uparrow$ prod. scal. $\uparrow$ prod. numeri $\leftarrow$ angolo compreso tra i 2 vettori

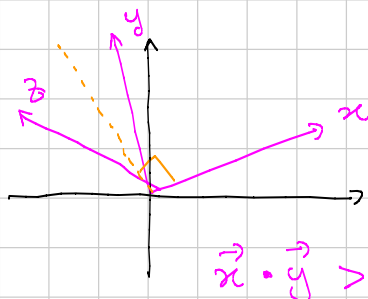


Conseguenze:

2 vettori non nulli sono
 perpendicolari $\Leftrightarrow \cos \theta = 0$
 $\Leftrightarrow$ il prodotto scalare è $= 0$.

$$\vec{x} \cdot \vec{y} > 0 \Leftrightarrow \text{l'angolo compreso è } < 90^\circ$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} < 0 \Leftrightarrow \text{l'angolo compreso è tra } 90^\circ \text{ e } 180^\circ$$



$$\vec{y} \cdot \vec{z} > 0$$

$$\vec{x} \cdot \vec{y} > 0, \quad \vec{x} \cdot \vec{z} < 0$$

VERSORI Un versore è un vettore di lunghezza 1.

In generale, se $\vec{x}$ è un vettore non nullo $\vec{x} \neq \vec{0} = (0, \dots, 0)$ allora

$$\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$$
 è un versore

Legame tra norma e prodotto scalare

$$\begin{aligned}\|\vec{x}\| &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{x_1 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_2 + \dots + x_n \cdot x_n} \\ &= \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}\end{aligned}$$

Proprietà del prodotto scalare (seguono dalla def.)

$$\begin{aligned}\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) &= \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z} & \vec{x} \cdot \vec{y} &= \vec{y} \cdot \vec{x} \\ \vec{x} \cdot (\lambda \vec{y}) &= \lambda (\vec{x} \cdot \vec{y})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 &= (\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) \\ &= \vec{x} \cdot \vec{x} + \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{x} + \vec{y} \cdot \vec{y} \\ &\quad \quad \quad \text{uguali} \\ &= \underbrace{\|\vec{x}\|^2}_0 + \underbrace{\|\vec{y}\|^2}_0 + 2\vec{x} \cdot \vec{y}\end{aligned}$$

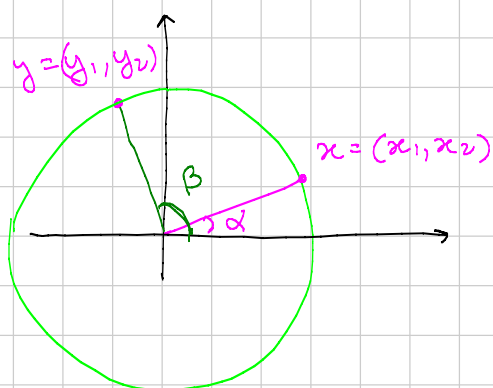
Dim. nel caso $n=2$ della formula $\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos \theta$

Posso dividere per $\|\vec{x}\|$ e $\|\vec{y}\|$

$$\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \cdot \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} = \cos \theta$$

$\swarrow \quad \searrow$
 versori

basta dunque dimostrare
 che il prodotto scalare di 2
 versori è $\cos \theta$



$$x_1 = \cos \alpha, \quad x_2 = \sin \alpha$$

$$y_1 = \cos \beta, \quad y_2 = \sin \beta$$

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \vec{y} &= x_1 y_1 + x_2 y_2 \\ &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ &= \cos(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

Angolo compreso
tra i 2 vettori

Funzione di 2 o più variabili

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

(2 variabili in partenza, 1 in arrivo)

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Notazione con le componenti

$$f(\underbrace{x, y}_{\text{componenti}}) = x^2 + 3xy, \quad f(\underbrace{x, y, z}_{\text{numeri}}) = \dots$$

Notazione vettoriale

$$f: \mathbb{R}^{18} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(\underbrace{\vec{x}}_{\text{vettore}}) \text{ oppure anche } f(\underbrace{x}_{\text{vettore}})$$

Si intende che $x \in \mathbb{R}^{18}$

$$x = (\underbrace{x_1, x_2, \dots, x_{18}}_{\text{numeri}})$$

GRAFICI

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{GRAFICO}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$" = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}$$

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$" = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : w = f(x, y, z)\}$$

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$" = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)\}$$

MAT I TLC

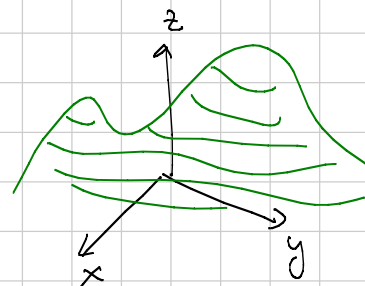
ORA 56

Grafici di funzioni di 2 variabili, linee di livello, restrizioni a rette

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x,y) = x^2 + y^2$$

Insieme di partenza si identifica con il piano base xy .

Su ogni punto del piano base c'è un punto del grafico situato ad una quota data da $f(x,y)$



il grafico è una superficie in $\mathbb{R}^3$ tale che per ogni p.to del piano base esiste un unico p.to del grafico che gli sta sopra / sotto.

Linee di livello

Dato $\lambda \in \mathbb{R}$ cerco tutti i punti (x,y) tali che $f(x,y) = \lambda$.

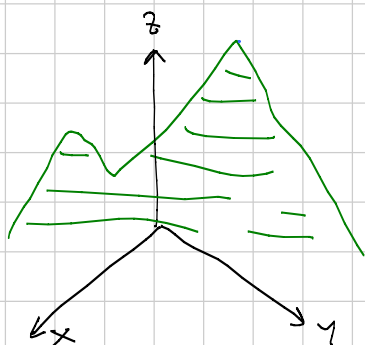
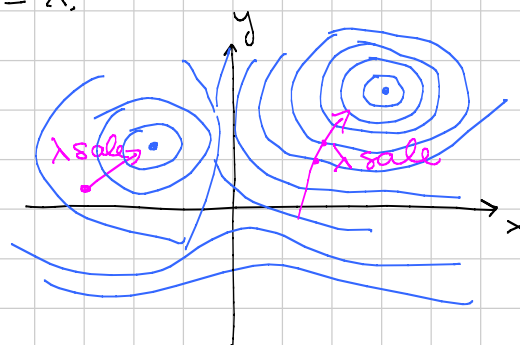


GRAFICO
IN $\mathbb{R}^3$



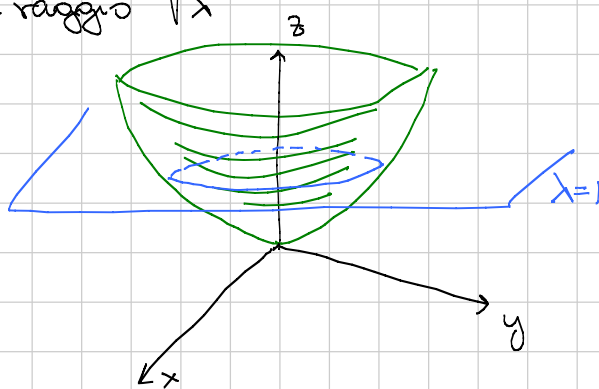
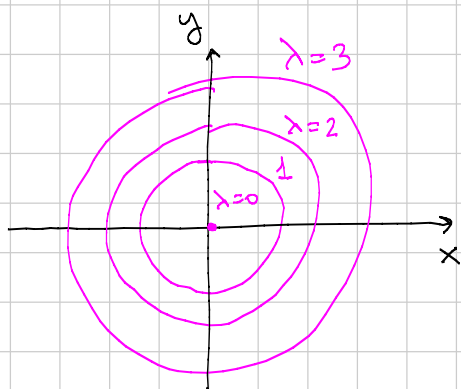
Linee di livello

$\iff$ intersecare il grafico con piani paralleli al piano base ad altezza λ

Nel caso $f(x,y) = x^2 + y^2$ i livelli sono dati da

$$x^2 + y^2 = \lambda$$

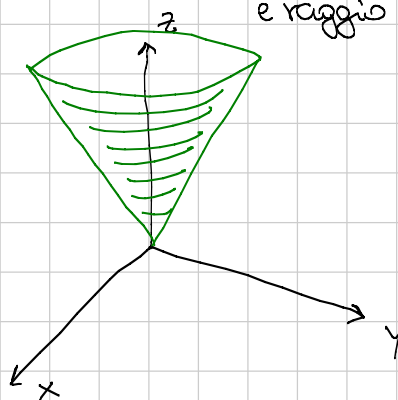
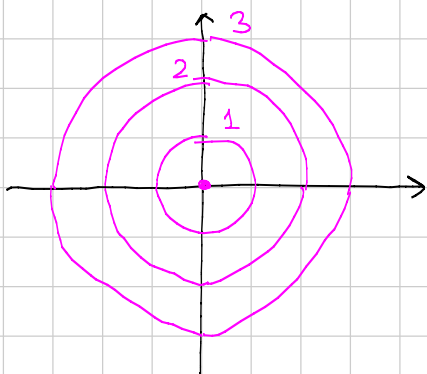
- per $\lambda < 0$ non c'è nulla
- per $\lambda = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow$ solo punto $(0,0)$
- per $\lambda > 0$ $x^2 + y^2 = \lambda$ è la circ. con centro in $(0,0)$ e raggio $\sqrt{\lambda}$



Esempio 2 $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

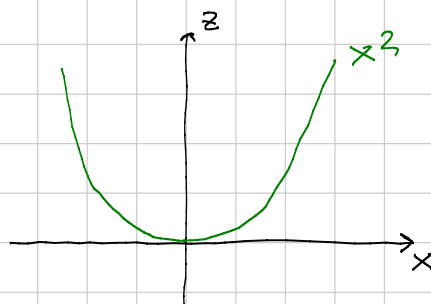
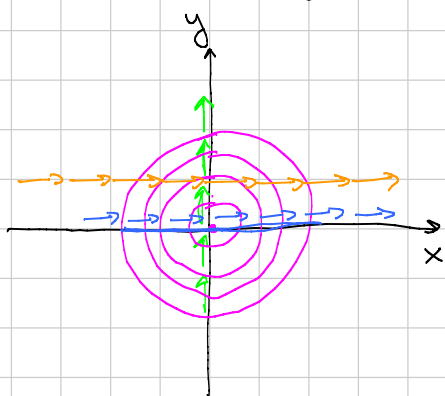
Linee di livello $f(x,y) = \lambda$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \lambda \begin{cases} \lambda < 0 \Rightarrow \text{nulla} \\ \lambda = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow \text{solo } (0,0) \\ \lambda > 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = \lambda^2 \Rightarrow \text{circ. con centro } (0,0) \text{ e raggio } \lambda \end{cases}$$



Restrizioni a rette

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

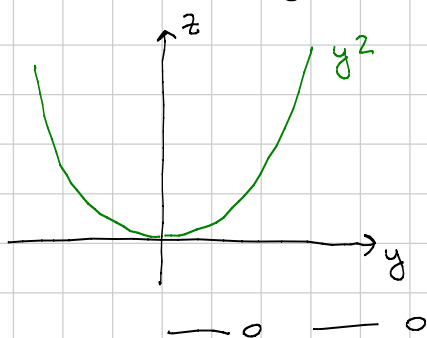


Sto restringendo la funzione $f(x, y)$ all'asse x

Sto quindi considerando $f(x, 0) = x^2$
 ↑
 solo sull'asse x

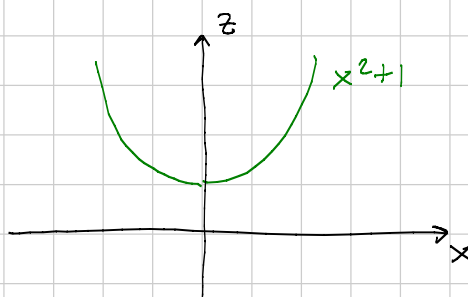
Se percorro l'asse y algebricamente considero

$$f(0, y) = y^2$$



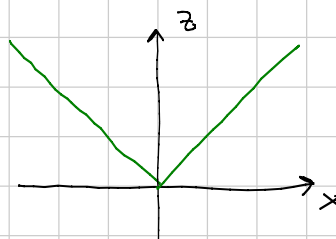
L'omino arancione percorre la retta $y=1$, quindi la sua quota è data da

$$f(x, 1) = x^2 + 1$$



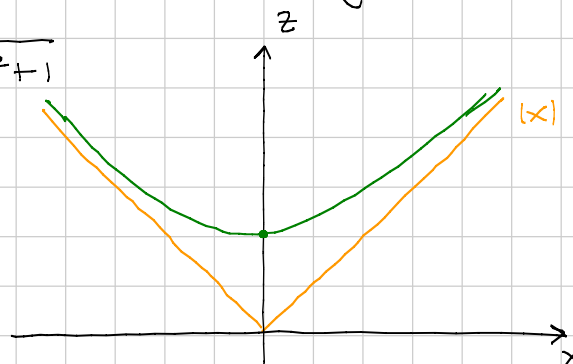
$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{ovvero percorre asse } x$$

$$f(x, 0) = \sqrt{x^2} = |x|$$

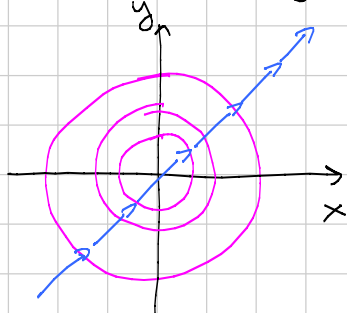


$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{ovvero percorre la retta } y=1$$

Devo fare $f(x, 1) = \sqrt{x^2 + 1}$



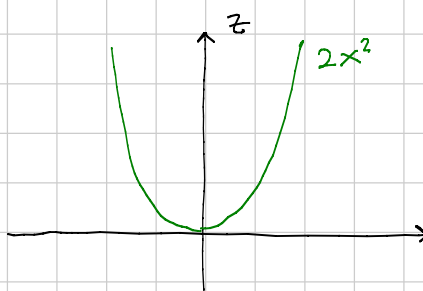
$$f(x, y) = x^2 + y^2$$



ovvero lungo bisettrice I e III quadr.

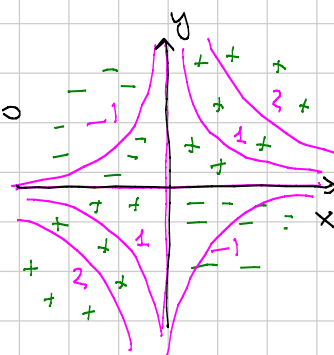
La retta è $y=x$, quindi

$$f(x, x) = x^2 + x^2 = 2x^2$$



MAT I TLC

ORA 57

 $f(x,y) = xy$ linee di livello $xy = \lambda$ per $\lambda = 0 \Rightarrow xy = 0 \Rightarrow x = 0$ oppure $y = 0$ il livello $\lambda = 0$ sono i 2 assi $xy = \lambda > 0$ $xy = \lambda < 0$ Ovvero che per ogni asse x : $f(x,0) = 0$ quota costanteOvvero lungo bisettrice $y=x$: $f(x,x) = x^2$ Limiti per funzioni di 2 variabili

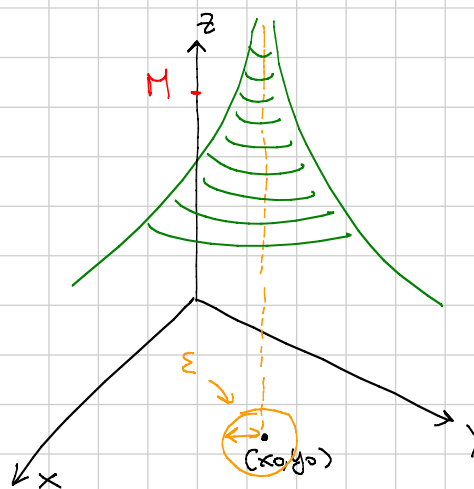
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = \begin{cases} l \in \mathbb{R} \\ +\infty \\ -\infty \\ \text{N.E.} \end{cases} \quad \text{N.d.P.}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = +\infty$$

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme) $\exists \varepsilon > 0$
t.c.

$$f(x,y) \geq M$$

per ogni $(x,y) \in$ cerchio con
centro (x_0,y_0)
e raggio ε tranne al
+ il centro



Il cerchio di solito si indica con

BALL $\rightarrow B_\varepsilon(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}((x, y), (x_0, y_0)) \leq \varepsilon\}$

In notazione vettoriale, indico il centro con $x_0 \in \mathbb{R}^2$

$B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - x_0\| \leq \varepsilon\}$

Annotations:
 x_0 : vettore
 x : vettore
 $\mathbb{R}^2$: posso mettere anche in
 $\|x - x_0\|$: vettore
 ε : numero

Definizione di $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = +\infty$ ridotta in forma vettoriale

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ se $\forall M \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0$ t.c.
 $f(x) \geq M \quad \forall x$ t.c. $0 < \|x - x_0\| \leq \varepsilon$

Annotations:
 $x \rightarrow x_0$: x (vettore), x_0 (vettore)
 $f(x)$: numero
 $\forall x$: vettore
 $\|x - x_0\|$: vettore

FUNZIONE CONTINUA: una funzione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è continua nel punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Annotations:
 $x \rightarrow x_0$: x (vettore), x_0 (vettore)
 $f(x)$: numero
 $f(x_0)$: numero

Tutte le funzioni ottenute a partire da x e y e facendo operaz. alg., composizioni, ... sono continue dove non presentano problemi burocratici

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x + 3e^{xy} - \cos y}{5 + \arctan(x+y)} = \frac{2}{5}$

Non ci sono problemi burocratici, quindi basta sostituire $(0,0)$

Esempio 1

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^4}{x^2 + y^2} \quad \left[\frac{0}{0} \right]$$

Frazione ≤ 1

$$0 \leq \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot y^4 \leq y^4$$

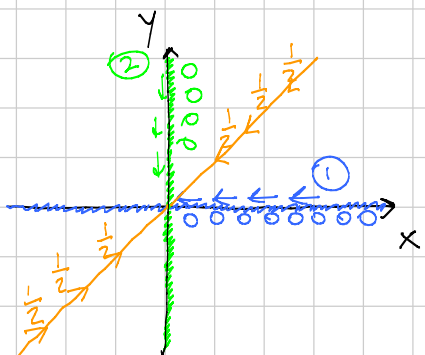
carab. $\downarrow$ 0

posso sostituire $\downarrow$ 0

MORALE : in più variabili "i limiti hanno pochissima voglia di esistere"

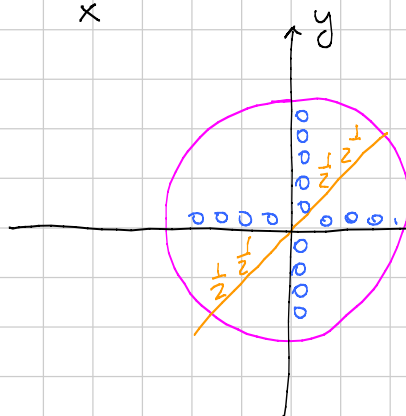
Esempio 2

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = ?$$



Osservo ① vede $f(x,0) = 0$

Osservo ③ vede $f(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$



In ogni cerchio con centro in $(0,0)$ e raggio anche piccolissimo ci sono sempre punti in cui $f=0$ e punti in cui $f = \frac{1}{2}$

MAT I TLC

Titolo nota

ORA 58

10/11/2006

 $f(x, y)$
 $\uparrow \uparrow$
 numeri

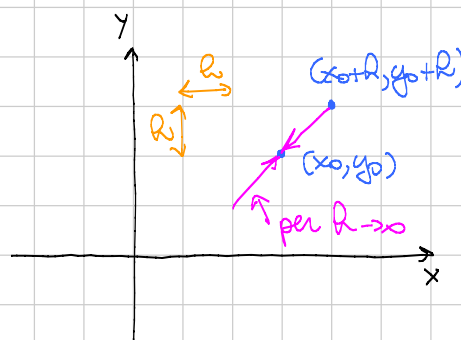
 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x)$
 $\uparrow$
 vettore

 $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$
 numeri

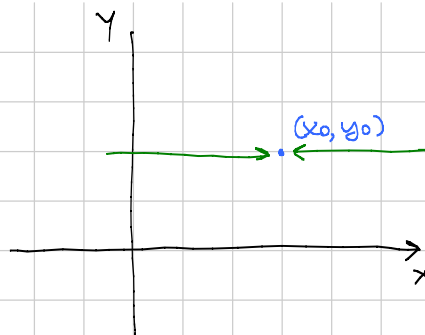
DERIVATE PARZIALI E DIREZIONALI

Sia $f(x, y)$ e sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$



se esiste ed è reale si dice

DERIVATA PARZIALE RISPETTO A x
nel punto (x_0, y_0) e si indica con

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$f_x(x_0, y_0).$$

Analogamente $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$

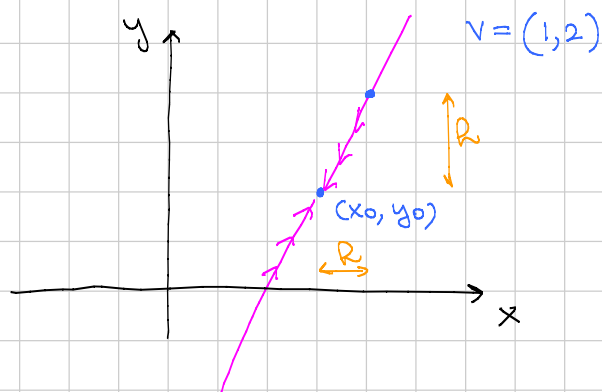
Più in generale posso fissare un vettore $V = (\alpha, \beta)$ $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ e considerare

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha h, y_0 + \beta h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

se esiste ed è $\in \mathbb{R}$ si dice

DERIVATA DI f LUNGO
LA DIREZIONE V e
si indica con

$$\frac{\partial f}{\partial V}(x_0, y_0)$$



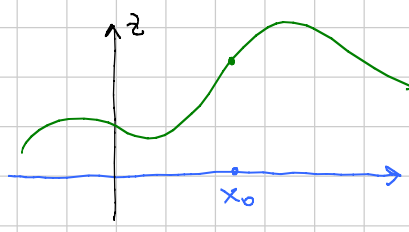
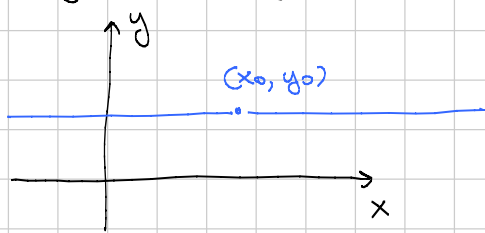
Le derivate parziali sono esempi particolari di derivate direz.

f_x è la derivata nella direzione data da $(1, 0)$] BASE
 f_y " " " " $(0, 1)$] CANONICA

Der. direz. in notazione vett. $x_0 \in \mathbb{R}^2$ (idem se $x_0 \in \mathbb{R}^n$)
 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hV) - f(x_0)}{h}$$

Significato geometrico delle derivate pars. e direz.



La derivata parziale è la derivata nel punto x_0 della funzione di 1 variabile che rappresenta la quota di un omnis che percorre la linea passante per (x_0, y_0) e // asse x sul grafico

— o — o —

Cosa succede se prendo $v = (2, 0)$?

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2h, y_0) - f(x_0, y_0)}{2h} \cdot 2 = 2 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Conseguenza: le derivate direzionali + interessanti sono quelle corrispondenti a direzioni date da vettori (tutte le altre sono semplicemente dei multipli)

— o — o —

Come si calcolano ?

$$f(x, y) = x^2 + 3xy - 5y^4 \quad x^2 + 3kx - 5k^4$$

$$f_x = 2x + 3y$$

$$f_y = 3x - 20y^3$$

$$f_{xx} = 2, \quad f_{xy} = 3, \quad f_{yx} = 3, \quad f_{yy} = -60y^3$$

— o — o —

$$f(x, y) = x \sin y^2$$

$$f_x = \sin y^2$$

$$f_y = x \cdot \cos y^2 \cdot 2y = 2xy \cos y^2$$

$$f_{xx} = 0, \quad f_{xy} = 2y \cos y^2, \quad f_{yx} = 2y \cos y^2, \quad f_{yy} = 2x [y \cos y^2]' = 2x [\cos y^2 - y \cdot \sin y^2 \cdot 2y]$$

A priori uno può aspettarsi che le derivate parziali di una funz. di 2 variabili sono

deriv. prime $\rightarrow 2$
 " seconde $\rightarrow 4$
 " terze $\rightarrow 8$
 " k-esime $\rightarrow 2^k$

e per una funz. di n variabili
 le deriv. k-esime sono
 n^k

Teorema di inversione dell'ordine di derivazione. Nei casi decenti,

si ha che $f_{xy} = f_{yx}$

diciamo se f_{xy} e f_{yx} esistono e sono continue

Conseguenza Anche per una derivata k-esima di una funzione di n variabili quello che conta è quante volte si deriva rispetto a ciascuna variabile, e non l'ordine in cui si eseguono le derivate.

Esempio $n=2$ $k=4$ derivate quante. Quante e quali sono?

$$f_{xxxx} = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$$

$$f_{yyyy} = \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} = f_{xxx y} = f_{xxyx} = f_{xyxx} = f_{yxxx}$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} = f_{xyyy} = f_{yxyy} = f_{yyxy} = f_{yyyx}$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = f_{xxyy} = f_{xyxy} = f_{xyyx} = f_{yxyx} = f_{yyxx}$$

In generale le deriv. k-esime di una funz. di 2 variabili sono $k+1$ (risp. a x posso derivare $0, 1, 2, \dots, k$ volte) $k+1$ possibilità

MAT I TLC

ORA 59

GRADIENTE, DIFFERENZIALE, PIANO TANGENTE

In 1 variabile $f(x_0 + R) = f(x_0) + f'(x_0)R + o(R)$ 

In 2 variabili:

$$f(x_0 + R, y_0 + K) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)R + f_y(x_0, y_0)K + o(\sqrt{R^2 + K^2})$$

Una funzione $r(R, K)$ è $o(\sqrt{R^2 + K^2})$ se

$$\lim_{(R, K) \rightarrow (0, 0)} \frac{r(R, K)}{\sqrt{R^2 + K^2}} = 0 \quad [\text{Limite in 2 variabili}]$$

Se succede la formula riquadrata si dice che f è differeziabile in (x_0, y_0) .

N.B. In più variabili può succedere che una funzione $f(x, y)$ abbia in un p.to (x_0, y_0) tutte le derivate parziali e direzionali, ma tuttavia non sia differenziabile e neppure continua in (x_0, y_0) .

GRADIENTE

Il gradiente di f nel p.to (x_0, y_0) è il ettore che ha come componenti le derivate parziali di f nel punto

$$\nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$$

↑
NABLA

$$f(x_0 + R, y_0 + K) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)R + f_y(x_0, y_0)K + o(\sqrt{R^2 + K^2})$$

$\underbrace{(f_x, f_y) \cdot (R, K)}_{\substack{\uparrow \\ \text{prod. scalare}}} \quad \underbrace{\sqrt{R^2 + K^2}}_{\| (R, K) \|}$
 $\uparrow$
 ∇f

Riscriviamo tutto in notazione vettoriale.

$f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^m$, $R \in \mathbb{R}^m$ $R = (R_1, \dots, R_m)$ incremento

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + \underbrace{\nabla f(x_0)}_{\text{GRADIENTE}} \cdot R + o(\|R\|)$$

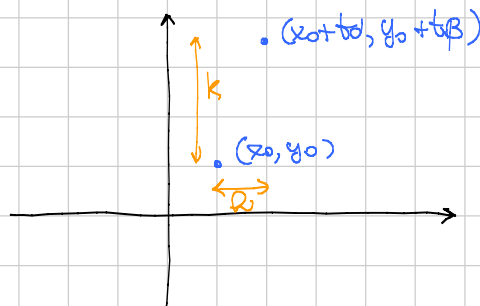
$\uparrow$
 prod. scalare tra vettori m -dimensionali

GRADIENTE E DERIVATE DIREZIONALI

$$f(x_0 + R, y_0 + K) = f(x_0, y_0) + f_x(\cdot)R + f_y(\cdot)K + o(\sqrt{R^2 + K^2})$$

Quando mi muovo nella dir. data da $v = (\alpha, \beta)$
 ho che $R = t\alpha$ $K = t\beta$ (con t che poi tenderà a 0)

$$f(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta) = f(x_0, y_0) + f_x(\cdot)t\alpha + f_y(\cdot)t\beta + o(t)$$



$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta) - f(x_0, y_0)}{t} = f_x(x_0, y_0)\alpha + f_y(x_0, y_0)\beta$$

$(f_x, f_y) \cdot (\alpha, \beta)$

Noto le derivate parziali e la direzione v , posso calcolare la derivata nella direz. v .

In notaz. vettoriale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) &= \underbrace{\nabla f(x_0)}_{\substack{\uparrow \\ \text{prod. scalare}}} \cdot \underbrace{v}_{\substack{\uparrow \\ \text{angolo compreso}}} \\ &= \|\nabla f(x_0)\| \cdot \|v\| \cdot \cos \theta \end{aligned}$$

prodotti di numeri

Limitiamoci alle direzioni date dai vettori $\|v\|=1$.

La deriv. direz. dipende solo dal coseno dell'angolo compreso

In particolare: $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$ è MASSIMA quando $\cos \theta = 1$, cioè quando $\theta = 0$, cioè quando la dir. v è // al gradiente con lo stesso verso;

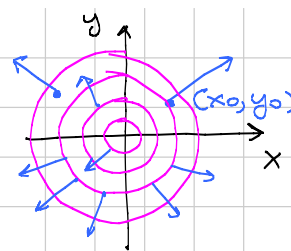
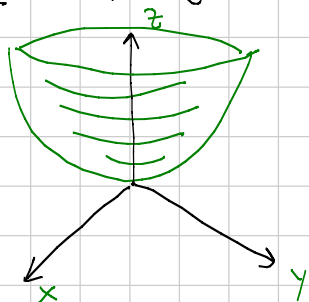
$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$ è MINIMA quando $\theta = 180^\circ$, cioè quando v è parallelo al gradiente, ma nella direz. opposta

$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = 0$ quando $v \perp \nabla f$.

↑
perp.

SIGNIFICATO GEOMETRICO DEL GRADIENTE È la direzione andando nella quale la funzione sale maggiormente

Esempio 1 $f(x,y) = x^2 + y^2$



Come sono messi gradiente e linee di livello?

∇f è $\perp$ alle linee di livello e punta nella direzione in cui λ sale

$$\nabla f(0,0) \quad \nabla f(x,y) = (2x, 2y) \quad \nabla f(0,0) = (0,0)$$

MAT I TLC

ORA 60-61 → MISSING

Titolo nota

ORA 62

22/11/2006

Teo. WEIERSTRASS : $A \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto (chiuso + limitato)
 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ continua.
 Sotto queste ipotesi esistono max e min di f in A .

Ricerca p.ti max / min

↗ p.ti stat. interni : $\nabla f = 0$ ↘ p.ti sing. interni : ∇f N.E.↘ Bordo di A → metodo PARAMETRIZZAZIONE

→ metodo dei MOLTIPLICATORI di LAGRANGE

Def. Sia $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. L'insieme

$$V = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \Phi(x,y) = 0 \}$$

l'equazione che descrive
l'insieme V

si dice LUOGO DI ZERI della funzione Φ .

Esempio V = cerchio con centro in $(0,0)$ e raggio 1.

Equazione $x^2 + y^2 = 1$

$$\underbrace{x^2 + y^2 - 1 = 0}_{\Phi(x,y)}$$

Teorema del moltiplicatore di LAGRANGE

Sia V il luogo di zeri di una funzione $\Phi(x,y)$. Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Allora i p.ti di max / min della funzione f nell'insieme V si trovano in una delle seguenti 2 categorie

* soluzioni del seguente sistema (1° sistema)

$$\begin{cases} \phi_x = 0 \\ \phi_y = 0 \\ \phi = 0 \end{cases}$$

Questo sistema cerca i p.ti
di V in cui $\nabla \phi$ si annulla

3 equazioni

2 incognite: (x, y)

↓

IN GENERALE NON
CI SONO SOLUZIONI

* punti di V in cui ∇f è multiplo di $\nabla \phi$, cioè

$$\nabla f = \lambda \nabla \phi$$

↑ NUMERO (il Moltiplicatore)

Questo si riduce a risolvere il sistema (2° sistema)

$$\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases}$$

} $\nabla f = \lambda \nabla \phi$
} stare in V

3 equazioni

3 incognite: x, y, λ

⇒ IN GENERALE HA NUMERO
FINITO DI SOLUZIONI

Operativamente. Stiamo considerando un problema di max/min.
Il bordo dell'insieme è un certo V con
equazione $\phi(x, y) = 0$.

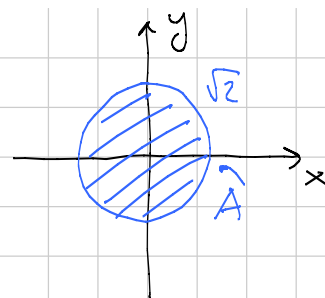
Risolvero il 1° sistema; le eventuali solus. le metto fra i
candidati ad essere p.ti di max/min.
PUNTI SINGOLARI SUL BORDO

Risolvero il 2° sistema: trovo varie terne x, y, λ . Dimentico il λ ,
e le coppie (x, y) risultanti le includo
fra i candidati.

PUNTI STAZIONARI RELATIVAMENTE AL BORDO
(non sono p.ti in cui $\nabla f = 0$)

Esempio 1

$$\begin{array}{l} \max \\ \min \end{array} \left\{ \underbrace{x+2y}_{f(x,y)} : \underbrace{x^2+y^2 \leq 2}_{\text{Descrizione insieme}} \right\}$$



* $W \Rightarrow$ max e min esistono

* sing. interni : $\emptyset$

* stat. interni : $\nabla f(x,y) = (1, 2)$
non si annulla mai : $\emptyset$

* bordo : è la circonferenza di equazione $x^2+y^2=2$, cioè

$$\underbrace{x^2+y^2-2}_{\phi(x,y)} = 0$$

Risolvere i 2 sistemi

1° SISTEMA

$$\begin{cases} \phi_x = 0 \\ \phi_y = 0 \\ \phi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ x^2+y^2 = 2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \rightarrow x=0 \\ \rightarrow y=0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{INCOMP.} \\ \text{con 3° eq.} \end{array} \right\}$$

2° SISTEMA

$$\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 2 = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 2 \end{cases}$$

$$1^a \text{ eq} \rightarrow x = \frac{1}{2\lambda}$$

$$2^a \text{ eq} \rightarrow y = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{Sostituisco nella 3}^a \rightarrow \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 2 \Rightarrow \frac{5}{4\lambda^2} = 2$$

$$x^2 + y^2 = 2$$

$$8\lambda^2 = 5$$

$$\lambda^2 = \frac{5}{8}$$

$$\lambda = \pm \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$$

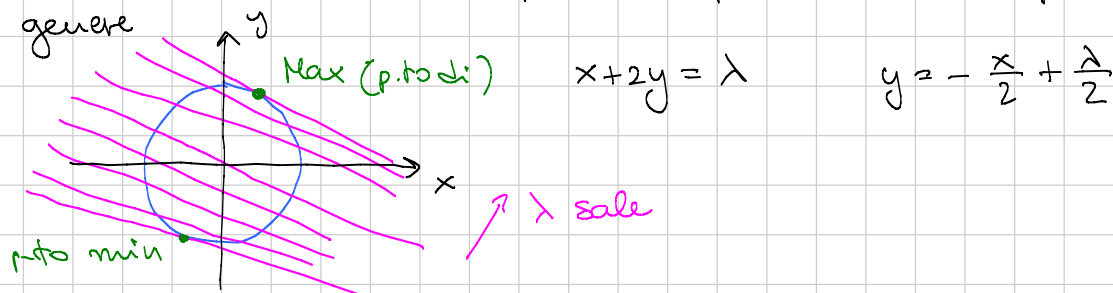
$$\lambda = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \Rightarrow y = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

$$\lambda = -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \Rightarrow y = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

I candidati sono $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$

Uno sarà p.to di max, uno sarà p.to di min.

Con le linee di livello potevamo prevedere un comport. del genere



Esempio 2 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ $f(x,y) = 3x^2 + y$

$$\max_{\min} \{f(x,y) : (x,y) \in A\}$$

$W \Rightarrow$ max e min esistono

$$\nearrow \text{stab. int.} : \nabla f(x,y) = (6x, 1) : \emptyset$$

$$\searrow \text{sing. int.} : \emptyset$$

Bordo : equazione del bordo

$$\underbrace{x^2 + y^2 - 1 = 0}_{\phi(x,y)}$$

1° SISTEMA

$$\begin{cases} \phi_x = 0 \\ \phi_y = 0 \\ \phi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Nessuna soluz.

2° SISTEMA

$$\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases}; \begin{cases} 36x = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \leftarrow \text{NON SEMPLIFICARE LA } x$$

$$1^a \text{ eq. } x(3-\lambda) = 0$$

$$x=0$$

$$\downarrow 3^a \text{ eq.}$$

$$y = \pm 1$$

$$(0,1), (0,-1)$$

Non serve
memorizzare
trovare λ

$$\lambda = 3$$

$$\downarrow 2^a \text{ eq.}$$

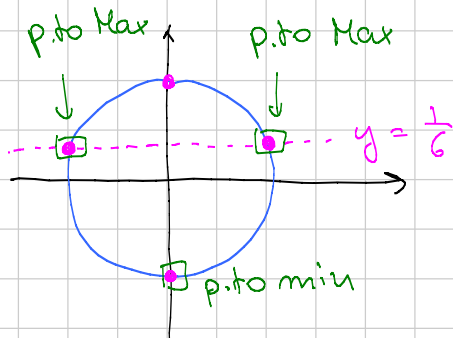
$$1 = 6y \Rightarrow y = \frac{1}{6}$$

$$\downarrow 3^a \text{ eq.}$$

$$x^2 + \frac{1}{36} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{35}{36}$$

$$\left(\frac{\sqrt{35}}{6}, \frac{1}{6}\right), \left(-\frac{\sqrt{35}}{6}, \frac{1}{6}\right) \leftarrow \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{35}}{6}$$

Ho ottenuto 4 candidati che valgo a seguire nell'insieme A



$$f(0,1) = 1$$

$$f(0,-1) = -1$$

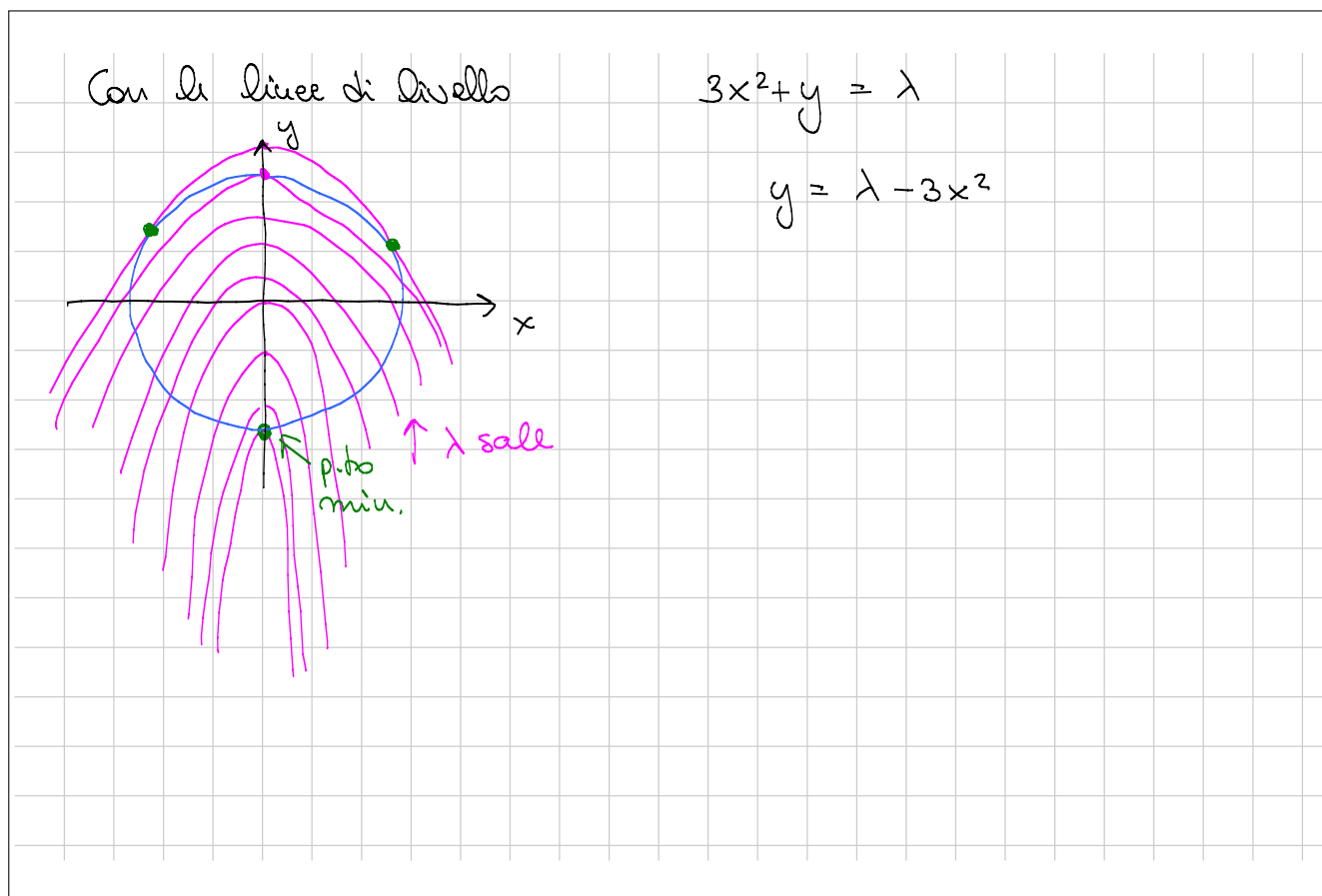
$$\begin{aligned} f\left(\pm \frac{\sqrt{35}}{6}, \frac{1}{6}\right) &= 36 \cdot \frac{35}{36} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{35}{12} + \frac{1}{6} = \frac{37}{12} \end{aligned}$$

$$\max = \frac{37}{12}$$

$$\text{p.ti di max} \quad \left(\pm \frac{\sqrt{35}}{6}, \frac{1}{6}\right)$$

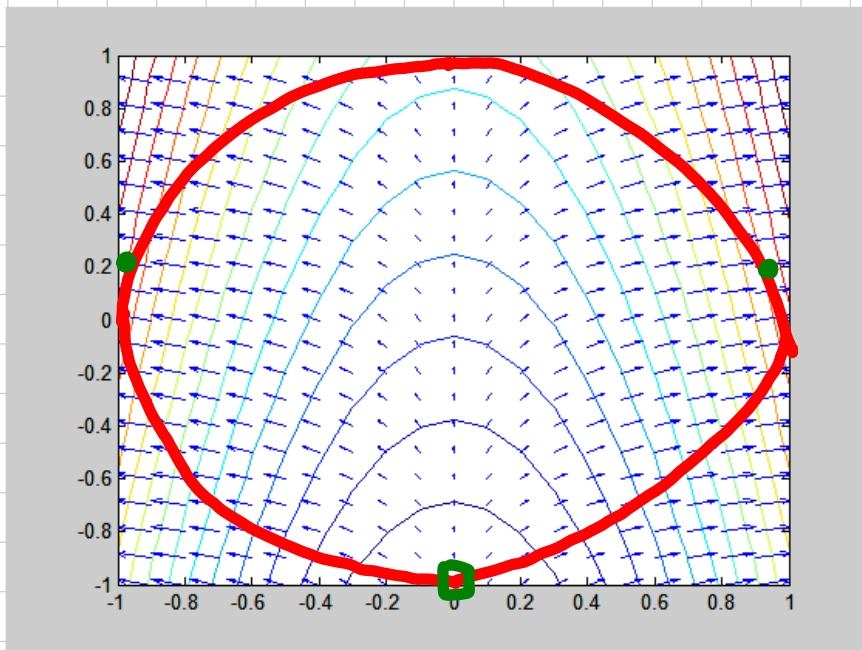
$$\min = -1$$

$$\text{p.to di min} \quad (0,-1)$$



MAT I TLC

ORA 63



$$\nabla f(x,y) = (6x, 1)$$

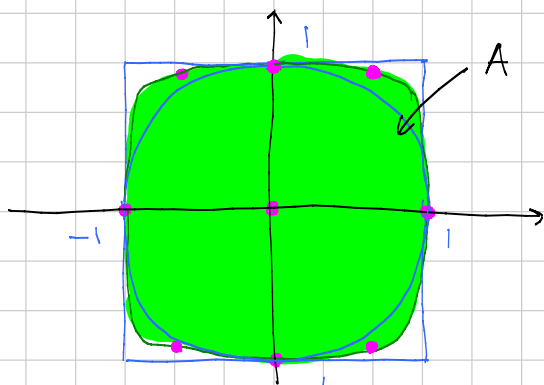
Esempio 3 $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 \leq 1\}$

Come è fatto l'insieme A ? Si vede che

$$x \in [-1, 1] \text{ e } y \in [-1, 1]$$

$\Rightarrow$ l'insieme A è contenuto nel quadrato $[-1, 1] \times [-1, 1]$

$\Rightarrow A$ è limitato



Dico che il cerchio $\subseteq A$
Sia infatti $(x,y) \in$ cerchio

$$x^2 + y^2 \leq 1. \text{ Ma allora}$$

$$x^4 + y^4 \leq x^2 + y^2 \leq 1$$

perché x, y stanno in $[-1, 1]$

Ogni punto del cerchio è anche punto dell'insieme A

Discorso analogo vale per gli insiemi

$$x^k + y^k \leq 1 \quad \text{con } k \text{ esponente PAR}$$

$\Rightarrow$ Max / min esistono

Sing. int. : $\emptyset$; stat. int. : $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0)$

Bordo : è l'insieme di equazione $\underbrace{x^4 + y^4 - 1 = 0}_{\phi(x,y)}$

1° SISTEMA $\begin{cases} \phi_x = 0 \\ \phi_y = 0 \\ \phi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 4y^3 = 0 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{NO SOLUZIONI}$

2° SISTEMA $\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2\lambda x^3 \\ 4y = 4\lambda y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1 - 2\lambda x^2) = 0 \\ y(1 - \lambda y^2) = 0 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$

1ª eq. $x(1 - 2\lambda x^2) = 0$

$\swarrow$ $x = 0$ $\searrow$ $1 - 2\lambda x^2 = 0$

$\downarrow$ 3ª eq. $y^4 = 1$ $\downarrow$ 2ª eq. $y(1 - \lambda y^2) = 0$

$y = \pm 1$ $\swarrow$ $y = 0$ $\searrow$ $1 - \lambda y^2 = 0$

$$\downarrow$$

$$(0,1), (0,-1)$$

$$\downarrow 3^a \text{ eq.}$$

$$x^4 = 1$$

$$x = \pm 1$$

$$\downarrow$$

$$(1,0), (-1,0)$$

$$\downarrow$$

$$x^2 = \frac{1}{2\lambda}, y^2 = \frac{1}{\lambda}$$

$$\downarrow 3^a \text{ eq.}$$

$$x^4 + y^4 = 1$$

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1$$

$$\frac{5}{4\lambda^2} = 1 \quad \lambda^2 = \frac{4}{5}$$

$$\lambda = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

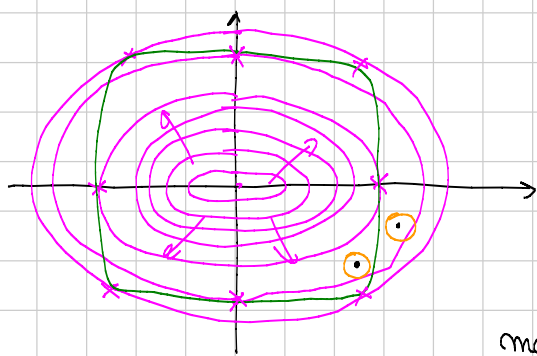
Se $\lambda = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $x^2 = \frac{1}{2\lambda} < 0$
 $y^2 = \frac{1}{\lambda} < 0 \Rightarrow$ No SOLUZ.

Se $\lambda = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $x^2 = \frac{\sqrt{5}}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt[4]{5}}{2}$
 $y^2 = \frac{1}{\lambda} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt{2}}$

4 punti
permutando
i segni

Sostituendo si vede quali sono max/min.

linee di livello $x^2 + 2y^2 = \lambda$ famiglia di ellissi



Perché ero sicuro che il sistema 2° aveva almeno 2 soluzioni?

Consideriamo il problema

$$\max \{x^2 + 2y^2 : x^4 + y^4 = 1\}$$

$$\min$$

L'insieme è il solo bordo

Il solo bordo è limitato ed è chiuso

$\Rightarrow$ max e min sul bordo esistono $\Rightarrow$ devo avere almeno 2 soluzioni tra il 1° ed il 2° sistema.

Utilizzo misto di param. e moltiplicatori

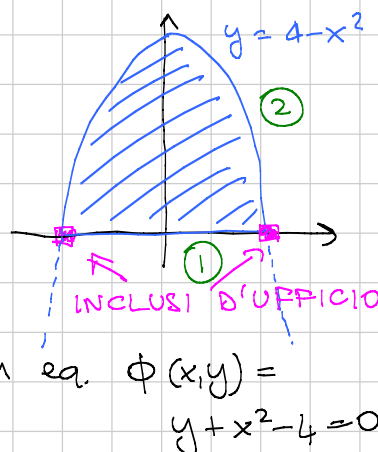
$$\begin{array}{l} \max \\ \min \end{array} \{ x^2 + y^2 - 2y : 0 \leq y \leq 4 - x^2 \}$$

Uno vorrebbe:

→ usare la param. sul pezzo ①

→ usare i moltiplicatori sul pezzo ② con eq. $\phi(x,y) = y + x^2 - 4 = 0$

Si può fare, ma



1° bisogna scartare i candidati che vengono a trovarsi nella parte di parabola non compresa nel pezzo ②

2° bisogna includere d'UFFICIO gli estremi del pezzo considerato (BORDO DEL BORDO)

Auremmo dovuto risolvere i sistemi

1° SISTEMA ... $\Rightarrow$ NO SOLUZIONI

2° SISTEMA

$$\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases} ; \begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ 2y - 2 = \lambda \\ y = 4 - x^2 \end{cases} \quad x(\lambda - 1) = 0$$

$$\begin{array}{l} x(\lambda - 1) = 0 \\ \swarrow \quad \searrow \\ x = 0 \quad \lambda = 1 \\ \downarrow 3^a \text{ eq.} \quad \downarrow 2^a \text{ eq.} \\ y = 4 \quad 2y - 2 = 1 ; 2y = 3 ; y = \frac{3}{2} \\ \downarrow \\ (0, 4) \quad \downarrow 3^a \text{ eq.} \\ x = \pm \dots \end{array}$$

Esempio Boh? $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^3 = x^2 \}$

$$\phi(x,y) = y^3 - x^2$$

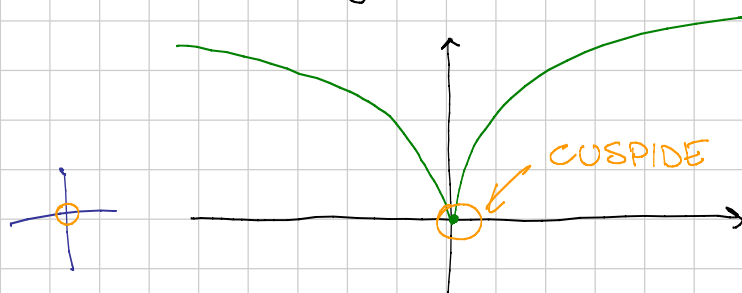
1° SISTEMA

$$\begin{cases} \phi_x = 0 \\ \phi_y = 0 \\ \phi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x = 0 \\ 3y^2 = 0 \\ y^3 = x^2 \end{cases} \Rightarrow (0,0) \text{ è soluzione del sistema}$$

$$y^3 = x^2$$

$$y = \sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$$

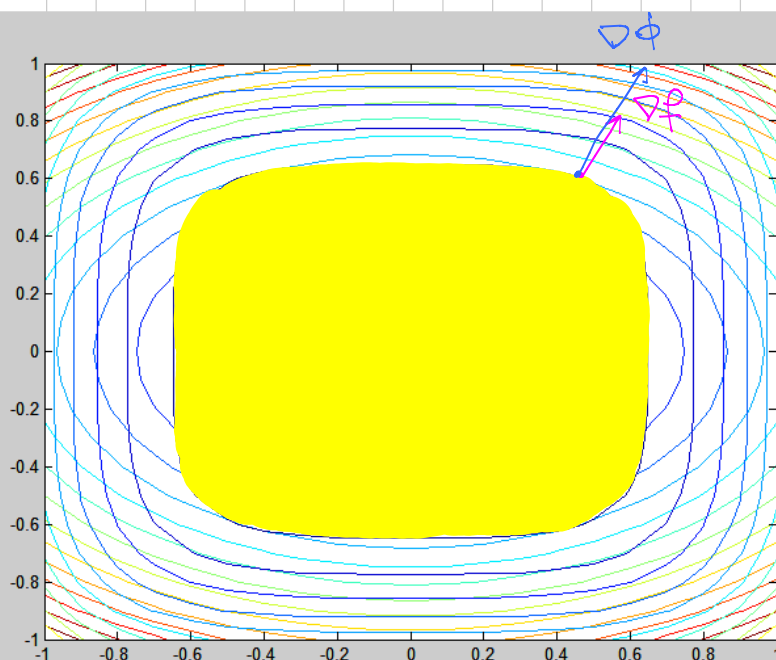
FUNZIONE PARI



Brutalmente: le soluzioni del 1° sistema di solito corrispondono a "brutture" dell'insieme $\phi(x,y) = 0$

MAT I TLC

ORA 64



Nei p.ti di max/min
sul bordo le linee
di livello di f sono
tangenti al bordo
stesso

$\nabla f \perp$ linea di livello
di f

$\nabla \phi \perp$ linea di livello
di ϕ , cioè al bordo
Essendo $\perp$ a 2 linee
tra di loro tangenti,
saranno per forza
paralleli

Cosa accade se A NON è limitato?

Weierstrass non vale +, quindi max/min possono anche non
esistere. INF e SUP esistono comunque.

Esempio 1 $f(x, y) = x^2 + y^2$ $A = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$ ($y=0, x$ enorme) max N.E.

$\inf = \min = 0$ p.to di min = $(0, 0)$

($f(0, 0) = 0$, $f(x, y) > 0$ per ogni $(x, y) \neq (0, 0)$)

Esempio 2 $f(x, y) = x^2 - y^2$ $A = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$ ($y=0, x$ enorme)

$\inf = -\infty$ ($x=0, y$ enorme)

Max e min N.E.

Esempio 3 $f(x,y) = x^{63} + y^{36}$ $A = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$ ($y=0, x$ enorme)

Max e min N.E.

$\inf = -\infty$ ($y=0, x$ enormemente negativo)

Esempio 4 $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3xy$ $A = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$ ($y=0, x$ enorme)

$\inf = -\infty$ ($y=x, x$ enorme)

$f(x,x) = x^2 + x^2 - 3x^2 = -x^2$

Esempio 5 $f(x,y) = x^2 + y^2 + 5xy$ $A = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$ ($y=0, x$ enorme)

$\inf = -\infty$ ($y=-x, x$ enorme) $\rightarrow$ diventa $x^2 + x^2 - 5x^2 = -3x^2$

Esempio 6 $f(x,y) = xy$ $A = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$ ($y=x, x$ enorme) $\rightarrow$ DIVENTA x^2

$\inf = -\infty$ ($y=-x, x$ enorme) $\sim -x^2$

in alternativa ($y=1 \rightarrow x$ enorme
 $\rightarrow x$ enorm. neg.)

Esempio 7 $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$ $A = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty \dots \inf = \min = 0$ p.to di min: $(0,0)$

È ovvio che $f(0,0) = 0$. Devo dim. che $f(x,y) > 0$ per ogni $(x,y) \neq (0,0)$.

$x^2 + xy + y^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{y}{2} + \frac{y^2}{4} - \frac{y^2}{4} + y^2$
AGGIUNTO E TOLTO

$$= \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$$

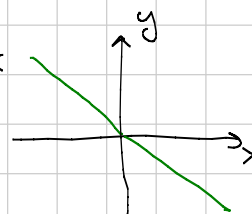
È chiaro che $f(x,y) \geq 0$ sempre ed è $=0 \Leftrightarrow$ i 2 termini sono $=0$, cioè se

$$\begin{cases} x + \frac{y}{2} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{L'unica solus. è } (0,0)$$

Esempio 8 $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$ $A = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$, $\inf = \min = 0$ p.ti di min: tutta la retta $y = -x$

$$f(x,y) = (x+y)^2 = 0 \Leftrightarrow x+y=0 \Leftrightarrow y=-x$$



Esempio 9 $f(x,y) = e^x + e^y$ $A = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$ ($y=x$, x enorme) $\max$ N.E.
 $\inf = 0$ $\min$ N.E.

① $f(x,y) > 0$ sempre $e^x + e^y > 0 + 0 = 0$

② $y=x \leadsto$ DIVENTA $2e^x$ x enorm. neg.

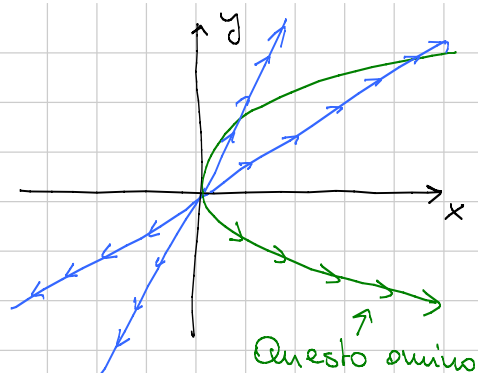
Esempio 10 $f(x,y) = x^2 + y^4 + x^2y$ $A = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty \dots$ Provo $y = -x \leadsto$ DIVENTA $x^2 + x^4 - x^3$
 comando x^2 per $x \rightarrow \pm\infty$

Provo + in generale $y = ux \leadsto$ DIVENTA $x^2 + u^4x^4 - ux^3$
 su ogni retta la funzione tende a $+\infty$ "dai 2 lati"

Prendo $x = y^2$... DIVENTA

$y^4 + y^4 + y^5$ prendo y enorm.
neg. e vado a $-\infty$
perché comanda y^5



Esempio 11 $f(x, y) = x^2 + y^4 + xy^2$

$\inf = \min = 0$ p.to di min: $(0, 0)$

$$\begin{aligned} x^2 + xy^2 + y^4 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4} - \frac{y^4}{4} + y^4 \\ &= \left(x + \frac{y^2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^4 \geq 0 \text{ sempre} \end{aligned}$$

PIANO TANGENTE

In 1 variabile

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$$

$h = x - x_0$

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

eq. retta tangente

In 2 variabili

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k + o(\quad)$$

$\downarrow h = x - x_0 \quad \downarrow k = y - y_0$

EQ. PIANO
TANGENTE

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

MAT I TLC

ORA 65

Titolo nota

23/11/2006

Calcolo integrale

- integrali propri in 1 variabile
- " impropri -1
- " in + variabili (2 o 3)
- equazioni differenziali

INTEGRALI

- ① Come si indicano
- ② Significato geometrico
- ③ Come si definiscono (definirebbero)
- ④ Come si calcolano

① Notazioni tegnoleenti :

* un intervallo $[a, b]$ (limitato) BONA DI INTEGRAZIONE

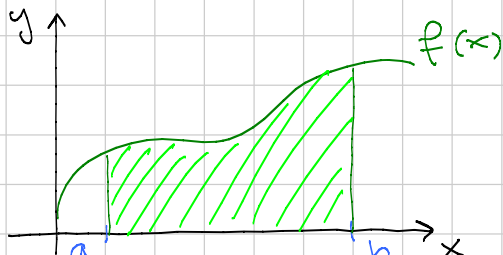
* una funzione $f: [a, b]$ limitata INTEGRANDA

$$\int_a^b f(x) dx$$

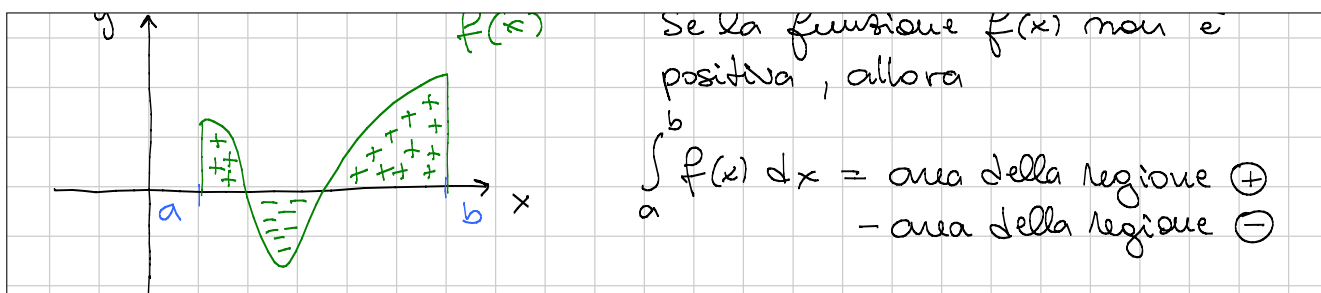
↑ ricorda la variabile rispetto a cui si integra

Stilizzazione del simbolo S che sta per "somma"

② SIGNIFICATO GEOMETRICO : $\int_a^b f(x) dx =$



= area CON SEGNO
della parte di piano compresa
tra grafico di f e
asse x

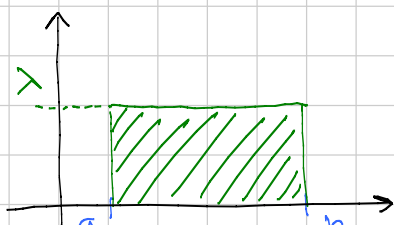


③ IDEE DELLA DEFINIZIONE

3 casi $\begin{cases} \nearrow \text{caso BANALE} \\ \rightarrow \text{caso SEMI BANALE} \\ \searrow \text{caso GENERALE} \end{cases}$

Caso banale

$f(x)$ è uguale ad una costante $\lambda \forall x \in [a, b]$

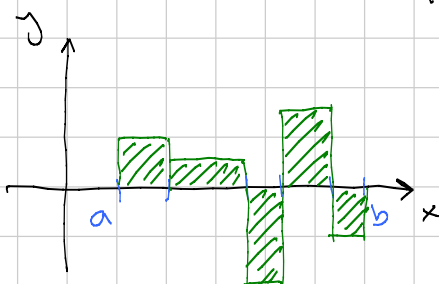


$$\int_a^b f(x) dx = \text{area CON SEGNO del rettangolo} = \lambda (b-a)$$

↑
altezza con segno ↑
base

Caso semibanale

L'intervallo $[a, b]$ è suddiviso in un numero finito di sottointervalli, su ciascuno dei quali f è costante



In questo caso si pone

$$\int_a^b f(x) dx = \text{somma algebrica delle aree con segno dei sottorettangoli.}$$

Le funzioni di questo tipo si chiamano

FUNZIONI SEMPLICI

" A GRADINO

STEP FUNCTIONS

SINONIMI

Caso generale $f(x)$ è una qualunque funzione limitata.

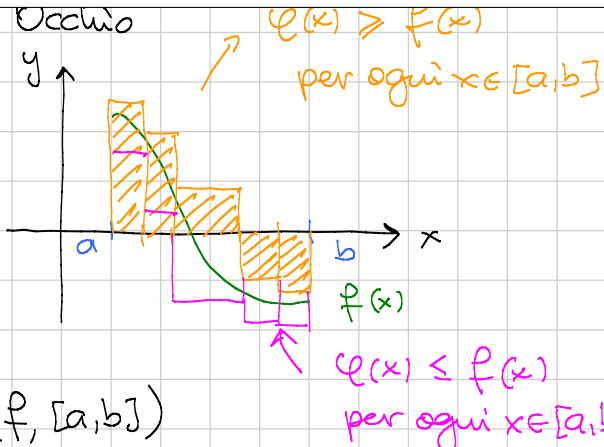
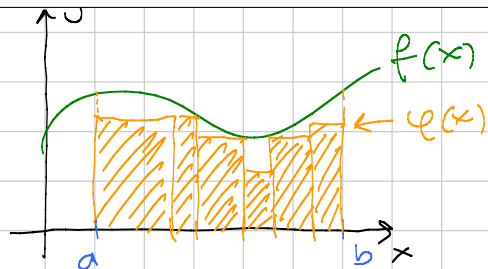


Definiamo l'integrale superiore di $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$

$$I^+(f; [a, b]) = \inf \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx : \varphi(x) \text{ è una funzione a gradini e } \varphi(x) \geq f(x) \text{ per ogni } x \in [a, b] \right\}$$

Analogamente si definisce l'integrale inferiore :

$$I^-(f; [a, b]) = \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x) dx : \varphi(x) \text{ è una funzione a gradini e } \varphi(x) \leq f(x) \text{ per ogni } x \in [a, b] \right\}$$



OSSERVAZIONE $I^+(f, [a, b])$ e $I^-(f, [a, b])$ sono **OBBLIGATI** ad esistere e si ha sempre che

$$I^-(f; [a, b]) \leq I^+(f; [a, b])$$

DEFINIZIONE Se accade che $I^-(f; [a, b]) = I^+(f; [a, b])$, allora si dice che $f(x)$ è **INTEGRABILE** (secondo RIEMANN) in $[a, b]$ e il valore comune è l'integrale cercato.

OSSERVAZIONI ① Esistono funzioni (ORRIBILI) per cui $\downarrow < \downarrow$,
cioè non tutte le funzioni sono integrabili

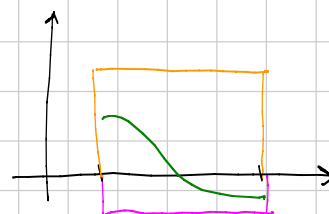
② Si potrebbe dimostrare che le seguenti classi di funzioni sono integrabili:

- * tutte le funzioni continue
- * tutte le funzioni monotone
- * tutte le funzioni con un numero finito di pti di discontinuità in cui esiste il limite da destra e da sinistra

③ Tutto quanto detto /scritto vale per funzioni limitate.
Abbiamo usato da qualche parte che $f(x)$ è limitata?

[S] serve per essere sicuri che esistano una funzione
a gradini $\geq f$ e una $\leq f$

SOMME DI RIEMANN: integrali delle
funzioni a gradino



ESTENSIONI DELLA DEFINIZIONE

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def.}}{=} - \int_b^a f(x) dx$$

N.B. $a < b$, quindi sto
mettendo gli estremi
al contrario.

PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b (\lambda f(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

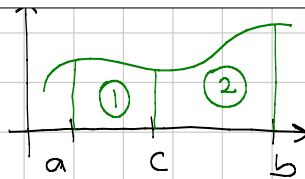
L'integrale tra
 a e b è
un'APPLICAZIONE
LINEARE
(da dove a dove?)

Se $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$, allora $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

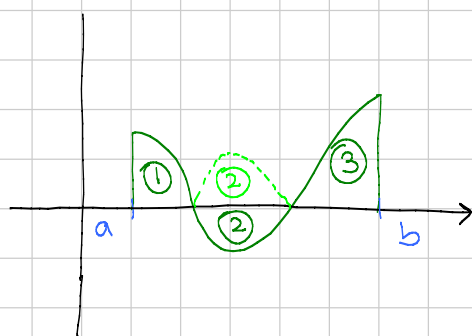
MONOTONIA

se $c \in (a, b)$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c \underset{\textcircled{1}}{f(x) dx} + \int_c^b \underset{\textcircled{2}}{f(x) dx}$$



$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$



$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| = |\textcircled{1} - \textcircled{2} + \textcircled{3}|$$

$$\int_a^b |f(x)| dx = \textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ are positive

MAT I TLC

ORA 66

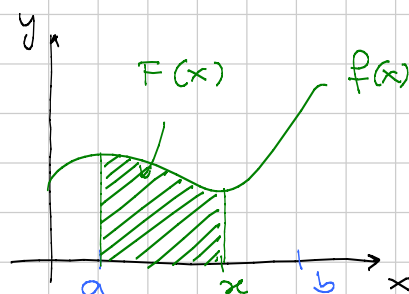
Tecniche di calcolo

- FUNZIONE INTEGRALE
- TEO. MEDIA INTEGRALE
- TEO. FONDAMENTALE DEL CALCOLO INT.
- PRIMITIVE

FUNZIONE INTEGRALE

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

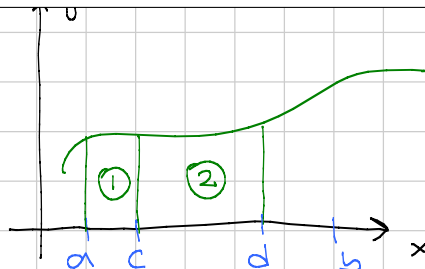
$\uparrow$ Funzione integrale
 $\uparrow$ variabile di integrazione, che posso chiamare come voglio

Dato un intervallo $[c, d] \subseteq [a, b]$ si ha che

$$\int_c^d f(x) dx = F(d) - F(c)$$

 $F(d) =$ integrale tra a e $d = \textcircled{1} + \textcircled{2}$ $F(c) =$ " " " a e $c = \textcircled{1}$

$$F(d) - F(c) = \textcircled{2} = \int_c^d f(x) dx$$



Conclusione: se conosco $F(x)$ so calcolare l'integrale di $f(x)$ tra ogni coppia di estremi.

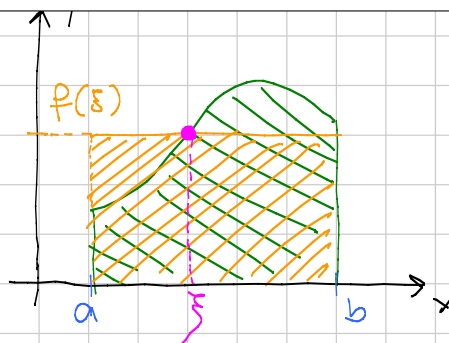
TEO. MEDIA INTEGRALESia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **CONTINUA**Allora esiste $\xi \in (a, b)$ tale che

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$$

Significato geometrico

$f(\xi) \cdot (b-a)$ = area di un rettangolo
che ha $[a, b]$ come
base e $f(\xi)$ come
altezza



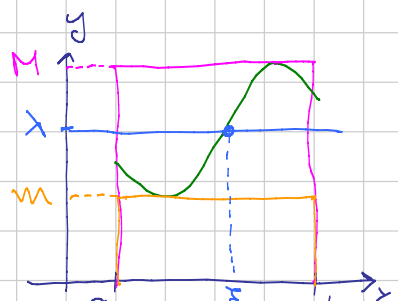
Teo. dice che esiste un rettangolo di
altezza $f(\xi)$ la cui area è uguale
all'area che sta sotto il grafico

Dim. Siano m e M il max ed il min di $f(x)$ in $[a, b]$. Allora

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

"
Area rettangolo
arancione

"
area rett.
rosa



Divido per $(b-a)$

$$m \leq \underbrace{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx}_{\text{numero } \lambda \text{ compreso tra il max ed il min di } f(x)} \leq M$$

Poiché f è continua, per il teo di esistenza degli zeri, esiste
almeno un punto ξ in cui f vale λ .

TEO. FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, e sia $F(x)$ la sua funzione
integrale, cioè

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

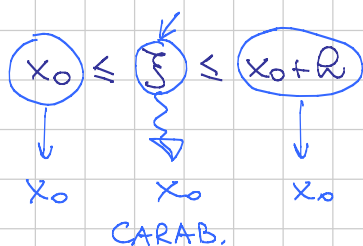
Allora F è derivabile e $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.

Dim. Prendiamo $x_0 \in [a, b]$ e calcoliamo

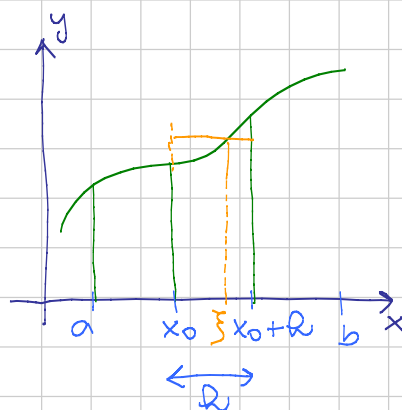
$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx$$

Teo. media integrale
applicato nell'interv. $\Rightarrow f(\xi)$
 $[x_0, x_0 + h]$

DIPENDE DA h



Quando $h \rightarrow 0$
succede



Quindi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \lim_{\xi \rightarrow x_0} f(\xi) = f(x_0)$$

" $F'(x_0)$

PRIMITIVE

Data una funzione $f(x)$ si dice PRIMITIVA una qualunque funzione $F(x)$ tale che

$$F'(x) = f(x)$$

OSS.

Ogni funzione CONTINUA ha una primitiva
(per il teo. fond. del calcolo integrale basta prendere la funzione integrale).

Operativamente : ① Se so calcolare la funzione integrale so calcolare l'int. tra ogni coppia di estremi
② La funzione integrale è una primitiva
③ Se io trovo una $F(x)$ tale che $F'(x) = f(x)$ posso dire di aver trovato la funzione integrale ?

NO! Le primitive sono tante a priori !!!! MA.....

TEO. Due primitive della stessa funzione continua su un intervallo $[a, b]$ differiscono tra di loro per una costante.

Dim: siano $F_1(x)$ e $F_2(x)$ 2 primitive della stessa $f(x)$.
Allora

$$F_1'(x) = f(x) \quad F_2'(x) = f(x)$$

$$(F_1 - F_2)'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

ma allora $F_1 - F_2$ è una costante.

Nota bene: se $g'(x) = 0$ in $[a, b]$, allora g è costante in $[a, b]$.

Dato un qualunque punto $c \in [a, b]$

$$f(c) - f(a) = \underbrace{f'(\xi)}_0 (c-a) \Rightarrow \text{in ogni punto } c \text{ il valore } f(c) \text{ è uguale a } f(a)$$

Conclusione: al posto della funzione integrale posso usare una qualunque primitiva per calcolare il valore di un integrale.

$$\int_c^d f(x) dx = F(d) - F(c) \quad F = \text{funz. integrale}$$

Se uso un'altra primitiva $G(x)$, questa abbiamo detto che è della forma $G(x) = F(x) + k$ $\leftarrow$ costante

$$G(d) - G(c) = F(d) + \cancel{k} - F(c) - \cancel{k} = \int_c^d f(x) dx$$

QUINDI: il calcolo degli integrali si riduce al calcolo di una primitiva di $f(x)$, cioè una funzione $F(x)$ tale che

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

↑
ANTIDERIVATIVE

MAT I TLC

ORA 67

25/11/2006

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = [F(x)]_{x=a}^{x=b}$$

dove $F(x)$ è una qualunque funzione tale che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$. Queste $F(x)$ si chiamano PRIMITIVE di $f(x)$

Esempio 1 $f(x) = x^2$ $F(x) = \frac{x^3}{3}$ è una primitiva di $f(x)$ su tutto $\mathbb{R}$

Per ogni valore della costante c la funzione

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + c \text{ è una primitiva della } f(x).$$

Ce ne sono altre? NO perchè abbiamo visto che su un intervallo 2 primitive differiscono per una costante.

Esempio 2 $f(x) = \frac{1}{x}$ $F(x) = \log x$ è una primitiva di $f(x)$ nell'insieme $x > 0$.

Domanda: poiché $\frac{1}{x}$ è def. $\forall x \neq 0$ ha senso cercare una funzione $F(x)$ tale che $F'(x) = f(x) \quad \forall x \neq 0$.

Risposta: una possibilità è $F(x) = \log|x|$. Per $x > 0$ non cambia nulla. Per $x < 0$

$$F(x) = \log|x| = \log(-x) \quad F'(x) = \frac{1}{-x} \overset{\substack{\text{derivata di } -x \\ \downarrow}}{(-1)} = \frac{1}{x}.$$

Come sono fatte tutte le primitive di $\frac{1}{x}$? Sono $F(x) = \log|x| + c$
NOOO!!!!

Sono

$$F(x) = \begin{cases} \log|x| + c_1 & \text{per } x > 0 \\ \log|x| + c_2 & \text{per } x < 0 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{posso usare} \\ \text{"2 c diversi"} \end{array} \right\}$$

Conclusione:

* mettere "+c" non serve per il calcolo di $\int_a^b f(x) dx$

* mettere "+c" non serve per determinare l'insieme di tutte le primitive (occorrono "c diversi" su ogni "pezzo" dell'insieme di definizione).

$\Rightarrow$ non ci sono ragioni valide per mettere "+c",

$\int f(x) dx$ = integrale INDEFINITO = sinonimo di primitiva
 ↑ senza
 estremi

CALCOLO DI PRIMITIVE

Casi banali: tabella delle derivate letta al contrario

$$\int e^x dx = e^x, \quad \int \cos x dx = \sin x, \quad \int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log |x|; \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x \quad \int \cosh x dx = \sinh x$$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} \quad \text{vale se } a \neq -1, \text{ se } a = -1 \text{ è } \int \frac{1}{x} dx \dots$$

Casi semibanali: $\int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3}$

$$\int \sin(5x) dx = -\frac{\cos(5x)}{5}; \quad \int \frac{1}{x+3} dx = \log |x+3|$$

$$\int \cos(x+2) dx = \sin(x+2); \quad \int \cos(2x+1) dx = \frac{\sin(2x+1)}{2}$$

$$\int \frac{1}{3x+2} dx = \frac{\log |3x+2|}{3} = \log \sqrt[3]{|3x+2|}$$

↑
PRECURSO

INTEGRAZIONE PER PARTI F, G $F' = f$ $G' = g$

$$[F \cdot G]' = F' \cdot G + F \cdot G' = f G + F g$$

$$F(b) \cdot G(b) - F(a) \cdot G(a) = [F(x) \cdot G(x)]_a^b =$$

Una funzione è l'integrale della sua derivata

$$= \int_a^b [F \cdot G]' dx = \int_a^b (f G + F g) dx$$

$$= \int_a^b f G dx + \int_a^b F g dx$$

$$\int_a^b f G dx = [F G]_a^b - \int_a^b F g dx$$

FORMULA DI
INTEGRAZIONE
PER PARTI

Esempio 1 $\int x e^x dx = e^x x - \int e^x \cdot 1 dx = x e^x - e^x$

G f $F G$ $F g$

DERIVARE
PER
CONTROLLO

Esempio 2 $\int x \cos x dx = x \sin x - \int 1 \cdot \sin x dx$

G f $G F$ $g F$

$$= x \sin x + \cos x$$

Esempio 3 $\int x^2 \sin x dx = x^2 (-\cos x) - \int (2x) (-\cos x) dx$

G f $G F$ $g F$

$$= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx$$

← Fatto sopra

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$$

Con questa tecnica si fanno tutti gli integrali del tipo

$$\int p(x) e^{\alpha x} dx, \quad \int p(x) \cos(\alpha x) dx, \quad \int p(x) \sin(\alpha x) dx$$

↑
polinomio in x

N.B. se il polinomio ha grado n , servono
 n passaggi per parti (il grado scende di 1
anni volta)

$$\int 3^x dx = \int e^{\log 3 \cdot x} dx = \frac{e^{\log 3 \cdot x}}{\log 3} = \frac{3^x}{\log 3}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} \quad (a > 0 \text{ e } a \neq 1)$$

— o — o —

Esempio 4

$$\begin{aligned} \int \log x \, dx &= \int \underset{f}{1} \cdot \underset{g}{\log x} \, dx = \underset{f}{x} \log x - \int \underset{f}{x} \cdot \underset{g}{\frac{1}{x}} \, dx \\ &= x \log x - \int 1 \, dx \\ &= x \log x - x \end{aligned}$$

Esempio 5 $\int \arctan x \, dx = \int \underset{f}{1} \cdot \underset{g}{\arctan x} \, dx =$

$$\underset{f}{x} \cdot \arctan x - \int \underset{f}{x} \cdot \underset{g}{\frac{1}{1+x^2}} \, dx = x \cdot \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx$$

$$= x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) = x \arctan x - \log \sqrt{1+x^2}$$

— o — o —

Esempio 6 $\int \log^2 x \, dx = \int \underset{f}{1} \cdot \underset{g}{\log^2 x} \, dx = \underset{f}{x} \log^2 x - \int \cancel{x} \cdot \underset{f}{2 \log x} \cdot \underset{g}{\cancel{\frac{1}{x}}} \, dx$

$$= x \log^2 x - 2 \int \log x \, dx = \boxed{x \log^2 x - 2x \log x + 2x}$$

CONTROLLARE

In questo modo si fanno quelli del tipo

$$\int p(x) \log^k x \, dx$$

↑
polinomio in x

MAT I TLC

ORA 68

Esempio 7 $\int \cos^2 x \, dx = \int \underset{G}{\cos x} \cdot \underset{f}{\cos x} \, dx = \underset{G}{\cos x} \cdot \underset{F}{\sin x} - \int \underset{g}{(-\sin x)} \underset{F}{\cos x} \, dx$

$$= \cos x \cdot \sin x + \int \sin^2 x \, dx = \cos x \cdot \sin x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx$$

$$= \cos x \cdot \sin x + \int 1 \, dx - \int \cos^2 x \, dx$$

$$= \cos x \cdot \sin x + x - \underbrace{\int \cos^2 x \, dx}_{\text{lo porto a sx}} \quad \text{GRANDE RITORNO!!}$$

$$2 \int \cos^2 x \, dx = \cos x \cdot \sin x + x \Rightarrow \int \cos^2 x \, dx = \frac{\cos x \cdot \sin x + x}{2}$$

Esempio 8 $\int \underset{f}{e^x} \underset{G}{\cos x} \, dx = \underset{F}{e^x} \underset{G}{\cos x} - \int \underset{Fg}{e^x} (-\sin x) \, dx$

$$= \underset{f}{e^x} \cos x + \int \underset{f}{e^x} \underset{G}{\sin x} \, dx =$$

$\rightarrow$ provare cosa succede con la scelta inversa...

$$= \underset{F}{e^x} \cos x + \underset{G}{e^x} \sin x - \underbrace{\int \underset{Fg}{e^x} \cos x \, dx}_{\text{lo porto a sx}} \quad \text{GRANDE RITORNO!}$$

$$\cancel{2} \int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x (\cos x + \sin x)}{2}$$

Stessa cosa per integrali del tipo

$$\int e^{ax} \cos(bx) \, dx$$

$$\int e^{ax} \sin(bx) \, dx$$

Esempio 9

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \left(\frac{\cos(2x)}{2} + \frac{1}{2} \right) dx$$

$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$
 $\cos^2 x = \frac{\cos(2x) + 1}{2}$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \int \cos(2x) \, dx$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} = \frac{x}{2} + \frac{2\sin x \cos x}{4} = \frac{x + \sin x \cos x}{2}$$

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} \right) dx$$

$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$
 $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \int \cos(2x) \, dx$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} = \dots$$

$$\int \sin x \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int 2 \sin x \cdot \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x) \, dx$$

$$= -\frac{\cos(2x)}{4} = \dots$$

Allo stesso modo si fanno gli aut. del tipo

$$\int \sin(ax) \cdot \cos(bx) \, dx$$

(trasformare il prodotto in somma mediante formule trigonometriche)

$$\int e^{cx} \sin(ax) \cdot \cos(bx) \, dx$$

(come sopra + grande ritorno)

Esempio 10

$$\int \sin^4 x \, dx = \int \sin x \cdot \sin^3 x \, dx =$$

F G

$$= (-\cos x) \sin^3 x - \int (-\cos x) 3 \cdot \sin^2 x \cdot \cos x \, dx$$

F G Fg

$$= -\cos x \cdot \sin^3 x + 3 \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \, dx$$

(1 - \sin^2 x)

$$= -\cos x \cdot \sin^3 x + 3 \int \sin^2 x \, dx - 3 \int \sin^4 x \, dx$$

GRANDE RITORNO!
PORTO A SINISTRA

$$4 \int \sin^4 x \, dx = -\cos x \cdot \sin^3 x + 3 \underbrace{\int \sin^2 x \, dx}_{\text{si sa fare.}}$$

Allo stesso modo si fanno tutte le potenze (interi positive) di $\sin x$ e $\cos x$ (ad ogni passaggio per parti l'esponente scende di 2)

— 0 — 0 —

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE Versione ufficiale

$$\begin{aligned} [F(G(x))]_{x=a}^{x=b} &= \int_a^b [F(G(x))]' \, dx \\ &= \int_a^b F'(G(x)) \cdot G'(x) \, dx = \int_a^b f(G(x))g(x) \, dx \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [F(G(x))]_{x=a}^{x=b} &= F(G(b)) - F(G(a)) \\ &= [F(x)]_{x=G(a)}^{x=G(b)} \\ &= \int_{G(a)}^{G(b)} F'(x) \, dx = \int_{G(a)}^{G(b)} f(x) \, dx \quad (2) \end{aligned}$$

① = ② Diventa

$$\int_{G(a)}^{G(b)} f(x) \, dx = \int_a^b f(G(x))g(x) \, dx$$

FORMULA DI INTEGRAZIONE
PER SOSTITUZIONE

Esempio 1 $\int \frac{\log^3 x}{x} dx =$ Pongo $y = \log x$
 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$; $dy = \frac{dx}{x}$
 $= \int y^3 dy = \frac{y^4}{4} = \frac{\log^4 x}{4}$ **N.B.** Ho applicato la formula data con $f(x) = x^3$, $G(x) = \log x$

Esempio 2 $\int \frac{dx}{x \log x} =$ Pongo $y = \log x$
 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ $dy = \frac{dx}{x}$
 $= \int \frac{dy}{y} = \log |y| = \log |\log x|$

Esempio 3 $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx =$ Pongo $y = \cos x$
 $\frac{dy}{dx} = -\sin x$
 $dy = -\sin x \cdot dx$

$= - \int \frac{(-\sin x) dx}{\cos x} dy = - \int \frac{dy}{y} = - \log |y|$
 $= - \log |\cos x| = \log \frac{1}{|\cos x|}$

Esempio 4 $\int \tan x dx = \int \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} dx =$
 $\neq$ G
 $= (-\cos x) \frac{1}{\cos x} - \int (-\cos x) \left(-\frac{1}{\cos^2 x} \right) (-\sin x) dx$
 $\neq$ G Fg
 $= -1 + \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -1 + \int \tan x dx$ GRANDE RITORNO ??
 PORTO A SINISTRA E OTTENGO
 $\boxed{0 = -1}$

MAT I TLC

ORA 69

Titolo nota

28/11/2006

Integrazione per sostituzione

$$\int_{G(a)}^{G(b)} f(x) dx = \int_a^b F(G(x)) g(x) dx$$

Sostituzioni che si vedano "a occhio"

Es. 1 $\int x \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int 2x \cdot \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sin x^2$

Pongo $y = x^2$, $\frac{dy}{dx} = 2x$, $dy = 2x dx$

$$\frac{1}{2} \int \underbrace{2x \cos x^2}_{dy} dx = \frac{1}{2} \int \cos y dy = \frac{1}{2} \sin y = \frac{1}{2} \sin x^2$$

Es. 2 $\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} e^{x^3} \quad [y = x^3, \dots]$

Es. 3 $\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \log(1+x^2)$

$[y = x^2 \text{ oppure anche } y = 1+x^2]$

Es. 4 $\int \frac{ax+b}{1+x^2} dx = a \int \frac{x}{1+x^2} dx + b \int \frac{1}{1+x^2} dx$
 $= \frac{a}{2} \log(1+x^2) + b \arctan x$

Es. 5 $\int \frac{dx}{1+2x^2} dx = \int \frac{dx}{1+(\sqrt{2}x)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}x)$
 $\boxed{y = \sqrt{2}x}$

Es. 6 $\int \frac{dx}{3+x^2} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{1+\frac{x^2}{3}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{1+(\frac{x}{\sqrt{3}})^2}$
 $= \frac{1}{3} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$

In generale $\int \frac{dx}{a+x^2} = \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right) \quad [\text{per } a > 0]$

Es. 7 $\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{1+(x+1)^2} = \arctan(x+1)$

Es. 8 $\int \frac{x+5}{x^2+2x+3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+10}{x^2+2x+3} dx =$
 $= \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3} dx + \frac{1}{2} \int \frac{8}{x^2+2x+3} dx$
 $= \frac{1}{2} \log(x^2+2x+3) + 4 \int \frac{1}{2+(x+1)^2} dx \quad \rightarrow y = x+1$
 $\frac{dy}{dx} = 1, dy = dx$
 $= \frac{1}{2} \log(x^2+2x+3) + 4 \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$

Es. 9 $\int \frac{x+5}{4x^2+4x+5} dx = \frac{1}{8} \int \frac{8x+40}{4x^2+4x+5} dx =$

$$= \frac{1}{8} \int \frac{8x+4}{4x^2+4x+5} dx + \frac{1}{8} \int \frac{36}{4x^2+4x+5} dx$$

$$= \frac{1}{8} \log(4x^2+4x+5) + \frac{9}{2} \int \frac{\boxed{dx} \cdot \frac{2}{2}}{\underbrace{4+(2x+1)^2}_{y=2x+1} \cdot \frac{2}{2}} \frac{dy}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \quad dy = 2 dx$$

$$= \frac{9}{4} \int \frac{dy}{4+y^2} = \frac{9}{4} \frac{1}{2} \arctan \frac{y}{2}$$

$$= \frac{1}{8} \log(4x^2+4x+5) + \frac{9}{8} \arctan \frac{2x+1}{2}$$

— 0 — 0 —

Es. 10 $\int \sqrt{1-x^2} dx =$ $x = \sin y, \frac{dx}{dy} = \cos y, dx = \cos y dy$

$= \int \sqrt{1-\sin^2 y} \cos y dy = \int \cos y \cdot \cos y dy = \int \cos^2 y dy =$

BRUTALE: ci vorrebbe la seconda dei Cosi

$$= \frac{y}{2} + \frac{\sin y \cos y}{2} = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x}{2} \cos y = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2}$$

$y = \arcsin x$

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

$\uparrow$
DI NUOVO

$$\sin(\arcsin x) = x \quad \text{PERICOLOSO}$$

In realtà in questo tutti i passaggi sarebbero leciti, ma in ogni caso è meglio derivare alla fine.

INTEGRAZIONE FUNZIONI RAZIONALI

$$\text{funzione razionale} = \frac{\text{polinomio}(x)}{\text{polinomio}(x)}$$

Data una funzione razionale è "POSSIBILE" determinare una sua primitiva procedendo in 4 fasi:

- 1 - DIVISIONE
- 2 - FATTORIZZAZIONE
- 3 - SISTEMA LINEARE
- 4 - INTEGRAZIONE

① DIVISIONE. Sia $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

Se $\text{grado}(P(x)) < \text{grado}(Q(x))$ si va dirett. alla fase 2.

Se $\text{grado}(P(x)) \geq \text{grado}(Q(x))$ facciamo la divisione di $P(x)$ per $Q(x)$

$$P(x) = A(x) Q(x) + R(x)$$

$\uparrow$
QUOZIENTE

$\uparrow$
RESTO (con $\text{grado}(R(x)) < \text{grado}(Q(x))$)

Ma allora

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A(x) Q(x) + R(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Quindi

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

$\uparrow$ polinomio
 $\downarrow$ primitiva facile

$\uparrow$ Funzione raz.
 con
 grado (Num.) < grado (Den.)

Pertanto basta saper integrare le funzioni raz. in cui il num. ha grado < del denom.

(2) **FATTORIZZAZIONE** Scomporre $Q(x) \leftarrow$ Denominatore

Ogni polinomio $Q(x)$ a coeff. reali si può scrivere come prodotto di fattori di 1° e 2° grado, a loro volta non ulteriormente scomponibili

FATTO GENERALE

Teoricamente, non è detto che i fattori si

↓ fattori di 1° grado sono ovviamente non scomponibili
 " 2° " sono NON scomponibili $\Leftrightarrow \Delta < 0$

Al termine della fase 2 avremo scomposto $Q(x)$ nella forma

$$Q(x) = (a_1x + b_1)^{m_1} (a_2x + b_2)^{m_2} \cdots (a_kx + b_k)^{m_k} \cdot (c_1x^2 + d_1x + e_1)^{n_1} \cdots (c_r x^2 + d_r x + e_r)^{n_r}$$

Scomposizione come prodotto di k fattori di 1° grado con mult. $m_1, \dots, m_k$ e r fattori di 2° grado di mult. $n_1, \dots, n_r$.

N.B. $\text{grado}(Q(x)) = m_1 + m_2 + \dots + m_k + 2(n_1 + \dots + n_r)$

MAT I TLC

ORAZO

Esempio $\int \frac{x^5+1}{x^4+x^2} dx$

Divisione

$$\begin{array}{r} x^5 + 1 \\ -x^5 - x^3 \\ \hline -x^3 + 1 \end{array} \bigg| \begin{array}{r} x^4 + x^2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \boxed{x} \text{ Quoziente: } A(x) \\ \boxed{-x^3+1} \text{ Resto } R(x) \end{array}$$

$$x^5+1 = x(x^4+x^2) + (-x^3+1)$$

$$\frac{x^5+1}{x^4+x^2} = x + \frac{1-x^3}{x^4+x^2} \Rightarrow \int \frac{x^5+1}{x^4+x^2} dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{1-x^3}{x^4+x^2} dx$$

Fattorizzazione

$$x^4+x^2 = x^2(x^2+1)$$

$\uparrow$ Fattore di 1° grado di molt 2. $\uparrow$ Fattore di 2° grado di molt 1.

1. SISTEMA LINEARE

Supponiamo di dover integrare

$$\frac{x^2+3}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

Sopra i fattori di 1° grado si mettono costanti
 Sopra i fattori di 2° grado si mettono fattori di 1° grado

$$\frac{x^2+3}{(x-1)(x+5)(x^2+2)(x^2+7)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+5} + \frac{Cx+D}{x^2+2} + \frac{Ex+F}{x^2+7}$$

$$\frac{1-x^3}{x(x+7)(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+7} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+5}$$

$\uparrow$
 Non scomponibile

$$\frac{x^2+3}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2} = \frac{A(x^2+2) + (x-1)(Bx+C)}{(x-1)(x^2+2)}$$

$$= \frac{Ax + 2A + Bx + Cx + Dx + E}{(x-1)(x^2+2)}$$

$$\begin{cases} A+B=1 & \text{coeff. di } x^2 \\ C-B=0 & \text{coeff. di } x \\ 2A-C=3 & \text{coeff. di } x^0 \text{ (termine noto)} \end{cases}$$

SISTEMA LINEARE

$$1^a + 2^a: A+C=1 \quad \text{Sommo: } 3A=4 \Rightarrow A=\frac{4}{3}$$

$$3^a: 2A-C=3$$

$$B=1-A=1-\frac{4}{3}=-\frac{1}{3}$$

$$C=B$$

Alla fine del sistema lineare ho che

$$\frac{x^2+3}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{4}{3} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \frac{x+1}{x^2+2}$$

Nel sistema lineare le incognite sono tante quanto è il grado del denom, le equazioni sono altrettanto

Se grado (den) = k il grado num è $\leq k-1$, quindi le eq. riguardano i coeff. di $x^0, x^1, \dots, x^{k-1} \Rightarrow k$ equazioni

Si può dimostrare che questo sistema ha sempre soluz. UNICA.

Tutto questo vale se non ci sono molteplicità. Se ci sono?

$$\frac{x^2+3}{(x-1)^4(x-2)(x^2+1)^3(x^2+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{x^2+3} +$$

al numeratore si mette un fattore generico di grado d inferiore al denominatore

$$\frac{d}{dx} \frac{Gx^6+Hx^5+Ix^4+Jx^3+Kx^2+Lx+M}{(x-1)^3(x^2+1)^2}$$

parte INUTILIZZATA DEL DENOMINATORE

Esempio

$$\frac{1-x^3}{x^2(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} + \frac{d}{dx} \frac{D}{x}$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} - \frac{D}{x^2}$$

$$= \frac{Ax(1+x^2) + (Bx+C)x^2 - D(1+x^2)}{x^2(1+x^2)}$$

$$= \frac{Ax + Ax^3 + Bx^3 + Cx^2 - D - Dx^2}{x^2(1+x^2)}$$

$$A+B = -1$$

$$C-D = 0$$

$$A = 0$$

$$-D = 1$$

coeff. di x^3 coeff. di x^2 coeff. di x

termine noto

$$A = 0$$

$$B = -1$$

$$C = -1$$

$$D = -1$$

Conclusione:

$$\frac{1-x^3}{x^2(1+x^2)} = -\frac{1+x}{1+x^2} + \frac{d}{dx} \frac{-1}{x}$$

Alla fine della fase 3 abbiamo 3 tipi di termini

* termini del tipo $\frac{a}{bx+c} \rightsquigarrow$ si integrano facilmente

* termini del tipo $\frac{dx+e}{ax^2+bx+c} \rightsquigarrow$ si integrano con un po' di log e un po' di arctan

Non scomp.

* termini del tipo $\frac{d}{dx}$ (roba) $\rightsquigarrow$ per integrarli basta togliere $\frac{d}{dx}$

F
A
S
E
④

$$\int \frac{1-x^3}{x^2+x^2} dx = -\int \frac{x+1}{x^2+1} dx + \int \cancel{\frac{d}{dx}} \left(\frac{-1}{x} \right) \cancel{dx}$$

$$-\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{x+1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \log(1+x^2) + \arctan x$$

Esempio 1

$$\int \frac{dx}{x^2-1}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2-1}$$

Divisione: non serve

$$\text{Fatt. : } x^2-1 = (x+1)(x-1)$$

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

si potrebbe fare il sistema

$$\text{Molt. per } (x-1) : \frac{1}{x+1} = \frac{A}{(x+1)}(x-1) + B$$

$$\text{Metto } x=1 : \boxed{\frac{1}{2} = B}$$

$$\text{Molt. per } (x+1) : \frac{1}{x-1} = A + \frac{B}{(x-1)}(x+1)$$

$$\text{Metto } x=-1 : \boxed{-\frac{1}{2} = A}$$

$$\frac{1}{x^2-1} = -\frac{1}{2} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x-1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \frac{1}{x^2-1} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} \\ &= -\frac{1}{2} \log|x+1| + \frac{1}{2} \log|x-1| \\ &= \log \sqrt{\frac{|x-1|}{|x+1|}} \end{aligned}$$

$$\text{Esempio ... } \int \frac{x^2+1}{x^3-x} dx$$

$$\begin{aligned} x^3-x &= x(x^2-1) \\ &= x(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

$$\frac{x^2+1}{x(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$$

$$\text{Molt. per } x \quad \frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)} = A + \frac{Bx}{x+1} + \frac{Cx}{x-1}$$

$$\boxed{x=0} \rightsquigarrow \boxed{-1 = A}$$

MAT I TLC

ORA 71

Titolo nota

29/11/2006

Sostituzioni razionalizzanti

$$\int \frac{dx}{e^x + 1} = \quad \text{Pongo } y = e^x \quad \frac{dy}{dx} = e^x \quad dy = e^x dx$$

$$\int \frac{\boxed{e^x dx}^{dy}}{e^x (e^x + 1)} = \int \frac{dy}{y(y+1)} \quad \leftarrow \text{FUNZIONE RAZIONALE}$$

$$\frac{1}{y(y+1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+1} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} = \frac{\cancel{y+1} - y}{y(y+1)}$$

$$\begin{aligned} &= \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} \right) dy = \log|y| - \log|y+1| = \\ &= \log e^x - \log(e^x + 1) \\ &= x - \log(e^x + 1) \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{e^x + 1} \quad \text{Pongo } e^x + 1 = y; \quad \frac{dy}{dx} = e^x; \quad dy = e^x dx$$

$$= \int \frac{e^x dx}{e^x (e^x + 1)} = \int \frac{dy}{y(y-1)}$$

$\uparrow$ $y-1$ $\uparrow$ y

Con lo stesso metodo si fanno le primitive di tutte le funzioni razionali di e^x

$$\int \frac{e^{3x} - e^{2x} + 5}{e^{4x} + 1} \boxed{\frac{e^x dx}{e^x}}^{dy} = \quad \text{Pongo } y = e^x, \frac{dy}{dx} = e^x, dy = e^x dx$$

$$= \int \frac{y^3 - y^2 + 5}{y^4 + 1} \frac{1}{y} dy$$

Stessa cosa vale se ho potenze di a^x (con $a > 0$)

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x+2}{\sqrt{x}+1} dx &= \quad y = \sqrt{x}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \\
 &= \int \frac{x+2}{\sqrt{x}+1} 2\sqrt{x} \boxed{\frac{dx}{2\sqrt{x}}} \quad \swarrow x = y^2, \quad \frac{dx}{dy} = 2y, \quad dx = 2y dy \\
 &= \int \frac{y^2+2}{y+1} \cdot 2y dy = 2 \int \frac{y^3+2y}{y+1} dy = \text{si potrebbe fare la divisione...} \\
 &= 2 \int \frac{\overbrace{y^3+y^2}^{y^2(y+1)} - \overbrace{y^2-y}^{-y(y+1)} + \overbrace{3y+3-3}^{3(y+1)}}{y+1} dy = \\
 &= 2 \int \left(y^2 - y + 3 - \frac{3}{y+1} \right) dy = 2 \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 3y - 3 \log|y+1| \right) = \\
 &= 2 \left(\frac{x\sqrt{x}}{3} - \frac{x}{2} + 3\sqrt{x} - 3 \log(\sqrt{x}+1) \right)
 \end{aligned}$$

Alternativa

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x+2}{\sqrt{x}+1} dx &= \quad \text{Pongo } y = \sqrt{x}+1 \\
 &\quad y-1 = \sqrt{x} \\
 &\quad x = y^2 - 2y + 1 \\
 &\quad \frac{dx}{dy} = 2y - 2 \\
 &\quad dx = (2y-2) dy \\
 &= \int \frac{y^2-2y+3}{y} \underbrace{2(y-1) dy}_{dx} \\
 &= 2 \int \left(y - 2 + \frac{3}{y} \right) (y-1) dy = \\
 &= 2 \int \left(y^2 - y - 2y + 2 + 3 - \frac{3}{y} \right) dy = 2 \int \left(y^2 - 3y + 5 - \frac{3}{y} \right) dy \\
 &= 2 \left(\frac{y^3}{3} - 3 \frac{y^2}{2} + 5y - 3 \log|y| \right) = \text{sostituire } y \text{ e controllare che venga come prima} \\
 &\quad \text{--- o --- o ---} \\
 \int \frac{x+2}{\sqrt[3]{x}+1} dx &= \quad \text{Pongo } \sqrt[3]{x} = y, \quad x = y^3, \quad dx = 3y^2 dy
 \end{aligned}$$

$$\int \frac{y^3+2}{y+1} 3y^2 dy = \text{si sa fare}$$

— o — o —

$$\int \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt[3]{x}+1} dx = \text{Pougo } y = \sqrt[6]{x}, x = y^6, dx = 6y^5 dy$$

$$= \int \frac{y^3+2}{y^2+1} 6y^5 dy = \text{si sa fare (l'unico punto cattoso è la divisione)}$$

— o — o —

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-2}{x} dx = y = \sqrt{x+1}, y^2 = x+1 \Rightarrow x = y^2-1$$

$$\frac{dx}{dy} = 2y \quad dx = 2y dy$$

$$= \int \frac{y-2}{y^2-1} 2y dy =$$

$$= 2 \int \frac{y^2-2y}{y^2-1} dy = 2 \int \frac{y^2-1+1-2y}{y^2-1} dy = 2 \int \left(1 + \frac{1-2y}{y^2-1}\right) dy =$$

$$= 2y + 2 \int \frac{1-2y}{y^2-1} dy = 2y - 3 \log|y+1| - \log|y-1| = \text{tornare in } x$$

$$\frac{1-2y}{y^2-1} = \frac{1-2y}{(y+1)(y-1)} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y-1} = \frac{Ay-A+By+B}{(y+1)(y-1)}$$

$$\begin{cases} A+B = -2 \\ B-A = 1 \end{cases} \Rightarrow 2B = -1 \Rightarrow B = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = B-1 = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{1-2y}{y^2-1} = -\frac{3}{2} \frac{1}{y+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{y-1}$$

— o — o —

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} dx = y = \sqrt{\frac{x+1}{x+2}} \quad \frac{dy}{dx} = \text{PESSIMA IDEA}$$

$$= \int y \left(\frac{1-2y^2}{y^2-1} \right)' dy$$

$$y^2 = \frac{x+1}{x+2}; \quad y^2(x+2) = x+1; \quad xy^2 + 2y^2 = x+1$$

$$x(y^2-1) = 1-2y^2 \Rightarrow x = \frac{1-2y^2}{y^2-1}; \quad dx = \left(\right)' dy$$

$$= \int \underbrace{y}_G \left(\underbrace{\quad}_F \right)' dy = \text{è comunque l'integrale di una funzione RAZIONALE}$$

$$= \underbrace{y}_G \underbrace{\frac{1-2y^2}{y^2-1}}_F - \int \underbrace{1}_g \cdot \underbrace{\frac{1-2y^2}{y^2-1}}_F dy = \text{si conclude facilmente.}$$

Funziona quando l'integrale contiene espressioni tipo

$$\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

NON — o — o —

$$\int \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x+1}+3} dx = \text{"LASCIA TE OGNI SPERANZA"}$$

$$\int \frac{\sqrt{y^2-1}+2}{y+3} \cdot 2y dy \quad y = \sqrt{x+1} \quad y^2 = x+1 \quad x = y^2-1 \quad dx = 2y dy$$

MAT I TLC

ORA 72

 $\sqrt{\text{pol. di } 2^{\circ} \text{ grado}}$

NO

$$\int \sqrt{x^2+3} \, dx = \text{Pougo } \boxed{\sqrt{x^2+3} = y \quad x^2+3 = y^2 \quad x^2 = y^2-3}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ x+y \\ \downarrow \end{array}$$

$$\sqrt{x^2+3} = x+y ; \quad \cancel{x^2}+3 = \cancel{x^2}+2xy+y^2$$

DIVENTA DI 1° GRADO IN x

$$2xy = 3-y^2 \quad x = \frac{3-y^2}{2y} = \frac{3}{2y} - \frac{y}{2}$$

$$dx = \left(\frac{3}{2y} - \frac{y}{2} \right)' dy = \left(-\frac{3}{2y^2} - \frac{1}{2} \right) dy$$

$$= \int \left(\frac{3-y^2}{2y} + y \right) \left(-\frac{3}{2y^2} - \frac{1}{2} \right) dy \quad \text{si FA!}$$

$$\int \sqrt{2x^2+x+5} \, dx = \text{Pougo } \sqrt{2x^2+x+5} = \sqrt{2}x+y$$

$$\cancel{2x^2}+x+5 = \cancel{2x^2}+2\sqrt{2}xy+y^2$$

$$x(2\sqrt{2}y-1) = 5-y^2$$

$$x = \frac{5-y^2}{2\sqrt{2}y-1} \quad dx = \left(\frac{5-y^2}{2\sqrt{2}y-1} \right)' dy$$

$$\sqrt{2} \quad x \quad + y$$

$$= \int \left(\sqrt{2} \frac{5-y^2}{2\sqrt{2}y-1} + y \right) \left(\frac{5-y^2}{2\sqrt{2}y-1} \right)' dy = \text{SI POTREBBE FARE}$$

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c} \, dx$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x+y$$

FUNZIONA SE $a > 0$

$$\int \sqrt{5x-6-x^2} \, dx = \int \sqrt{-(x^2-5x+6)} \, dx = \int \sqrt{-(x-2)(x-3)} \, dx$$

$$\sqrt{-(x-2)(x-3)} = y(x-2); \quad -\cancel{(x-2)}(x-3) = y^2(x-2)^{\cancel{2}}$$

Di primo grado in x

$$-x+3 = y^2x - 2y^2; \quad x(y^2+1) = 3+2y^2$$

$$x = \frac{3+2y^2}{y^2+1} \quad dx = \left(\frac{3+2y^2}{y^2+1} \right)' dy$$

$$= \int \underbrace{y \left(\frac{3+2y^2}{y^2+1} - 2 \right)}_{y(x-2)} \underbrace{\left(\frac{3+2y^2}{y^2+1} \right)' dy}_{dx} = \text{si FA.}$$

STESSA COSA CON LA SOSTITUZIONE $\sqrt{\quad} = y(x-3)$

Questo metodo funziona se il polinomio di 2° grado si fattorizza, cioè $\Leftrightarrow$ 2 radici reali $\Leftrightarrow \Delta > 0$.

$$\sqrt{ax^2+bx+c}$$

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$	$\sqrt{\quad} = \sqrt{a}x+y$ FATT.	FATT.
$\Delta < 0$	$\sqrt{\quad} = \sqrt{a}x+y$	??

Se $a < 0$ e $\Delta < 0$ il polinomio è sempre negativo, quindi la radice del polinomio non ha senso, quindi non ha senso cercarne la primitiva.

$$\int \sqrt{x^2-1} \, dx = \text{Con la fattorizzazione}$$

$$\sqrt{(x+1)(x-1)} = y(x-1)$$

$$(\cancel{x+1})(x-1) = y^2(x-1)^{\cancel{2}}$$

$$x+1 = y^2x - y^2 \quad x(y^2-1) = y^2+1$$

$$x = \frac{y^2+1}{y^2-1} \quad dx = \left(\frac{y^2+1}{y^2-1} \right)' dy$$

$$= \int y \left(\frac{y^2+1}{y^2-1} - 1 \right) \left(\frac{y^2+1}{y^2-1} \right)' dy = \int y \frac{2}{y^2-1} \left(\frac{y^2+1}{y^2-1} \right)' dy$$

= SI FA

Secondo modo: $\sqrt{x^2-1} = x+y$; $x^2-1 = x^2+2xy+y^2$

$$2xy = -1-y^2 \quad x = -\frac{y^2+1}{2y}$$

$$= \int \left(-\frac{y^2+1}{2y} + y \right) \left(-\frac{y^2+1}{2y} \right)' dy = \text{SI FA e i denominatori sono semplici}$$

$$\int \sqrt{x^2-1} dx$$

funzioni iperboliche:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cosh^2 x - 1 = \sinh^2 x$$

Pongo $x = \cosh y$ $dx = \sinh y \cdot dy$

$$= \int \sqrt{\cosh^2 y - 1} \sinh y dy = \int \sinh^2 y dy =$$

$$\sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

$$\sinh^2 y = \frac{e^{2y} + e^{-2y} - 2}{4}$$

per parti con
grande ritorno
→ usando formula
per $\cosh(2x)$
↓
in modo
elementare

$$\int \sqrt{x^2+1} dx$$

$x = \sinh y$... se usava la radice

Integrali di funzioni razionali di $\sin x$ e $\cos x$

$$\int \frac{\sin^2 x + 3\cos x - 6}{\cos^3 x - 7} dx$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

FORMULE
PARAMETRICHE

$$\text{dove } t = \tan \frac{x}{2}$$

Con la sostituzione la funz. raz. di $\sin x$ e $\cos x$ diventa una funz. raz. di t . Che succede al dx ?

$$t = \tan \frac{x}{2}, \quad \frac{x}{2} = \arctan t, \quad x = 2 \arctan t$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt \Rightarrow \text{RAZIONALE}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x} &= \int \underbrace{\frac{1+t^2}{2t}}_{\substack{\uparrow \\ \frac{1}{\sin x}}} \cdot \underbrace{\frac{2}{1+t^2}}_{dx} dt = \int \frac{1}{t} dt \\ &= \log |t| \\ &= \log \left| \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sin(\log x) dx &= \text{Provo } y = \log x, \quad x = e^y, \quad dx = e^y dy \\ &= \int \sin y \cdot e^y dy = \text{si fa con 2 passaggi per parti +} \\ &\quad \text{grande ritorno.} \end{aligned}$$

$$\int \log(1-x^2) dx = \int \underset{F}{1} \cdot \underset{G}{\log(1-x^2)} dx =$$

$$= \underset{F}{x} \underset{G}{\log(1-x^2)} - \int \underset{F}{x} \underset{G}{\frac{(-2x)}{1-x^2}} dx = \text{SI FA}$$

$$\int \log(1-x^2) dx = \int \log(1+x)(1-x) dx =$$

$$= \int \log(1+x) dx + \int \log(1-x) dx$$

$$\int \log(1+x) dx \stackrel{1+x=y}{=} \int \log y dy = (y-1) \log y = x \log(x+1)$$

$$\int \log(1-x) dx \stackrel{y=1-x}{=} - \int \log y dy = \dots$$

$$dy = -dx$$

$$\int \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \arctan x^2 \quad [\text{sostituzione } y = x^2]$$

$$\int \frac{x^2}{1+x^4} dx = \text{CONTOSO} \quad [1+x^4 = 1+x^4+2x^2-2x^2 =$$

$$= (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 =$$

$$\int \frac{x^3}{1+x^4} dx = \frac{1}{4} \log(1+x^4) \quad = (x^2+1+\sqrt{2}x)(x^2+1-\sqrt{2}x)$$

MAT I TLC

ORA 73

Calcolare la somma di serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Teo 1 Esiste $R \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ t.c.

- se $|x| < R$ la serie converge ASSOLUTAMENTE
- se $|x| > R$ la serie non converge (e non verifica cond. nec.)
- se $|x| = R$ dipende dai casi

Teo 2 Se esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L$, allora $R = \frac{1}{L}$ Teo 3 Per le funzioni ANALITICHE (quasi tutte quelle decenti) la serie di Taylor (DOVE CONVERGE) converge alla funzione stessaDef. La serie di Taylor di una funzione $f(x)$ è

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(n)}(0)}{n!}}_{c_n} x^n$$

Esempio 1 $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots = e^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

serie di Taylor di $f(x) = e^x$
che ha $R = +\infty$

Esempio 2 $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \arctan x$ solo per ogni $x \in [-1, 1]$ Infatti la serie di Taylor di $\arctan x$ ha $R = 1$ e in più converge per $x = \pm 1$ per verifica diretta.

Conseguenza: (caso particolare $x=1$)

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

Esempio 3

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots = -\log(1-x)$$

per ogni $x \in [-1, 1)$

caso $x=-1$

In particolare $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \log 2$

Esempio 4

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

Teorema 4

La derivata di una serie di potenze è la serie delle derivate (all'interno del raggio di convergenza)

Teorema 5

Se devo fare la primitiva di una serie di potenze
nulla per $x=0$

basta fare la serie delle primitive (nulle in $x=0$)

Esempio 5

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots = \frac{1}{1+x}$$

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \dots = \frac{1}{1+x^2}$$

Se faccio "la" primitiva

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \arctan x$$

Esempio 6

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+3} =$$

Assomiglia a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

$$= \frac{1}{x^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{n+3} = \frac{1}{x^3} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{1}{x^3} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - x - \frac{x^2}{2} \right)$$

$\uparrow$ $n=1$ $\uparrow$ $n=2$

$$= \frac{1}{x^3} \left(-\log(1-x) - x - \frac{x}{2} \right)$$

La formula vale $\forall x$ per cui la serie converge (nel nostro caso per $x \in [-1, 1)$).

Esempio 7

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots$$

$$= x(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots)$$

$$= x(x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots)'$$

$$= x(-1 + \underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + \dots}_{\text{SERIE NOTA}})'$$

$$= x\left(-1 + \frac{1}{1-x}\right)' = x\left(\frac{-1+x+1}{1-x}\right)' = x\left(\frac{x}{1-x}\right)'$$

$$= x \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \quad \text{per ogni } x \text{ per cui la serie converge, in questo caso } x \in (-1, 1)$$

Altro modo

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots =$$

$$= x(1 + x + x^2 + x^3 + \dots) = \frac{x}{1-x}$$

In generale

$$x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + \dots =$$

$$= x^7(1 + x + x^2 + \dots) = \frac{x^7}{1-x}$$

Esempio 8

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} \cdot n x^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} n x^{n-1}$$

$$= x \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} x^n \right)' \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{T&O.} \\ \text{SCAMBIO}}}{=} x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n \right)' =$$

$$= x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) x^n \right)' \quad \frac{n}{n+1} x^n = \frac{n+1-1}{n+1} x^n = \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) x^n$$

$$= x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \right)' = (\star)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{x}{1-x}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n} =$$

$$= \frac{1}{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - x \right)$$

$$= \frac{1}{x} \left(-\log(1-x) - x \right)$$

$$(\star) = x \left(\frac{x}{1-x} + \frac{1}{x} \left(-\log(1-x) - x \right) \right)'$$

$$= x \left(\frac{x}{1-x} + \frac{-\log(1-x) - x}{x} \right)' \rightarrow \text{Basta calcolare}$$

la derivata e
la somma è
calcolata.

MAT I TLC

ORA 74

Titolo nota

30/11/2006

INTEGRALI IMPROPRI

INTEGRALI PROPRI $\rightarrow$ zona di integrazione: $[a, b]$ limitato
 $\rightarrow$ integranda $f(x)$ funzione limitata

Un integrale si dice IMPROPRIO se una o entrambe le richieste non sono soddisfatte.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$$



FUNZ. LIM.
ZONA INT. NO

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}$$



ZONA INT. LIM.
FUNZIONE NO

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

ENTRambi i
PROBLEMI

INT. (IMPROPRI) MONOPROBLEMA = con un problema solo di questo tipo

* FUNZIONE LIMITATA, ZONA DI INTEGRAZIONE = SEMIRETTA
 $[a, +\infty)$ oppure $(-\infty, a]$

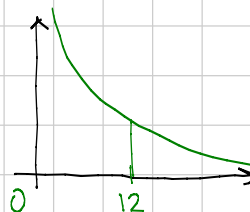
* ZONA INT = interv. $[a, b]$, funzione non limitata vicino all'estremo a o all'estremo b .

Se l'integrale ha tanti problemi, occorre spezzarlo in tanti integrali con un problema solo

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \int_0^{12} \frac{dx}{x^2} + \int_{12}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

$\uparrow$
pb: non
limitatezza
vicino a $x=0$

$\uparrow$
pb: zona int.



$$\int_{-2}^{\infty} \frac{dx}{x} = \int_{-2}^0 \frac{dx}{x} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{x}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \int_{-\infty}^0 + \int_0^{+\infty}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2-1} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{-2} + \int_{-2}^{-1} + \int_{-1}^0 + \int_0^1 + \int_1^3 + \int_3^{+\infty}$$

L'unico problema è la zona di integrazione

Definizioni per integrali impropri monoproblema

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$$

Funzione $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ con problemi in $x=a$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

Se il problema è in $x=b$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

Esempio 1

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [\log x]_{x=2}^{x=A}$$

L'INT. DIVERGE A $+\infty$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \{ \log A - \log 2 \} = +\infty$$

(il 2 non ha nessuna importanza)

[NB] Essendo un limite con int. improprio può

- convergere ($\lim = l \in \mathbb{R}$)
- divergere a $+\infty$
- " " $-\infty$
- essere indeterminato

Esempio 2

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{dx}{x^3} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_{x=2}^{x=A}$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ -\frac{1}{2A^2} + \frac{1}{8} \right\} = \frac{1}{8} \quad \text{CONVERGE}$$

(cambiando 2 con un altro valore positivo continua a convergere)

Esempio 3

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{3\sqrt{x}} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A x^{-\frac{1}{3}} dx =$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \right]_{x=2}^{x=A} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{3}{2} A^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2} 2^{\frac{2}{3}} \right] = +\infty$$

Esempio 4 (parametrico)

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A x^{-\alpha} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{-\alpha+1} x^{-\alpha+1} \right]_{x=2}^{x=A}$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{A^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{2^{\alpha-1}} \right\}$$

Numero e non influenza il limite

se $\alpha-1 > 0$, cioè $\alpha > 1$ il limite della prima parte è 0 $\Rightarrow$ l'int. converge
 se $\alpha-1 < 0$, cioè $\alpha < 1$ il limite della prima parte è $+\infty$ $\Rightarrow$ l'int. div. a $+\infty$

Se $\alpha - 1 = 0$, cioè $\alpha = 1$, la primitiva non è quella indicata, ma si ritrova esattamente l'esempio 1 $\Rightarrow$ l'int. diverge a $+\infty$.
 Conclusione: per ogni $a > 0$

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \begin{cases} \nearrow \text{converge per } \alpha > 1 \\ \searrow \text{div. a } +\infty \text{ per } \alpha \leq 1 \end{cases} \quad \text{TABELLINA}$$

Esempio 5 $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_{x=\varepsilon}^{x=1}$

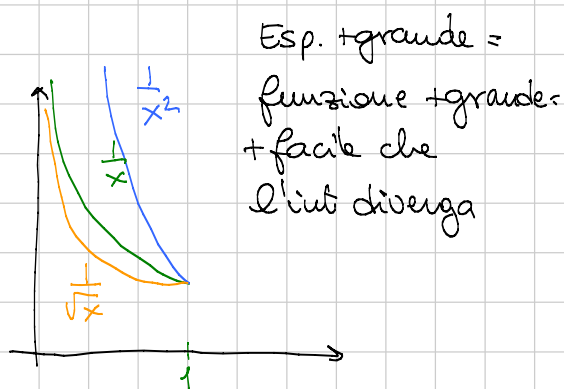
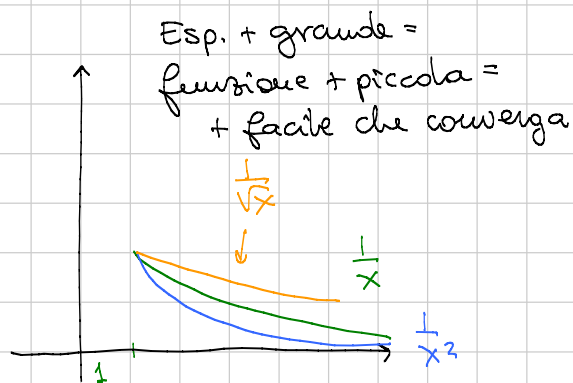
$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} \right\}$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} \right\} = \begin{cases} \nearrow \text{se } \alpha - 1 < 0, \text{ cioè } \alpha < 1, \{ \} \rightarrow 1 \\ \Rightarrow \text{lim è reale} \Rightarrow \text{int. CONVERGE} \\ \searrow \text{se } \alpha - 1 > 0, \text{ cioè } \alpha > 1, \{ \} \rightarrow -\infty \\ \Rightarrow \text{lim è } +\infty \Rightarrow \text{int. div. a } +\infty \end{cases}$$

se $\alpha = 1$ occorre farlo a parte e risulta che DIVERGE.

Conclusione: per ogni $a > 0$ si ha che

$$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha} dx \begin{cases} \nearrow \text{converge se } \alpha < 1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty \text{ se } \alpha \geq 1 \end{cases} \quad \text{TABELLINA}$$



MAT I ILC

[ORA 75]

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \log^2 x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{dx}{x \log^2 x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{\log x} \right]_{x=2}^{x=A}$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ -\frac{1}{\log A} + \frac{1}{\log 2} \right\} = \frac{1}{\log 2} \Rightarrow \text{converge}$$

Con la stessa tecnica si dimostra che

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \log^\alpha x}$$

↗ converge se $\alpha > 1$

↘ diverge a $+\infty$ se $\alpha \leq 1$

TABELLINA

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-e^{-x} \right]_{x=0}^{x=A} =$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ -e^{-A} + 1 \right\} = 1$$

— 0 — 0 —

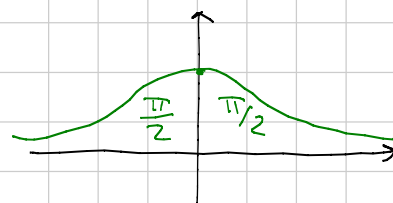
Cosa succede se l'integrale ha + problemi:

- 1 - si spezza in integrali monoproblemi;
- 2 - si studiano i singoli pezzi;
- 3 - si deduce il comportamento dell'integrale originario sulla base dei singoli pezzi
(se accade che un pezzo diverge a $+\infty$ e un pezzo diverge a $-\infty$ si dice PER DEFINIZIONE che l'integrale originario è INDETERMINATO)

Esempio 1 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} [\arctan x]_{x=0}^{x=A} =$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \{ \arctan A - 0 \} = \frac{\pi}{2}$$



$$\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^0 \frac{dx}{1+x^2} = \dots = \frac{\pi}{2}$$

← FUNZIONE
PARI

Esempio 2 $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^5} = \int_{-1}^1 x^{-5} dx = \left[-\frac{1}{4} \frac{1}{x^4} \right]_{x=-1}^{x=1} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$

NOOOO !!!!!!!!

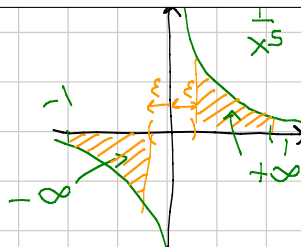
Si fa così per gli integrali **PROPRI**, mentre questo è **IMPROPRIO**

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^5} = \int_0^1 \frac{dx}{x^5} + \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^5}$$

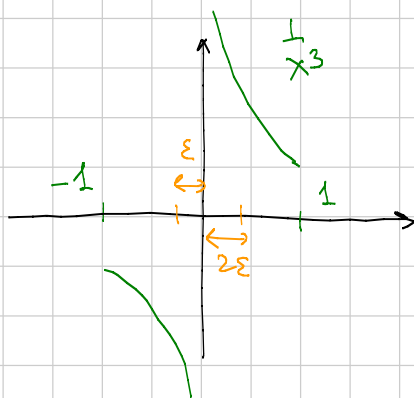
DIVERGE
 $A + \infty$

DIVERGE
 $A - \infty$

(Funzione
DISPARI)



⇒ in base alla definizione data, l'integrale originario è
INDETERMINATO



Si potrebbe dire che:

Se l'integrale converge il limite non dipende da come faccio il buco

Se l'integrale è indeterminato, buchi diversi portano a limiti diversi

Come sapere se un integrale converge o non converge senza fare la primitiva.

UTILIZZANDO CRITERI DI CONVERGENZA

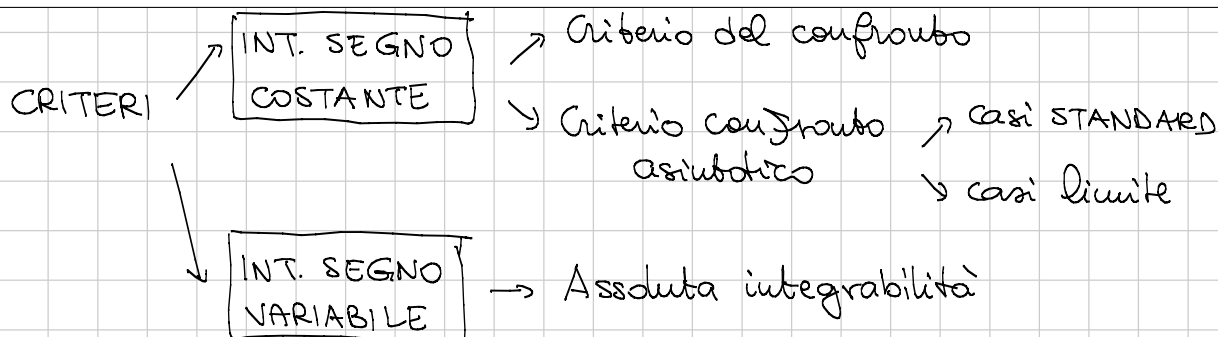
Prima suddivisione:

→ INTEGRANDA A SEGNO VARIABILE

→ INTEGRANDA A SEGNO COSTANTE (positivo).

In questo caso i possibili comportamenti sono solo 2

convergere ← → Divergere a $+\infty$



TRUCCO dell'integrazione per parti

Criterio serie $\leftrightarrow$ INTEGRALI

— 0 — 0 —

CRITERIO DEL CONFRONTO

Siano $f(x) \geq 0$ e $g(x) \geq 0$ nella zona di integrazione E .

Supponiamo che

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in E$$

Allora

$$\int_E f(x) dx = +\infty \Rightarrow \int_E g(x) dx = +\infty$$

$$\int_E g(x) dx < +\infty \text{ (cioè conv.)} \Rightarrow \int_E f(x) dx < +\infty$$

$$\int_E f(x) dx < +\infty \Rightarrow \int_E g(x) dx = \text{BOH}!!!$$

$$\int_E g(x) dx = +\infty \Rightarrow \int_E f(x) dx = \text{BOH}!!!$$

— o — o —

Esempio 1

$$\int_5^{+\infty} \underbrace{\frac{8+\sin x}{x^2}}_{f(x)} dx \quad \text{converge}$$

$$f(x) \geq 0 \text{ per } x \geq 5 \quad \text{Ok} \quad \frac{8+\sin x}{x^2} \leq \frac{9}{x^2}$$

$$\int_5^{+\infty} \frac{9}{x^2} dx \text{ converge (in tabellina } \alpha=2>1)$$

⇓ ← confronto

$$\int_5^{+\infty} \frac{8+\sin x}{x^2} dx \quad \text{converge}$$

— o — o —

Esempio 2

$$\int_0^1 \underbrace{\frac{1}{\sin x}}_{f(x)} dx$$

$$\sin x > 0 \text{ per } x \in (0,1)$$

$$\text{quindi } f(x) > 0 \text{ in } (0,1)$$

$$\sin x < x \text{ per ogni } x > 0, \text{ quindi}$$

$$\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} \quad \text{per } x \in (0,1)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = +\infty \Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sin x} = +\infty$$

MAT I TLC

ORA 76

Titolo nota

05/12/2006

Integrali impropri

Definizioni nel caso di int. monoproblema (lim. ...)

Spezzamento degli integrali con + problemi

Tabellina: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ $\rightarrow$ conv. se $\alpha > 1$
 $\rightarrow$ Div. a $+\infty$ se $\alpha \leq 1$

$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\log x)^\alpha}$ $\rightarrow$ come sopra

$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ $\rightarrow$ conv. se $\alpha < 1$
 $\rightarrow$ Div. a $+\infty$ se $\alpha \geq 1$

Integrandi segno costante (positivo) $\rightarrow$ Criterio confronto
 $\rightarrow$ Criterio confronto asintotico $\rightarrow$ casi standard
 $\rightarrow$ Casi limite

Int. segno variabile $\rightarrow$ Assoluta integrabilità
 $\rightarrow$ Trucco integr. per parti

Utilità dei criteri: stabilire se un integrale converge o no senza dover fare la primitiva

Utilità dell'integrandi positiva:

l'integrale può solo $\rightarrow$ convergere
 $\rightarrow$ divergere a $+\infty$

CRITERIO CONFRONTO ASINTOTICO siamo

$$\int_E f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_E g(x) dx$$

due integrali impropri. Supponiamo che $f(x) \geq 0$ in E e $g(x) > 0$ in E .

Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$$

↑
punto in cui gli
integrali hanno il problema

Allora i due integrali con problema in x_0 si comportano allo stesso modo

Esempio 1

$$\int_5^{\infty} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^4 + 4x + 1} dx$$

$f(x)$

$f(x) \geq 0$ nella zona di integrazione

Brutale: $f(x) \sim \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}$

↑
 x grande

$\Rightarrow$ l'int. dato si comporta come $\int \frac{1}{x^2} dx$ con pb. all' ∞ e questo converge

Rigoroso: faccio C.A. con $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Devo fare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot f(x) = 1 \neq 0 \neq +\infty \Rightarrow \dots$$

Esempio 2

$$\int_0^1 \frac{dx}{\arctan x}$$

$$f(x) = \frac{1}{\arctan x} > 0 \text{ nella zona di integr.}$$

↑
problemi in $x=0$

Brutale $\frac{1}{\arctan x} \sim \frac{1}{x}$
 $\uparrow$
 per $x \sim 0$

dunque l'int. dato si comporta come $\int \frac{1}{x} dx$ con pb. in 0
 $\Rightarrow$ DIVERGE

Rigoroso: C.A. con $g(x) = \frac{1}{x}$. Devo fare
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arctan x} = 1 \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$

Esempio 3 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \int_0^4 \frac{dx}{x^2} + \int_4^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = +\infty$
 $\uparrow$ DIVERGE $\uparrow$ CONV.

Esempio 4 $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$
 $\underbrace{\frac{x^2+1}{x^4+1}}_{f(x)}$

Brutale: $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$, quindi $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ si comp. come

$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ dunque DIVERGE
 NOOOO!!!!!!

Brutale corretto: $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$, quindi $\int f(x) dx$ con
 $\uparrow$
 per x grandi problema a $+\infty$

si comporta come $\int \frac{1}{x^2} dx$ con problema a $+\infty$, quindi
 CONVERGE

Esempio 5 $\int_0^{+\infty} \frac{x-1}{x^4+1} dx$ Non è vero che $f(x) \geq 0$ nella zona di integrazione

In questo caso $f(x) \geq 0$ per x "vicini al problema" dunque posso ugualmente applicare il criterio.

$\int_0^{+\infty} = \int_0^{22} + \int_{22}^{+\infty}$

↑ integrale PROPRIO, senza problemi

↑ Qui $f(x) \geq 0$ quindi applico criterio

Esempio 6 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x\sqrt{x})}{x^2} dx = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$ CONVERGE

↑ CONV ↑ CONV

$f(x) \geq 0$

$\frac{\arctan(x\sqrt{x})}{x^2} \leq \frac{10}{x^2}$

$\int_1^{+\infty} \frac{10}{x^2} dx$ converge $\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x\sqrt{x})}{x^2} dx$ converge

↑ CONFRONTO

In alternativa: C.A. con $g(x) = \frac{1}{x^2}$ (Provare ...)

Brutale: $f(x) \sim \frac{x\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

↑ per $x \rightarrow 0$

quindi $\int f(x)$ con pb. in 0 si comporta come $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ con problema in 0, quindi CONVERGE.

Rigoroso: C.A. con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$... $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1 \Rightarrow \dots$

Esempio 7 $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3 + \sqrt{x}} = \int_0^1 + \int_1^{\infty}$ CONVERGE

$f(x) \sim \frac{1}{x^3}$ $\Rightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx$ si comporta come $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$
 $\uparrow$
 x grandi
 con pb. a $+\infty \Rightarrow$ CONVERGE

$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx$ si comporta come $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$
 $\uparrow$
 per $x \rightarrow 0$
 con pb. a $0 \Rightarrow$ CONVERGE

Es.: fare limiti rigorosi

CASI LIMITE Nelle stesse ipotesi di prima supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

[Allora $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 1$ per x vicini ad $x_0 \Rightarrow f(x) \leq g(x)$ vicino ad $x_0 \Rightarrow$]

$\int_E g(x) dx$ con pb. in x_0 CONV $\Rightarrow$

$\int_E f(x) dx$ " " CONV.

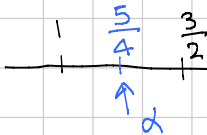
Supponiamo invece che $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

[$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \geq 1$ vicino a $x_0 \Rightarrow f(x) \geq g(x)$ vicino a $x_0 \Rightarrow$]

$\int_E g(x) dx = +\infty$ $\Rightarrow \int_E f(x) dx = +\infty$
 con pb. in x_0 con pb. in x_0

Esempio 8 $\int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\log x}{x\sqrt{x}} dx$ $f(x)$ non è ≥ 0 in tutta la zona di integr., ma lo è per x abbastanza grande $\Rightarrow$ posso applicare i criteri

Facciamo C.A. con $\frac{1}{x^\alpha}$ facendo in modo che $\alpha > 1$, ma $\alpha < \frac{3}{2}$



Prendo $g(x) = \frac{1}{x^{5/4}}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^{3/2}} \cdot x^{5/4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^{1/4}} = 0$$

$\Rightarrow f(x) \leq g(x)$ per x grandi $\int g(x) dx$ conv. (con pb. a $+\infty$) $\Rightarrow$ int. dato conv.

MAT I ILC

OKA 77

CRITERIO ASSOLUTA INTEGRABILITÀ

$$\int_E |f(x)| dx \text{ CONV.} \Rightarrow \int_E f(x) dx \text{ CONV.}$$

$$\int_E |f(x)| dx = +\infty \Rightarrow \text{BOH}$$

A questo si possono applicare i criteri precedenti

Dim. $f(x) = f(x) - |f(x)| + |f(x)|$
 $= |f(x)| - (|f(x)| - f(x))$

$$\int_E f(x) dx = \int_E |f(x)| dx - \int_E (|f(x)| - f(x)) dx = \text{CONV.}$$

$\uparrow$ conv. per ipotesi $\uparrow$ converge per confr.

$$0 \leq |f(x)| - f(x) \leq 2|f(x)|$$

$$\int_E 2|f(x)| dx \text{ conv. per ipotesi} \Rightarrow \int_E (|f(x)| - f(x)) dx \text{ conv.}$$

$\uparrow$ per confronto

Stessa dimostrazione funziona per la serie

Esempio 1 $\int_2^{+\infty} \underbrace{\frac{\sin x}{x^2}}_{f(x)} dx$ $f(x)$ ha segno variabile VERAMENTE

Considero $\int_2^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^2} \right| dx = \int_2^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2} dx$

$$0 \leq \frac{|\sin x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ conv.} \Rightarrow \int_2^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2} dx \text{ conv.}$$

$\uparrow$ confronto

$$\Downarrow \leftarrow \text{Assol. int.}$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx \text{ conv.}$$

Esempio 2

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan(3x) - 3 \sin x}{x^{7/2}} dx = \int_0^1 + \int_1^{\infty} \Rightarrow \text{CONV.}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{f(x) \text{ a segno variabile}} \quad \quad \quad \begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ \text{CONV.} & \text{CONV.} \end{matrix}$

Considero $\int_1^{+\infty} |f(x)| dx$

$$|f(x)| \leq \frac{10}{x^{7/2}} \Rightarrow \int \frac{10}{x^{7/2}} dx \text{ con pb. a } +\infty \text{ conv.}$$

$\Downarrow \leftarrow$ confronto

$$\int |f(x)| dx \text{ con pb. a } +\infty \text{ conv.}$$

$\Downarrow \leftarrow$ Assol. conv.

$$\int f(x) dx \text{ con pb. a } +\infty \text{ conv.}$$

Considero il problema in $x=0$

Brutale :

$$f(x) \sim \frac{3x - 3x}{x^{7/2}} = 0 \quad \text{No! Ci siamo fermati troppo presto!}$$

$$f(x) \sim \frac{3x - \frac{(3x)^3}{3} - 3\left(x - \frac{x^3}{6}\right)}{x^{7/2}} = \frac{\cancel{3x} - 9x^3 - \cancel{3x} + \frac{x^3}{2}}{x^{7/2}}$$

$\uparrow$
per $x \sim 0$

$$= \frac{-8.5 x^3}{x^{7/2}} = -\frac{8.5}{\sqrt{x}}$$

Dallo studio fatto segue che Num $\sim -8.5 x^3$ per $x \sim 0$

Per $x \sim 0$ il numeratore è negativo $\Rightarrow$ segno costante $\Rightarrow$ porto il - fuori e applico i criteri

$\Rightarrow$ si comporta (l'integrale tra 0 e 1) come $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ con problema in 0 $\Rightarrow$ converge

E se il problema non è in $x=0$ oppure $x=+\infty$?

$$\int_1^3 \frac{dx}{x-1} = \text{Pongo } y = x-1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow dy = dx$$

↑
problema in
 $x=1$

Come cambiano gli estremi?

Quando $x=1$ ho che $y=0$

Quando $x=3$ ho che $y=2$

$$= \int_0^2 \frac{dy}{y} \leftarrow \text{Questo ha problemi in } y=0 \text{ e diverge}$$

+ in generale: $\int_a^{a+1} \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx$ con cambio di variabili si riduce a
↑
problema in $x=a$

$$\int_0^1 \frac{dy}{y^\alpha}, \text{ quindi } \begin{cases} \rightarrow \text{converge se } \alpha > 1 \\ \rightarrow \text{diverge a } +\infty \text{ se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Stessa cosa per $\int_{a-1}^a \frac{1}{(a-x)^\alpha} dx$

Esempio 1 $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} \quad \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{(x+1)(x-1)}}$

Brutale: $f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per } x \sim 1}}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{(x-1)^{1/2}}$

↑
COLPEVOLE DEL
FATTO CHE L'INT.
È IMPROPRIO

⇒ L'int. dato si comporta come

$$\int \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx \text{ con pb. in } 1, \text{ dunque converge}$$

Rigoroso: C.A. con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$. Devo fare

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{(x+1)(x-1)}} \cdot \cancel{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0 \neq +\infty$$

↑
→ stesso comp.

MAT I TLC

ORA 78

Titolo nota

06/12/2006

Integrali in 2 VARIABILI

1. NOTAZIONI
2. SIGNIFICATO GEOMETRICO
3. "DEFINIZIONI"
4. TECNICHE DI CALCOLO

1. NOTAZIONI Integrali PROPRI in 2 variabili

2 ingredienti fondamentali

- zona di integrazione: insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ LIMITATO
- integranda: funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ LIMITATA
(cioè $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $|f(x,y)| \leq M \quad \forall (x,y) \in A$)

$$\iint_A f(x,y) dx dy \leftarrow \text{integrale doppio di } f \text{ sull'insieme } A$$

Talvolta si abbrevia con $\int_A f(x,y) dx dy$

— o — o —

2. SIGNIFICATO GEOMETRICO

$$\int_A f(x,y) dx dy = \text{Volume } \boxed{\text{con segno}} \text{ della parte di spazio}$$

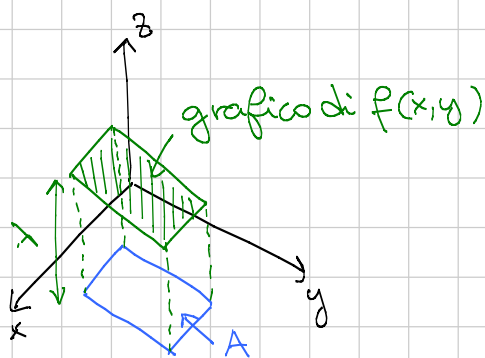
compresa tra il grafico di $f(x,y)$ e il piano base xy .

Con segno: le parti in cui $f(x,y) > 0$ contano con il segno +, quelle in cui $f(x,y) < 0$ con il segno -.

— o — o —

3. IDEA DELLA DEFINIZIONECaso banale: $A =$ rettangolo con lati paralleli agli assi

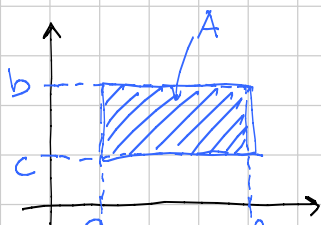
$$A = [a, b] \times [c, d]$$

 $f(x, y) =$ costante λ su tutto A 

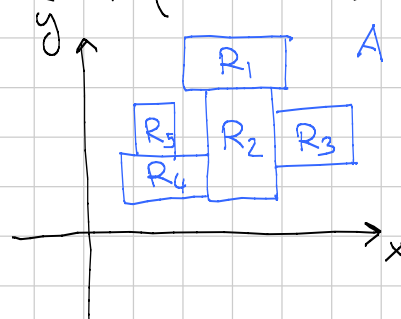
$$\iint_A f(x, y) dx dy = \text{volume con segno di un parallelepipedo}$$

$$= \lambda \cdot \text{Area base} = \lambda \cdot (b-a)(d-c)$$

↑
da questo dipende
il segno

Caso semibanale: FUNZIONI A GRADINO (step functions)

$A =$ unione finita di rettangoli $R_1, \dots, R_m$ con lati // agli assi (che si possono intersecare solo sul bordo)

 $f(x, y) =$ costante λ_i su ogni rettangolo R_i

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \text{somma algebrica del volume con segno dei vari parallelepipedi}$$

$$= \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \text{Area}(R_i)$$

↑
altezza
"escluso grattacielo"

← Area base

Caso generale : $A =$ insieme limitato qualunque
 $f(x,y) =$ funzione limitata qualunque.

Si definisce l'INTEGRALE SUPERIORE $I^+(f; A)$ come

$$I^+(f; A) = \inf \left\{ \iint \varphi(x,y) dx dy : \varphi(x,y) \text{ è una qualunque funzione a gradini t.c. } \varphi(x,y) \geq f(x,y) \text{ per ogni } (x,y) \in A \right\}$$

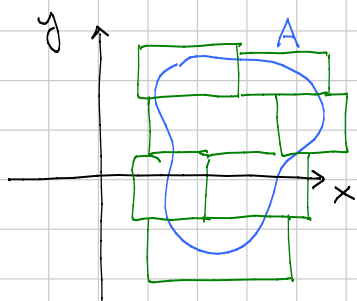
$\uparrow$
 Nella zona in cui è definita $\varphi(x,y)$

Analogamente si definisce l'integrale inferiore

$$I^-(f; A) = \sup \left\{ \iint \varphi(x,y) dx dy : \varphi(x,y) \text{ è --- t.c. } \varphi(x,y) \leq f(x,y) \text{ per ogni } (x,y) \in A \right\}$$

$\uparrow$
 come sopra

Come deve essere fatta la zona in cui è definita φ ?



Supponiamo $f(x,y) > 0$ in A .

possibile insieme di definizione di una funzione a gradini $\varphi(x,y)$ che sia $\geq f(x,y)$ in A .

Problema simile si ha con funzioni a gradino $\leq f(x,y)$ in A .

Differenza tra caso 1-dim. e 2-dim. : le funzioni a gradino non sfiorano solo in altezza, ma anche in larghezza.

SEMPRE

In generale si ha che $I^+(f; A) \geq I^-(f; A)$. Se sono uguali si dice che $f(x,y)$ è integrabile (secondo RIEMANN) in A e il valore comune è l'INTEGRALE

$$\iint_A f(x,y) dx dy.$$

Tutte le funzioni continue (e non solo) sono integrabili.

Aver supposto A ed $f(x,y)$ limitati assicura l'esistenza di funzioni a gradino $\geq f$ e $\leq f$.

4. TECNICHE DI CALCOLO

"Un integrale in dim 2 = 2 integrali in dim. 1"

FORMULA DI RIDUZIONE SUI RETTANGOLI

A = rettangolo con lati // agli assi : $A = [a, b] \times [c, d]$

$f(x,y)$ = funzione limitata qualunque

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d dy f(x,y) = \int_c^d dy \int_a^b dx f(x,y)$$

Esempio 1 $A = [0,1] \times [0,2]$ $f(x,y) = x^2 y$

$$\iint_A x^2 y dx dy = \int_0^1 dx \int_0^2 dy x^2 y = \int_0^1 dx \left[x^2 \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2} =$$

↑
primitiva di $x^2 y$ rispetto alla variabile y

$$= \int_0^1 dx \left\{ x^2 \cdot \frac{4}{2} - 0 \right\} = 2 \int_0^1 x^2 dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3}$$

In alternativa:

$$\iint_A x^2 y dx dy = \int_0^2 dy \int_0^1 dx x^2 y = \int_0^2 dy \left[\frac{x^3}{3} y \right]_{x=0}^{x=1} =$$

↑
primitiva di $x^2 y$ risp. a x

$$= \int_0^2 dy \left\{ \frac{y}{3} - 0 \right\} = \frac{1}{3} \int_0^2 y dy = \frac{1}{3} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2} = \frac{2}{3}$$

Più comodamente

$$\begin{aligned}\iint_A x^2 y \, dx \, dy &= \int_0^1 dx \int_0^2 dy \, x^2 y = \int_0^1 x^2 dx \int_0^2 y \, dy = \\ &= \int_0^1 x^2 dx \underbrace{\left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2}}_2 = 2 \int_0^1 x^2 dx \\ &= 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3} .\end{aligned}$$

MAT I ILC

ORA 79

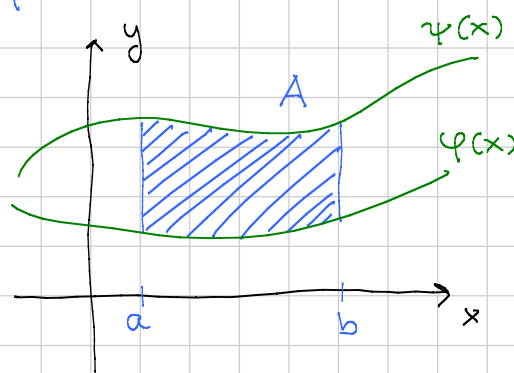
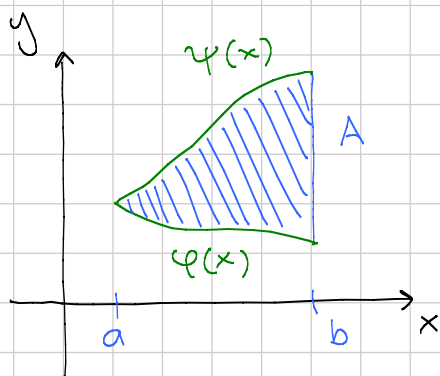
INSIEMI NORMALI RISPETTO ASSE x

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice norm. risp. asse x e' della forma

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b], \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \}$$

intervallo dato

funzioni date



FORMULA DI RIDUZIONE su insiemi normali rispetto asse x

$A = \text{ins. norm. asse } x$ $f(x,y) = \text{funzione limitata qualunque}$

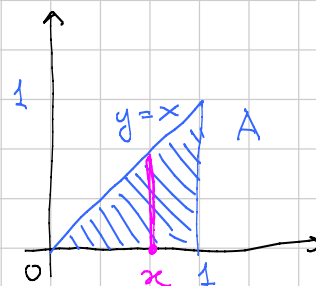
$$\iint_A f(x,y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy f(x,y)$$

Esempio 1

$$\iint_A xy dx dy$$

Scriviamo A come insieme norm. risp. asse x

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], 0 \leq y \leq x \}$$



$$\iint_A xy dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x dy xy = \int_0^1 x dx \int_0^x y dy =$$

Esempio 3 $A =$ Come esempio precedente

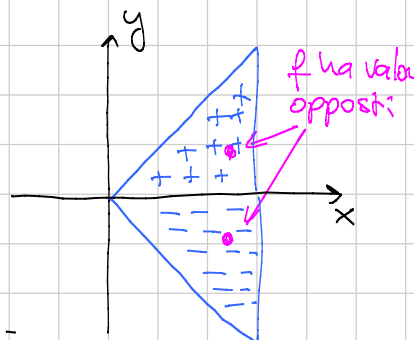
$$\iint_A y \, dx \, dy = \int_0^1 dx \int_{-x}^x dy \, y = \int_0^1 dx \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=-x}^{y=x} =$$

$$= \int_0^1 dx \left\{ \frac{x^2}{2} - \frac{(-x)^2}{2} \right\} \left[= \int_0^1 0 \, dx \right] = 0$$

$\uparrow$ $y=x$ $\uparrow$ $y=-x$

Potevamo scrivere 0 direttamente?

$\iint_A y \, dx \, dy =$ volume positivo nella
parte +++
sommato ad un volume
negativo uguale nella parte ---

 $= 0$

$$f(x, -y) = -f(x, y)$$

$$(x, y) \rightarrow (x, -y)$$

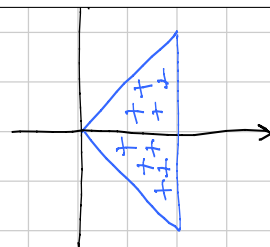
Rigorosamente

insieme simm. rispetto alla trasf.

Esempio 4 $A =$ sdito

$$\iint_A x \, dx \, dy > 0$$

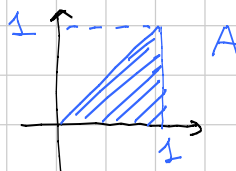
perché sto
integrando una
funzione > 0



$$\iint_A x \, dx \, dy = \int_0^1 dx \int_{-x}^x dy \, x = \int_0^1 x \, dx \int_{-x}^x dy =$$

$\underbrace{\int_{-x}^x dy}_{2x = \text{lungh. interv.}}$

$$= 2 \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{2}{3}$$

Esempio 5 $\iint_A x \, dx \, dy = \frac{1}{3}$ 

$$\iint_{\Delta} x \, dx \, dy = \iint_{\nabla} x \, dx \, dy$$

Esempio 6

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$$

Non è ancora una scrittura come insieme normale

$$\iint_A y \, dx \, dy = \text{(di sicuro sarà } > 0 \text{)}$$

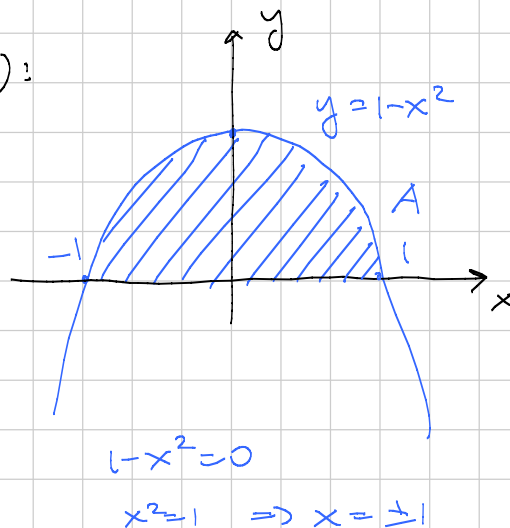
Scrivo A come insieme normale (asse x):

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 1], 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$$

$$= \int_{-1}^1 dx \int_0^{1-x^2} dy \, y = \int_{-1}^1 dx \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1-x^2}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-x^2)^2 dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 - 2x^2 + x^4) dx$$

$$= \dots$$

Esempio 7

A = come esempio 6

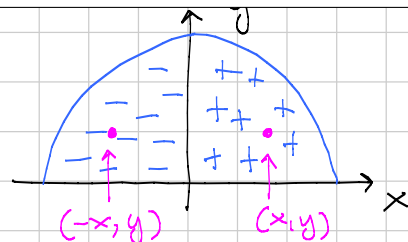
$$\iint_A x \, dx \, dy = 0$$

dispari risp. variabile x

$$f(-x, y) = -f(x, y)$$

Rigoroso:

Q'insieme A è simmetrico rispetto alla trasformazione $(x, y) \rightarrow (-x, y)$

Esempio 8

A = come 6 e 7

$$\iint_A |x| \, dx \, dy = 2 \iint_{AD} x \, dx \, dy = 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} dy \quad (\text{per simmetria})$$

parte destra di A

$$= 2 \int_0^1 x \, dx \int_0^{1-x^2} dy = \dots$$

$1-x^2 = \text{lungh. interv.}$

$$= 2 \int_0^1 x(1-x^2) dx = 2 \int_0^1 (x - x^3) dx = \dots$$

MAT I LC

ORA 80

INSIEMI NORMALI RISPETTO ASSE y

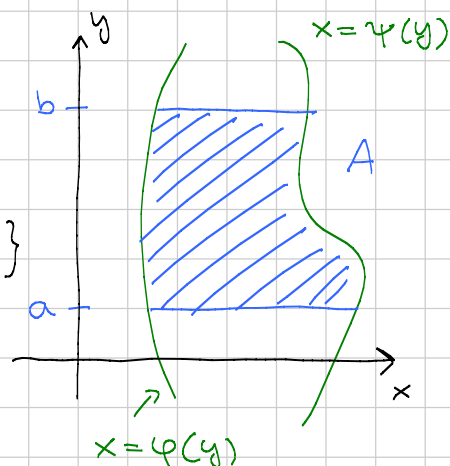
Un insieme si dice normale risp. all'asse y se è della forma

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [a, b], \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$

Per tali insiemi vale la seguente

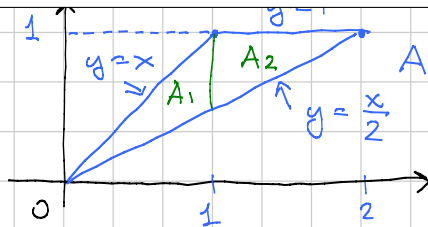
FORMULA DI RIDUZIONE

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} dx f(x, y)$$



Esempio 1

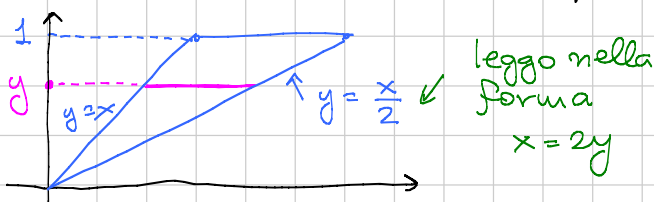
$$\iint_A x dx dy = \iint_{A_1} x dx dy + \iint_{A_2} x dx dy$$



A_1 e A_2 sono normali risp. asse x

$$= \underbrace{\int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^x dy}_\text{integr. su } A_1} x + \underbrace{\int_1^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^1 dy}_\text{integr. su } A_2} x = \dots \text{ così viene}$$

In alternativa si può vedere A come insieme normale risp. asse y



$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1], \quad y \leq x \leq 2y \}$$

$$\iint_A x \, dx \, dy = \int_0^1 dy \int_y^{2y} dx \, x = \int_0^1 dy \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=y}^{x=2y} =$$

↑
prim. risp. a x

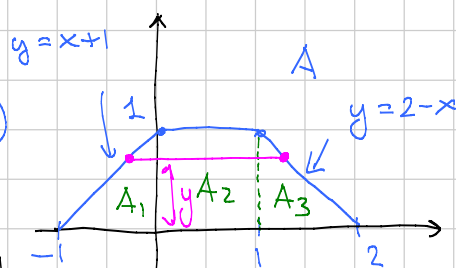
$$= \int_0^1 dy \left\{ \frac{(2y)^2}{2} - \frac{y^2}{2} \right\} = \frac{3}{2} \int_0^1 y^2 \, dy = \frac{1}{2}$$

↑
x=2y ↑
x=y

Esempio 2

$$\iint_A y \, dx \, dy \quad (> \text{già sappiamo})$$

$$= \underbrace{\int_{-1}^0 dx \int_0^{x+1} dy \, y}_{\text{su } A_1} + \underbrace{\int_0^1 dx \int_0^1 dy \, y}_{\text{su } A_2} + \underbrace{\int_1^2 dx \int_0^{2-x} dy \, y}_{\text{su } A_3}$$



visto rispetto all'asse y

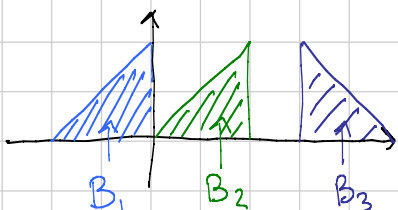
$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1], \quad y-1 \leq x \leq 2-y \}$$

$$\iint_A y \, dx \, dy = \int_0^1 dy \int_{y-1}^{2-y} dx \cdot y = \int_0^1 y \, dy \int_{y-1}^{2-y} dx$$

↑

lung. interv. =
 $2-y - (y-1) = 3-2y$

$$= \int_0^1 y(3-2y) \, dy = \text{facile.}$$



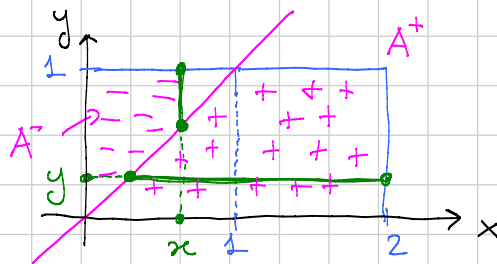
$$\iint_{B_1} y \, dx \, dy = \iint_{B_2} y \, dx \, dy = \iint_{B_3} y \, dx \, dy$$



Esempio 3 $A = [0, 2] \times [0, 1]$ $f(x, y) = |x - y|$

Considero il segno di $x - y$

$$x - y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq x$$



$$|x - y| = \begin{cases} x - y & \text{in } A^+ \\ y - x & \text{in } A^- \end{cases}$$

$$\iint_A |x - y| \, dx \, dy = \iint_{A^+} (x - y) \, dx \, dy + \iint_{A^-} (y - x) \, dx \, dy =$$

$$A^- = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], \quad x \leq y \leq 1 \right\}$$

↑
norm. asse x

$$A^+ = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1], \quad y \leq x \leq 2 \right\}$$

↑
norm. asse y

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 dy \int_y^2 dx (x - y) + \int_0^1 dx \int_x^1 dy (y - x) \\ &= \int_0^1 dy \left[\frac{x^2}{2} - xy \right]_{x=y}^{x=2} + \int_0^1 dx \left[\frac{y^2}{2} - xy \right]_{y=x}^{y=1} = \text{viene} \end{aligned}$$

↑
prim. risp.
a x

↑
prim. risp.
a y

Osservazione



$$\iint_{T_1} (x - y) \, dx \, dy = \iint_{T_2} |x - y| \, dx \, dy$$

Esempio 4

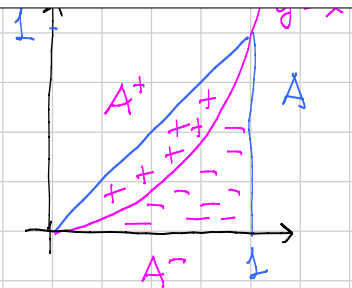
$$\iint_A |y-x^2| dx dy =$$

$$y-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq x^2$$

$$= \iint_{A^+} (y-x^2) dx dy + \iint_{A^-} (x^2-y) dx dy$$

$$= \iint_{A^+} (y-x^2) dx dy - \iint_{A^-} (y-x^2) dx dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_{x^2}^x dy (y-x^2) - \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy (y-x^2) = \text{cont'}. \quad _$$



MAT I TLC

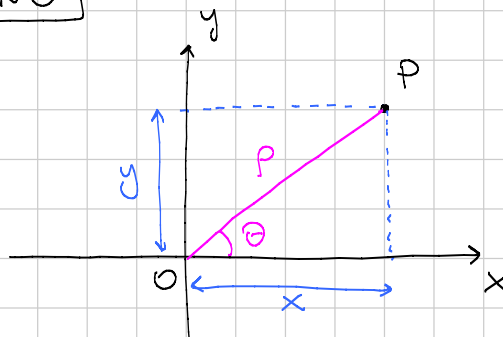
ORA 81

Titolo nota

07/12/2006

COORDINATE POLARI NEL PIANO

Un punto P nel piano si può identificare tramite le sue coord. cartesiane (x, y) oppure tramite le sue coord. polari ρ e θ



ρ = distanza di P dall'origine

θ = angolo tra semiasse positivo delle x e OP , contato in senso antiorario

$\rho \geq 0$ θ = angolo definito a meno di multipli di 2π

Caso particolare: se P è nell'origine, allora $\rho = 0$ e θ non è definito.

FORMULE DI PASSAGGIO

Se conosco ρ e θ posso calcolare x e y mediante

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

Se conosco x e y posso calcolare

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Per θ la situazione è più delicata.

Apparentemente

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \arctan \frac{y}{x}$$

Niiii---

Intanto servirebbe $x \neq 0$ per poter dividere. Il grosso problema è che la formula vale solo nel I e IV quadrante.

Esempio $P = (-1, 0)$ se uso la formula

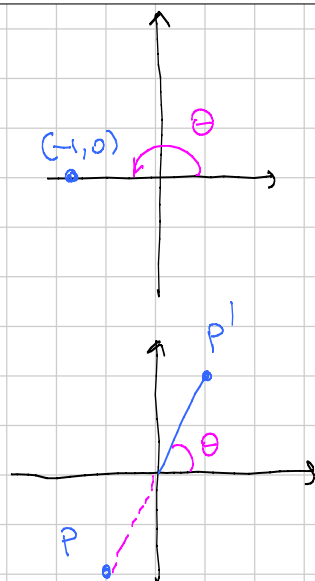
$$\theta = \arctan \frac{0}{(-1)} = \arctan 0 = 0$$

Invece $\theta = \pi$!!!

In generale, se P sta nel II o III quadrante la formula restituisce il θ del simmetrico di P rispetto all'origine.

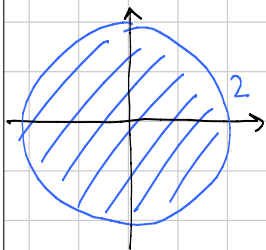
Volendo usare la formula, se P è nel II o III quadrante occorre aggiungere π .

CONSIGLIO: meglio non usare formule, ma guardare il disegno.



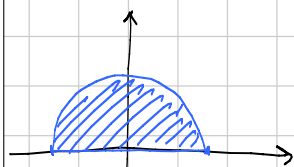
DESCRIZIONE DI INSIEMI DEL PIANO MEDIANTE COORD. POLAR

Esempi



Descr. cart.: $x^2 + y^2 \leq 4$

Descr. polare: $\rho \in [0, 2], \theta \in [0, 2\pi]$



Descr. cartesiana: $x^2 + y^2 \leq 2, y \geq 0$

Descr. polare: $\rho \in [0, \sqrt{2}], \theta \in [0, \pi]$

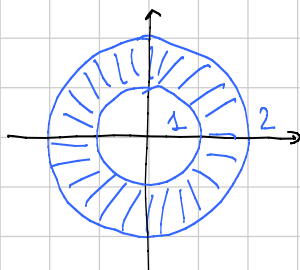


Descr. cartesiana: $x^2 + y^2 \leq 3, x \geq 0$

Descr. polare: $\rho \in [0, \sqrt{3}], \theta \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ NOO
OOO!

Giusta: $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

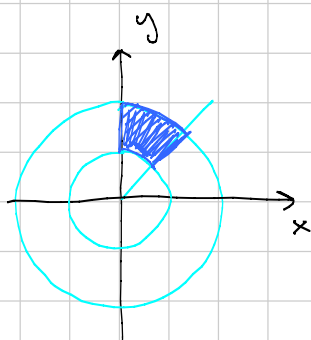
oppure $\theta \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$



Descr. cart.: $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$

Fuori dal cerchio piccolo (pointing to the inner circle)
Dentro cerchio grande (pointing to the outer circle)

Descr. polare: $\rho \in [1, 2], \theta \in [0, 2\pi]$



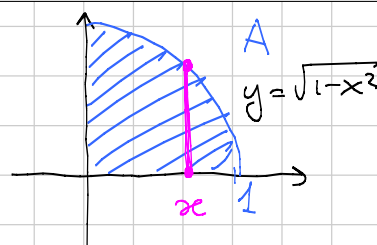
Descr. cartesiana: $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,$
 $x \geq 0, y \geq x$

Descr. polare: $\rho \in [1, 2], \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

INTEGRALI IN COORD POLARI

$$\iint_A x \, dx \, dy$$

L'insieme A è normale (ad esempio) rispetto all'asse x :



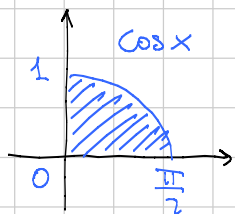
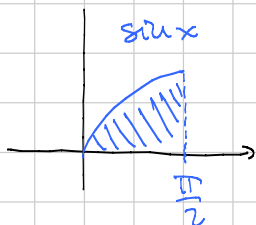
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

In alternativa, si possono usare le coord. polari, nelle quali A si descrive come $\rho \in [0, 1], \theta \in [0, \pi/2]$.

$$\iint_A x \, dx \, dy = \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \quad \underbrace{\rho \cos \theta}_{\substack{\text{x in} \\ \text{coord.} \\ \text{polari}}} \cdot \underbrace{\rho}_{\text{pagamento}} =$$

Descrizione di A in coord. polari

$$= \int_0^1 dp \int_0^{\pi/2} d\theta \quad \textcircled{p^2 \cdot \cos \theta} = \int_0^1 p^2 dp \int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos \theta d\theta}_1$$



Tutti questi valgono 1

$$= \int_0^1 p^2 dp = \left[\frac{p^3}{3} \right]_{p=0}^{p=1} = \frac{1}{3}$$

In generale:

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \iint_B f(\underbrace{p \cos \theta}_{\substack{\uparrow \\ \text{funzione in} \\ \text{coord. polari}}}, \underbrace{p \sin \theta}_{\substack{\uparrow \\ \text{pag.}}}) \underbrace{p}_{\substack{\uparrow \\ \text{pag.}}} dp d\theta$$

$\uparrow$
 Descrizione di
 A in coord. polari

Esempio 2

A = cerchio con centro in (0,0) e raggio 2

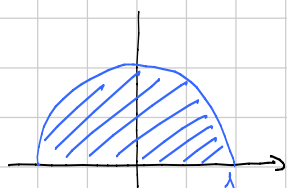
$$\iint_A (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^2 dp \int_0^{2\pi} d\theta \quad \begin{matrix} p^2 & p \\ \uparrow & \uparrow \\ x^2 + y^2 \text{ in} & \text{pag.} \\ \text{coord. pol.} & \end{matrix}$$

$$= \int_0^2 dp \int_0^{2\pi} p^3 d\theta = \int_0^2 p^3 dp \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^2 p^3 dp = \dots$$

Esempio 3

$$\iint_A x dx dy = 0 \quad (\text{SIMMETRIA!!!!})$$



$$\iint_A y dx dy = \int_0^1 dp \int_0^{\pi} d\theta \quad \begin{matrix} p \sin \theta & p \\ \uparrow & \uparrow \\ y & \text{pag.} \end{matrix}$$

$$= \int_0^1 \rho^2 d\rho \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta d\theta}_2 = 2 \int_0^1 \rho^2 d\rho = \frac{2}{3}.$$

N.B.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin \theta d\theta &= [-\cos \theta]_{\theta=0}^{\theta=\pi} \\ &= -\cos \pi - (-\cos 0) \\ &= 1 + \cos 0 = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$



MAT I L C

ORA 82

CAMBI DI VARIABILE PER INT. DOPPI

Esempio $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x+y \leq 1, 2 \leq x-y \leq 3 \}$

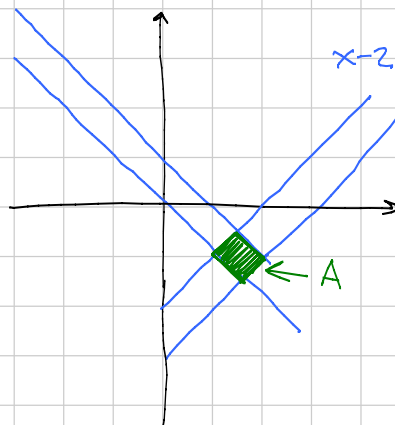
$$\iint_A (x^2 - y^2) dx dy$$

$$x+y \geq 0 \rightarrow y \geq -x$$

$$x+y \leq 1 \rightarrow y \leq 1-x$$

$$x-y \leq 3 \rightarrow y \geq x-3$$

$$x-y \geq 2 \rightarrow y \leq x-2$$



$$0 \leq x+y \leq 1$$

$\overset{u}{\parallel}$

$$2 \leq x-y \leq 3$$

$\overset{v}{\parallel}$

$$(x^2 - y^2) = (x+y)(x-y) = uv$$

$$\iint_A (x^2 - y^2) dx dy = \int_0^1 du \int_2^3 dv$$

↑
descrizione insieme
A usando le
coord. u e v

$$uv$$

Funzione
 $x^2 - y^2$ nella
variabili u e v

$$\frac{1}{2} =$$

↑
 $J(u,v)$
pagamento

Come calcolare il pagamento $J(u,v)$

① Ricavare x e y (in funzione di u e v)

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$$

$$\text{Sommo: } 2x = u+v \Rightarrow$$

$$\text{Sottr.: } 2y = u-v \Rightarrow$$

$$x = \frac{u+v}{2}$$

$$y = \frac{u-v}{2}$$

② Costruzione matrice JACOBIANA

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

③ Determinante JACOBIANO

$$J(u,v) = |\text{Det (Matrice)}|$$

Nell'esempio: $J(u,v) = \left| -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right| = \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}.$

Nell'esempio l'integrale è diventato

$$\frac{1}{2} \int_0^1 du \int_2^3 dv (uv)$$

—o—o—

La procedura indicata nel caso delle coord. polari diventa:

① Ricavare x e y in funzione di ρ e θ :

$$x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta$$

② Matrice jacobiana:

$$\begin{pmatrix} x_\rho & x_\theta \\ y_\rho & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

③ Det. jacobiano

$$J(\rho, \theta) = \rho \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta = \rho (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \rho$$

Esempi importanti di cambio di variabile

1. Traslazioni $u = x + a$ $v = y + b$ (a, b numeri)

① $x = u - a, y = v - b$

② $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Identità}$

③ $J = |\text{Det}| = 1$

2. Dilatazioni degli assi $u = ax$ $v = by$ (a, b numeri $\neq 0$)

① $x = \frac{u}{a}$ $y = \frac{v}{b}$

② $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$ Matrice DIAGONALE

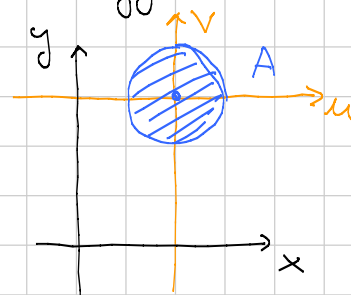
③ $J = |\text{Det}| = \frac{1}{|ab|}$

Esempio 1

$A =$ cerchio con centro in $(2, 3)$ e raggio 1

$\iint_A x \, dx \, dy$ (di sicuro sarà > 0)

$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{(x-2)}_u^2 + \underbrace{(y-3)}_v^2 \leq 1^2 \}$



Nelle coordinate (u, v) l'equazione del cerchio è $u^2 + v^2 \leq 1$

$\iint_A x \, dx \, dy = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} (u+2) \cdot 1 \, du \, dv =$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 Insieme A nelle x ricavato J
 coord. u e v risp. a u e v

$= \iint_{u^2+v^2 \leq 1} (u+2) \, du \, dv$ Per questo posso usare coord. polari

Oppure, più brevemente,

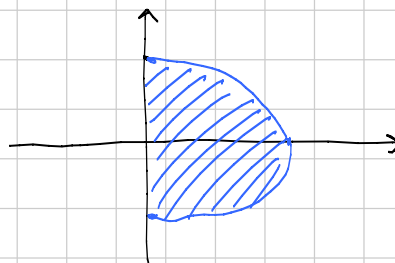
$$= \iint_{u^2+v^2 \leq 1} u \, du \, dv + \iint_{u^2+v^2 \leq 1} 2 \, du \, dv = 2\pi$$

$\begin{array}{ccc} \parallel & & \parallel \\ \text{per simmetria} & & 2 \text{ Area cerchio} \\ & & \parallel \\ & & 2\pi \end{array}$

Esempio 2 $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 3y^2 \leq 1, x \geq 0 \}$

$$\iint_A y^2 \, dx \, dy \quad (\text{di sicuro } > 0)$$

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3y^2 &\leq 1 \\ (\sqrt{2}x)^2 + (\sqrt{3}y)^2 &\leq 1 \end{aligned}$$



Posso $u = \sqrt{2}x$, $v = \sqrt{3}y$ e insieme diventa

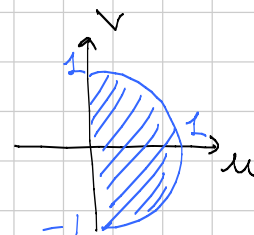
$$u^2 + v^2 \leq 1, \quad u \geq 0$$

$$y = \frac{v}{\sqrt{3}}$$

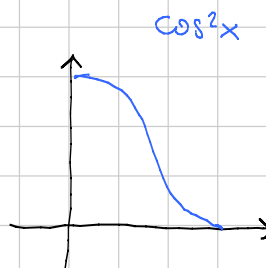
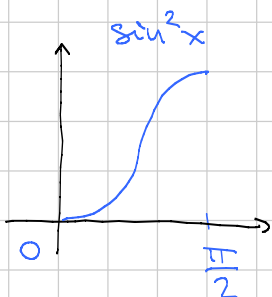
$$\iint_A y^2 \, dx \, dy = \iint_{\substack{u^2+v^2 \leq 1 \\ u \geq 0}} \underbrace{\frac{v^2}{3}}_{y^2} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{6}}}_{J \text{ calcolato prima}} \, du \, dv$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{6}} \iint_{\substack{u^2+v^2 \leq 1 \\ u \geq 0}} v^2 \, du \, dv = (\text{POLARI})$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{6}} \int_0^1 \rho \, d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \underbrace{\rho^2 \sin^2 \theta}_{v^2} \quad \begin{array}{c} \rho \\ \uparrow \\ J \end{array}$$



$$= \frac{1}{3\sqrt{6}} \int_0^{\sqrt{6}} \rho^3 d\rho \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta d\theta = \text{si fa}$$



$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$$

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx \Rightarrow I_1 = I_2$$

$$I_1 + I_2 = \int_0^{\pi/2} (\cos^2 x + \sin^2 x) \, dx = \int_0^{\pi/2} 1 \, dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I_1 = I_2 = \frac{\pi}{4}$$

MAT I TLC

ORA 83

Titolo nota

09/12/2006

INTEGRALI TRIPLI1. NOTAZIONI $A \subseteq \mathbb{R}^3$ limitato $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ limitata

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz$$

$$\int_A f(x, y, z) dx dy dz$$

2/3. SIGNIFICATO GEOMETRICO/FISICO E DEF.

A = solido nello spazio $f(x, y, z) > 0$ e rappresenta la densità del materiale di cui è composto il solido (eventualmente varia da punto a punto)

Obiettivo: calcolare il peso del solido

Caso banale: solido A è un parallelepipedo con lati paralleli agli assi $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$

$f(x, y, z) = \text{costante } \lambda$ su tutto A .

$$\begin{aligned} \text{Peso} &= \text{Volume}(A) \cdot \lambda \\ &= (b-a)(d-c)(f-e) \cdot \lambda \end{aligned}$$

Caso semi-banale: solido A = unione di "mattoni" (parallelepipedi) su ciascuno dei quali la densità è costante.

Peso = somma dei pesi dei singoli mattoni

Caso generale: A = limitato qualunque
 $f(x, y, z)$ = funzione limitata qualunque



Si suddivide il solido in tanti mattoncini
 Si suppone la densità costante in ogni matton.

Si calcola un'approssimazione del peso sommando i pesi dei singoli mattoni.

L'approssimazione risulta

* per eccesso se su ogni mattone ho preso densità costante $\geq$ densità vera, e l'unione di tutti i mattoni contiene il solido

* per difetto nel caso opposto

Se l'approssimazione dal basso e dall'alto al limite convergono allo stesso valore questo è per definizione il peso del solido

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz$$

4. TECNICHE DI CALCOLO : Formule di riduzione

$$3 = 1 + 1 + 1$$

$$3 = 2 + 1$$

$$3 = 1 + 2$$

Formula di riduzione sui parallelepipedi

$$A = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \quad f = \text{qualunque}$$

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz \quad f(x, y, z)$$

Posso avere 6 formule diverse a seconda dell'ordine in cui integro rispetto alle 3 variabili

Esempio $A = [0, 1] \times [0, 2] \times [1, 4]$

$$\iiint_A yz e^x dx dy dz = \int_1^4 dz \int_0^2 dy \int_0^1 dx \quad yz e^x =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 e^x dx \int_0^2 y dy \int_1^4 z dz \\
 &= \int_0^1 e^x dx \int_0^2 y dy \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=1}^{z=4} = \\
 &= \frac{15}{2} \int_0^1 e^x dx \int_0^2 y dy = \frac{15}{2} \int_0^1 e^x dx \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2} \\
 &= 15 \int_0^1 e^x dx = 15 [e^x]_{x=0}^{x=1} = 15(e-1).
 \end{aligned}$$

— 0 — 0 — 0 —

Esempio 2 $A = [0, 1] \times [-1, 1] \times [0, 2]$

$$\iiint_A e^{xz} dx dy dz = \int_0^1 dx \int_{-1}^1 dy \int_0^2 dz e^{xz} \quad \text{oppure}$$

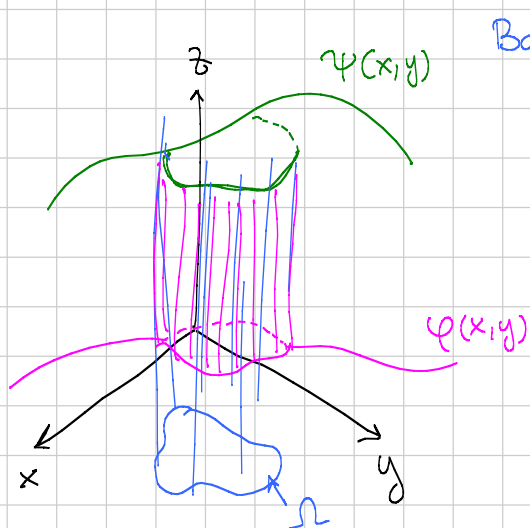
$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 dx \int_0^2 dz \int_{-1}^1 dy e^{xz} = \int_0^1 dx \int_0^2 dz e^{xz} \int_{-1}^1 dy \\
 &= 2 \int_0^1 dx \int_0^2 dz e^{xz} = \\
 &= 2 \int_0^1 dx \left[\frac{e^{xz}}{x} \right]_{z=0}^{z=2} = 2 \int_0^1 \left(\frac{e^{2x}}{x} - \frac{1}{x} \right) dx \\
 &= 2 \int_0^1 \frac{e^{2x}-1}{x} dx = \text{La primitiva penso che non venga} \\
 &\quad \downarrow \\
 &\quad \text{tende a 2 per} \\
 &\quad x \rightarrow 0, \text{ quindi} \\
 &\quad \text{L'integrale NON è improprio}
 \end{aligned}$$

$\int_{-1}^1 dy$
 lunghezza interv. = 2

INSIEMI NORMALI (rispetto al piano base xy)

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^3$ è normale rispetto al piano xy se è della forma

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y) \}$$



$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \leftarrow \text{piano base}$$

Brutalmente: A è una "attiva" di cui $\psi(x, y)$ rappresenta il tappo e $\varphi(x, y)$ rappresenta il fondo

Formula di riduzione su insiemi normali:

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\Omega} dx dy \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} dz f(x, y, z)$$

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER COLONNE

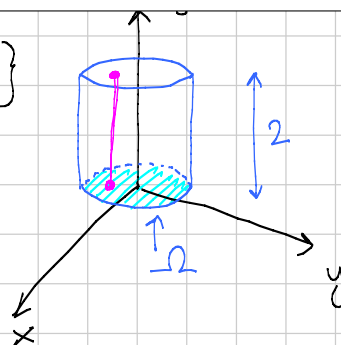
Idea: su ogni punto (x, y) della base Ω tiriamo la retta $\perp$ al piano base. Tale retta interseca l'insieme A in un segmento di estremi $\varphi(x, y)$ e $\psi(x, y)$. Questo segmento è la COLONNA su (x, y) .

Esempio A = cilindro che ha come base il cerchio con centro in $(0, 0)$ e raggio 1 e altezza = 2.

$$\iiint_A z dx dy dz =$$

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in \Omega, 0 \leq z \leq 2\}$$

cerchio nel
piano



colonne

$$\downarrow \iint_{\Omega} dx dy \int_0^2 dz \cdot z = \iint_{\Omega} dx dy \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=2}$$

$$= 2 \iint_{\Omega} dx dy = 2 \text{Area}(\Omega)$$

$$= 2\pi.$$

MAT I TCC

ORA 84

Formula di integrazione per SEZIONI

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [a, b], (x, y) \in S_z\}$$

minima
quota
max.
quota
sezione di A
ad altezza z

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dz \iint_{S_z} f(x, y, z) dx dy$$

FORMULA DI INT. PER SEZIONI

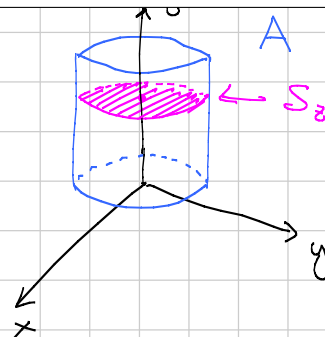
Esempio 1

$$\iiint_A z dx dy dz =$$

A = cilindro prec.

$$= \int_0^2 dz \iint_{S_z} dx dy \cdot z =$$

S_z = sezione cilindro ad altezza z
 = cerchio con centro in $(0,0)$
 e raggio 1



$$= \int_0^2 z dz \iint_{S_z} dx dy = \int_0^2 z \cdot \text{Area}(S_z) dz = \pi \int_0^2 z dz = 2\pi$$

— 0 — 0 —

Esempio 2

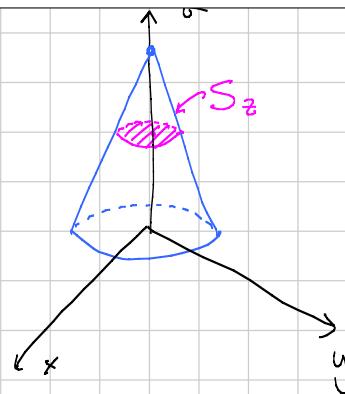
A = cono con base cerchio con centro in $(0,0)$
 e raggio 2, altezza = 3

$$f(x, y, z) = z^2$$

$$\iiint_A z^2 dx dy dz = \int_0^3 dz \iint_{S_z} dx dy \quad (z^2)$$

$$= \int_0^3 z^2 dz \iint_{S_z} dx dy =$$

$$= \int_0^3 z^2 dz \cdot \text{Area}(S_z) =$$



S_z = cerchio con centro in $(0,0)$ e raggio R_z

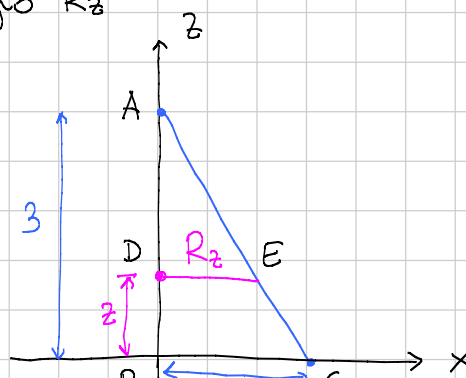
Dalla similitudine $ADE \sim ABC$

ho che

$$AD : DE = AB : BC$$

$$(3-z) : R_z = 3 : 2$$

$$R_z = \frac{2(3-z)}{3} = 2 - \frac{2}{3}z$$



$$R_z = 2 - \frac{2}{3}z \quad \text{controllo} \quad \begin{array}{l} z=0 \rightarrow R_z = 2 \\ z=3 \rightarrow R_z = 0 \end{array}$$

$$= \int_0^3 z^2 \pi \left(2 - \frac{2}{3}z\right)^2 dz = \text{si fa facilmente.}$$

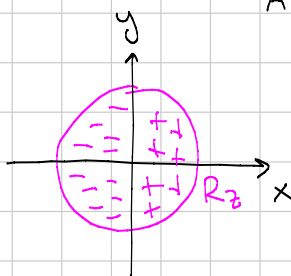
$$\text{Area}(S_z) = \pi (R_z)^2$$

— 0 — 0 —

Esempio 2.5 A = cono dell'esempio 2

$$\iiint_A x z^2 dx dy dz = \int_0^3 dz \iint_{S_z} dx dy \quad (x z^2)$$

$$= \int_0^3 z^2 dz \underbrace{\iint_{S_z} x dx dy}_0 = 0$$



Esempio 3 $A =$ semisfera di raggio 1

$$\iiint_A z \, dx \, dy \, dz$$

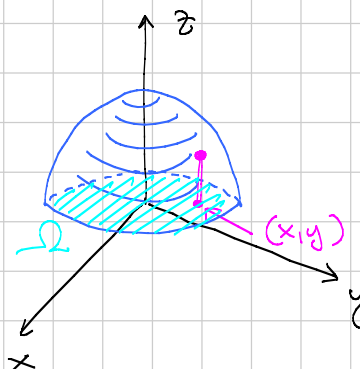
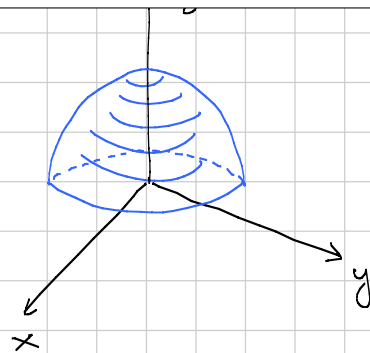
$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, 0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$$

↑
Descrizione come
insieme normale
risp. piano base xy

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0, 1], (x, y) \in S_z\}$$

↑
Descrizione per
sezioni



$$\iiint_A z \, dx \, dy \, dz = \iint_{\Omega} dx \, dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz = z$$

↑
colonne

$$= \iint_{\Omega} dx \, dy \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

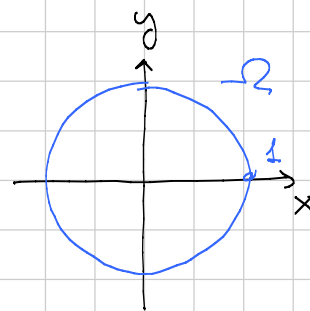
$$= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (1 - x^2 - y^2) \, dx \, dy$$

COORDINATE
POLARI

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta (1 - \rho^2)$$

$\underbrace{\int_0^1 \rho \, d\rho}_{\Omega \text{ in coord. polari}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{(1 - \rho^2)}_{\text{PAG}}$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (\rho - \rho^3) \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = \pi \int_0^1 (\rho - \rho^3) \, d\rho =$$



$$= \pi \left[\frac{p}{2} - \frac{r}{4} \right]_{p=0}^1 = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{4}$$

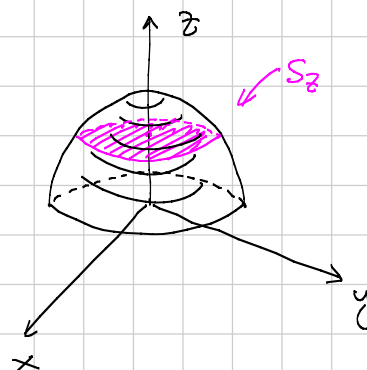
$$\iiint_A z \, dx \, dy \, dz \stackrel{\text{sezioni}}{=} \int_0^1 dz \iint_{S_z} dx \, dy \cdot z$$

$$= \int_0^1 z \, dz \iint_{S_z} dx \, dy =$$

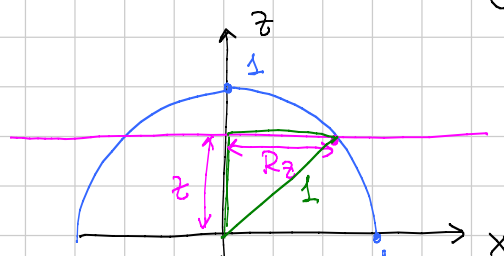
$$= \int_0^1 z \cdot \text{Area}(S_z) \, dz =$$

$$\text{Pitagora} \Rightarrow z^2 + R_z^2 = 1$$

$$\Rightarrow R_z = \sqrt{1 - z^2}$$



S_z è un cerchio di raggio R_z



S_z è un cerchio di raggio $\sqrt{1-z^2} \rightarrow z=0 \leadsto R=1$
 $\rightarrow z=1 \leadsto R=0$

$$= \int_0^1 z \cdot \underbrace{\pi R_z^2}_{\text{Area}(S_z)} \, dz = \pi \int_0^1 z(1-z^2) \, dz = \pi \int_0^1 (z - z^3) \, dz$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

MAT I TCC

ORA 85

Cambi di Variabile negli integrali tripli + coordinate cilindriche
+ coord. sferiche

COORD. CILINDRICHE

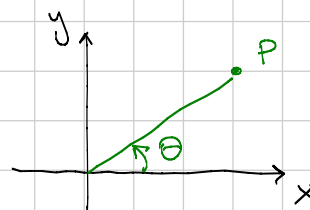
Cartesiane (x, y, z) Cilindriche (ρ, θ, z)

z è la stessa, (ρ, θ) sono le polari corrispondenti a (x, y)

z è la quota di P ,

ρ = distanza della proiezione
di P dalla torre di controllo

θ = angolo solito



Quando si integra in coord. cilindriche $J = \rho$

Esempio A = solido cilindrico con raggio base = 1 e alt. = 2

In coord. cilindriche A diventa: $\rho \in [0, 1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $z \in [0, 2]$

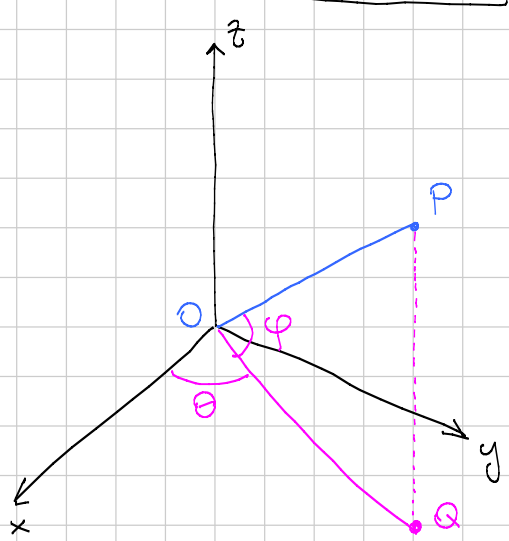
$$\iiint_A z \, dx \, dy \, dz = \underbrace{\int_0^1 \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta}_{\text{Descriz. di A in COORD. CILINDR.}} \underbrace{\int_0^2 dz}_{\substack{\text{Sempre} \\ z \text{ è} \\ \text{pag.}}}$$

$$= \int_0^1 \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 z \, dz =$$

$$= \int_0^1 \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=2} = 2 \int_0^1 \rho \, d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi}$$

$$= 4\pi \int_0^1 \rho \, d\rho = 2\pi$$

COORDINATE SFERICHE (ρ, θ, φ)



ρ = lunghezza di OP =
= distanza di P dall'origine

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Sia Q la proiezione di P sul piano base xy

[OQ sarebbe il ρ delle coord. cilindriche]

φ = angolo tra OQ e OP = angolo tra OP e piano base xy

θ = angolo tra OQ e semiasse positivo delle x (solito)

Dove variano: $\rho \geq 0$, $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\theta \in [0, 2\pi]$

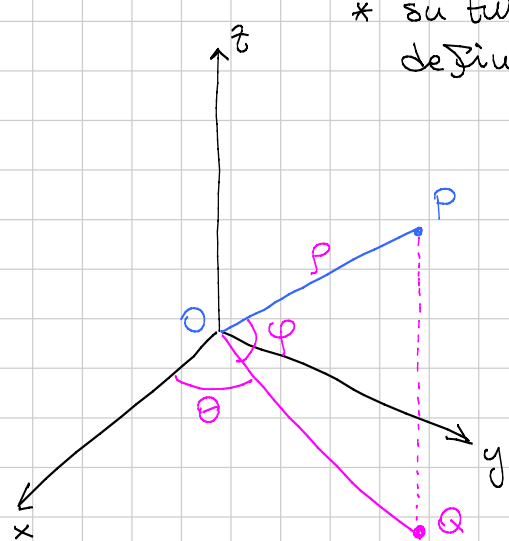
$\uparrow$ LATITUDINE $\uparrow$ LONGITUDINE

Casi particolari:

- * nell'origine si ha $\rho = 0$, mentre θ e φ non sono definite
- * su tutti i punti dell'asse z non è definita θ

FORMULE DI PASSAGGIO

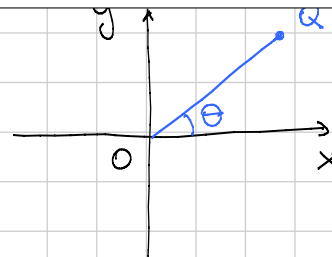
z = lungh. con segno di PQ
 $= \rho \sin \varphi$




Analogamente $OQ = \rho \cos \varphi$

$$x = OQ \cdot \cos \theta = \rho \cos \varphi \cos \theta$$

$$y = OQ \cdot \sin \theta = \rho \cos \varphi \sin \theta$$



$$x = \rho \cos \varphi \cos \theta, \quad y = \rho \cos \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \sin \varphi$$

FORMULE DI PASSAGGIO

Come si calcola J ? 1. Ricavare x, y, z in funzione di ρ, θ, φ (appena fatto)

2. Matrice jacobiana

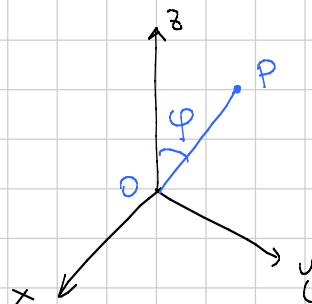
$$\begin{pmatrix} x_\rho & x_\theta & x_\varphi \\ y_\rho & y_\theta & y_\varphi \\ z_\rho & z_\theta & z_\varphi \end{pmatrix}$$

$$3. J(\rho, \theta, \varphi) = |\det(\text{matrice})| = \rho^2 \cos \varphi$$

ACHTUNG!!! I fisici talvolta definiscono diversamente le coord. sferiche.

Definita come in figura φ varia da 0 a π .

In tutte le formule che contengono φ si scambiano $\sin \varphi$ e $\cos \varphi$ (compreso nel J .)



Esempio 1

$A =$ "semisfera alta" $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$.

In coord. sferiche si descrive come

$$\rho \in [0, 1], \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\iiint_A z \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \quad \underbrace{\rho \sin \varphi}_z \quad \underbrace{\rho^2 \cos \varphi}_{\rho \cos \varphi}$$

Descrizione di A in
coord. sferiche

$$= \int_0^1 \rho^3 \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \frac{2 \cos \varphi \cdot \sin \varphi}{2} \, d\varphi$$

2π

$$= 2\pi \int_0^1 \rho^3 \, d\rho \left[-\frac{\cos(2\varphi)}{4} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2}$$

$$= 2\pi \int_0^1 \rho^3 \, d\rho \left\{ \frac{-(-1) + 1}{4} \right\} = \pi \int_0^1 \rho^3 \, d\rho =$$

$$= \pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_{\rho=0}^{\rho=1} = \frac{\pi}{4}$$

Esempio 2 A = sfera con centro in (0,0,0) e raggio 1

$$\iiint_A x^2 \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \quad \underbrace{\rho^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi}_{x^2} \quad \underbrace{\rho^2 \cos \varphi}_J$$

TUTTA LA
SFERA

$$= \int_0^1 \rho^4 \, d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \varphi \, d\varphi = \text{provare e viene}$$

$$\iiint_A x^2 \, dx \, dy \, dz = \iiint_A y^2 \, dx \, dy \, dz = \iiint_A z^2 \, dx \, dy \, dz$$

$$\iiint_A z^2 \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \quad \underbrace{\rho^2 \sin^2 \varphi}_{z^2} \quad \underbrace{\rho^2 \cos \varphi}_J$$

$$= \int_0^1 \rho^4 d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cdot \cos \varphi d\varphi}_{\left[\frac{\sin^3 \varphi}{3} \right]_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}}$$

$$= 2\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \int_0^1 \rho^4 d\rho = 2\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{15} \pi$$

— o —

In alternativa bastava calcolare

$$\frac{1}{3} \iiint_A (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\rho^2}$

MAT I TLC

ORA 86

12/12/2006

Titolo nota

Integrali impropri: trucco dell'int. per parti

Esempio $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

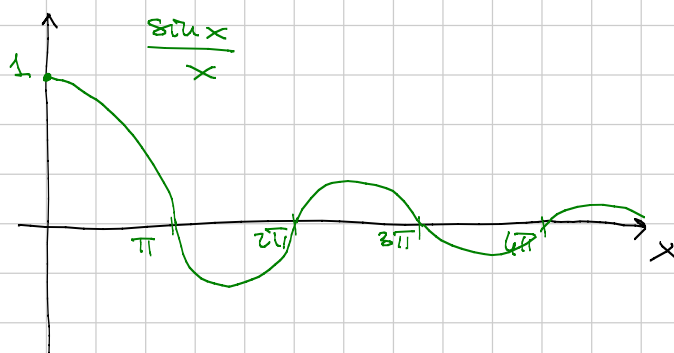
Unico problema è a $+\infty$,
perché per $x \rightarrow 0^+$ l'integranda
tende a 1.

Verrebbe da usare
l'assoluta coem.

$$\frac{|\sin x|}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$\int \frac{1}{x} dx$ con problema
a $+\infty$ diverge

↓
BOH



$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx}_{\text{integrale proprio (numero)}} + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

integrale proprio
(numero)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \text{ si comporta come } \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \stackrel{\text{DEF.}}{=} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{1}{x} \cdot \sin x dx =$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ \left[\frac{1}{x} (-\cos x) \right]_{x=1}^{x=A} - \int_1^A \left(-\frac{1}{x^2} \right) (-\cos x) dx \right\}$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ -\frac{\cos A}{A} + \frac{\cos 1}{1} - \int_1^A \frac{\cos x}{x^2} dx \right\}$$

$$= \frac{\cos 1}{1} - \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{\cos x}{x^2} dx = \frac{\cos 1}{1} - \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx}_{\text{NUMERO}}$$

$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ converge. Infatti

$\int \frac{1}{x^2} dx$ con problema a $+\infty$ converge

$$\Downarrow \quad 0 \leq \frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} + \text{costante}$$

$\int \frac{|\cos x|}{x^2} dx$ con problema a $+\infty$ converge

$\Downarrow$ Assoluta integrabilità

$\int \frac{\cos x}{x^2} dx$ con problema a $+\infty$ converge

NOTA BENE: $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ DIVERGE A $+\infty$

Infatti: l'integranda è positiva per $x \sim 0$. Applico C.A. con $g(x) = \frac{1}{x^2}$

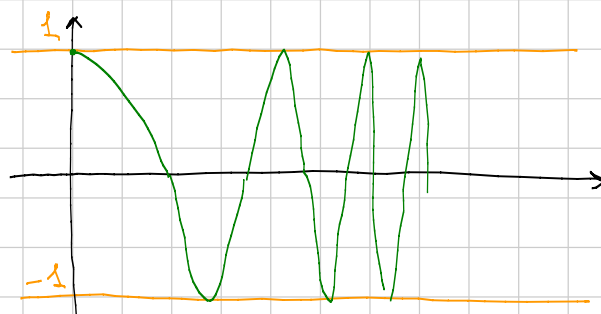
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{x^2} \cdot x^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = 1 \neq 0 \neq +\infty$$

Quindi $\int \frac{\cos x}{x^2} dx$ con problema in $x=0$ si comporta come

$\int \frac{1}{x^2} dx$ con problema in $x=0$, dunque diverge.

Esempio 2 $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$

NOTA BENE: l'integranda non tende a zero per $x \rightarrow +\infty$



$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx & \text{ si comporta come } \int_1^{+\infty} \cos(x^2) dx \\
 \int_1^{+\infty} \cos(x^2) dx & \stackrel{\text{DEF.}}{=} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \cos x^2 dx \\
 & = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \underbrace{\frac{1}{2x}}_G \cdot \underbrace{2x \cos(x^2)}_F dx \\
 & = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ \underbrace{\left[\frac{1}{2x} \cdot \sin(x^2) \right]}_G \right|_{x=1}^{x=A} - \int_1^A \underbrace{\left(-\frac{1}{2x^2} \right)}_G \underbrace{\sin(x^2)}_F dx \right\} \\
 & = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{\sin A^2}{2A} - \frac{\sin(1)}{2} + \int_1^A \frac{\sin(x^2)}{2x^2} dx \right\} \\
 & = -\frac{\sin(1)}{2} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{2x^2} dx}_{\text{converge}} \Rightarrow \text{quello iniz. conv.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{x^2} \text{ con pb. a } +\infty \text{ conv.} & \Rightarrow \int \frac{|\sin(x^2)|}{x^2} dx \text{ con pb. a } +\infty \text{ conv.} \\
 & \quad \uparrow \text{ confronto} \\
 & \quad \downarrow \leftarrow \text{Assol. int.} \\
 & \int \frac{\sin(x^2)}{x^2} dx \text{ con prob. a } +\infty \text{ conv.}
 \end{aligned}$$

— o — o —
 Nello stesso modo si mostra che $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$ converge

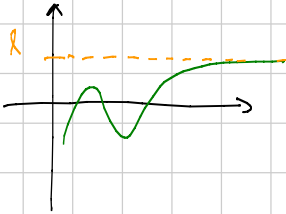
Osservazione 1 Non vale l'analogo della condizione nec. per le serie.

Può succedere che $f(x)$ non abbia limite per $x \rightarrow +\infty$ ma

$\int f(x) dx$ con pb. a $+\infty$ converga.

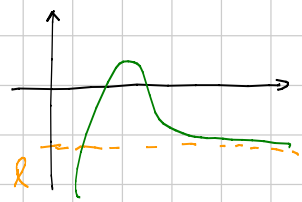
Osservazione 2 È comunque vero che se $f(x) \rightarrow l > 0$ per

$x \rightarrow +\infty$, allora



$\int f(x) dx$ con pb. a $+\infty$ diverge a $+\infty$

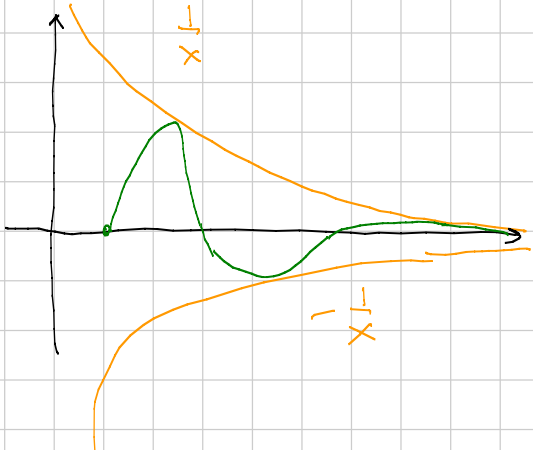
e se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l < 0$, allora



$\int f(x) dx$ con pb. a $+\infty$ diverge a $-\infty$

Esempio 3 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\log x)}{x} dx$

Si annulla dove $\sin(\log x) = 0$,
cioè dove $\log x = n\pi$, cioè dove
 $x = e^{n\pi}$

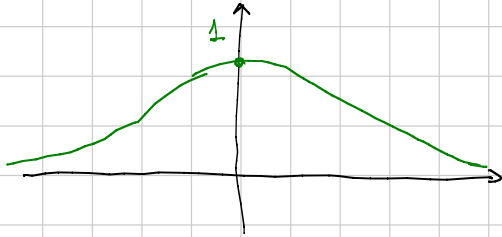


$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\sin(\log x)}{x} dx &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{\sin(\log x)}{x} dx = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\cos(\log x) \right]_{x=1}^{x=A} \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left\{ \underbrace{-\cos(\log A)}_{\text{oscilla tra } -1 \text{ e } 1} + 0 \right\} = \text{N.E.} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ l'integrale è indeterminato.

Esempio 4 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2I$

$\int_0^{+\infty} = \int_{-\infty}^0$



$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge. Perché?

Ad esempio per C.A. con $g(x) = \frac{1}{x^8}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x^2}}{\frac{1}{x^8}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^8}{e^{x^2}} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{CASO} \\ \nearrow \text{ LIMITE} \end{array}$$

[Quindi $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 1$ per x grandi, quindi $f(x) \leq g(x)$ per x grandi]

$\int g(x) dx$ con problema a $+\infty$ converge $\Rightarrow \int e^{-x^2}$ con pb. a $+\infty$ converge

MAT 1 TLC

ORA 87

Calcolo esplicito di $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \underbrace{\int_0^A e^{-x^2} dx}_{I_A}$

Passo in 2 variabili. Calcolo

$$\iint_{Q_A} e^{-x^2-y^2} dx dy =$$

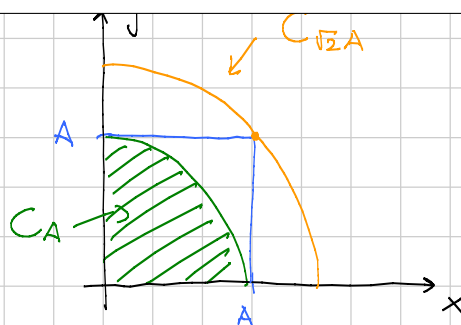
$$= \int_0^A dx \int_0^A dy e^{-x^2-y^2} =$$

$$= \int_0^A dx \int_0^A dy \underbrace{e^{-x^2}}_{\text{circled}} \cdot e^{-y^2} = \int_0^A e^{-x^2} dx \underbrace{\int_0^A e^{-y^2} dy}_{I_A}$$

$$= I_A \underbrace{\int_0^A e^{-x^2} dx}_{I_A} = I_A^2$$



Abbiamo che

(essendo $e^{-x^2-y^2}$ una funzione positiva)

$$\iint_{C_A} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_{Q_A} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_{C_{\sqrt{2}A}} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

" I_A^2

$$\iint_{C_A} e^{-x^2-y^2} dx dy = \underbrace{\int_0^A dp \int_0^{\pi/2} d\theta}_{\text{C}_A \text{ in coord. polari}} \underbrace{e^{-p^2}}_{e^{-x^2-y^2}} \underbrace{p}_{\text{pag.}} dp =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^A \rho e^{-\rho^2} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^A \rho e^{-\rho^2} d\rho \\
 &= \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \right]_{\rho=0}^{\rho=A} \\
 &= \frac{\pi}{2} \left\{ -\frac{1}{2} e^{-A^2} + \frac{1}{2} \right\}
 \end{aligned}$$

Cosa succede quando $A \rightarrow +\infty$?

$$\iint_{C_A} \dots = \frac{\pi}{2} \left\{ -\frac{1}{2} e^{-A^2} + \frac{1}{2} \right\} \rightarrow \frac{\pi}{4}$$

$$\iint_{C_{\sqrt{2}A}} \dots = \frac{\pi}{2} \left\{ -\frac{1}{2} e^{-2A^2} + \frac{1}{2} \right\} \rightarrow \frac{\pi}{4}$$

$$\iint_{Q_A} \dots = I_A^2 \rightarrow \left[\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right]^2 = I^2$$

$$\begin{array}{ccc}
 \boxed{\iint_{C_A} e^{-x^2-y^2} dx dy} & \leq & \boxed{\iint_{Q_A} e^{-x^2-y^2} dx dy} \leq \boxed{\iint_{C_{\sqrt{2}A}} e^{-x^2-y^2} dx dy} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \frac{\pi}{4} & & I^2 & & \frac{\pi}{4}
 \end{array}$$

Per i carabinieri si ha che $I^2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2I = \sqrt{\pi}$$

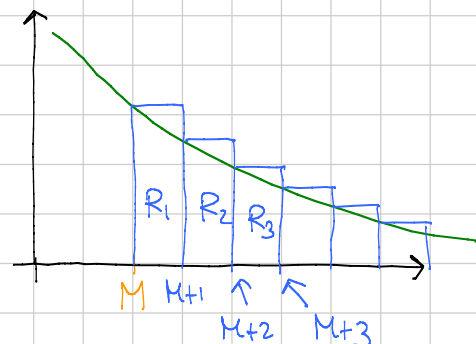
— o — o —

CRITERIO SERIE $\leftrightarrow$ INTEGRALI1^a PARTE: GLI INTEGRALI AIUTANO LE SERIE

Sia M un intero. Sia

$f: [M, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione

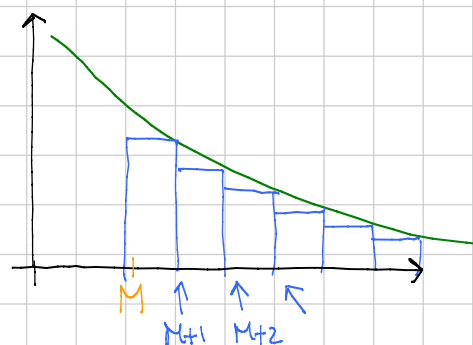
- positiva: $f(x) > 0$
- debolmente decrescente



1^a figura:

$$\int_M^{+\infty} f(x) dx \leq \text{somma aree dei rettangoli}$$

$$= \sum_{n=M}^{+\infty} f(n)$$



R_1 ha base 1 e altezza $f(M) \rightarrow$ area $f(M)$

R_2 " " " $f(M+1) \rightarrow$ area $f(M+1)$ e così via

2^a figura

$$\int_M^{+\infty} f(x) dx \geq \text{somma aree dei rettangoli}$$

$$= f(M+1) + f(M+2) + \dots$$

$$= \sum_{n=M+1}^{\infty} f(n)$$

Conclusione

$$\sum_{n=M+1}^{+\infty} f(n) \leq \int_M^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=M}^{+\infty} f(n)$$

CRITERIO CONFRONTO SERIE INTEGRAL

Se f è positiva e deb. decr., allora

$$\int_M^{+\infty} f(x) dx \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n=M}^{+\infty} \text{ converge}$$

Applicazione:

$$\text{la serie } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \text{ converge} \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^x} dx \text{ converge}$$

Noi sappiamo quando l'integrale converge (fatto con la primitiva) quindi deduciamo quando la serie converge.

2° parte LE SERIE AIUTANO GLI INTEGRALI

METODO DEI TRIANGOLINI

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \text{somma aree dei triangolini}$$

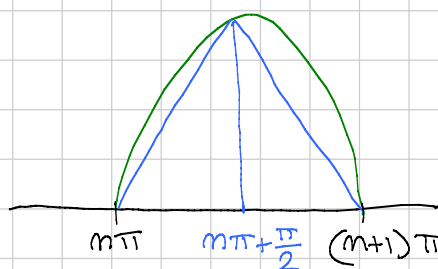
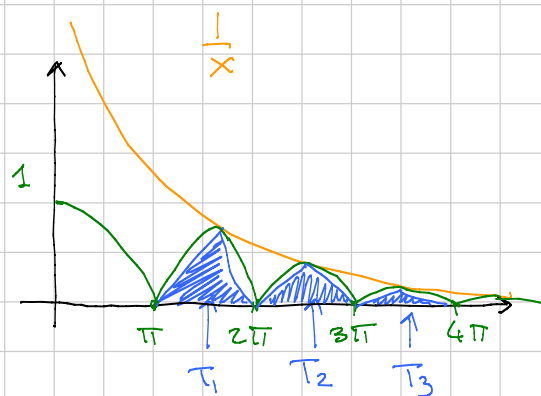
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(T_n)$$

Base di T_n = segmento $[n\pi, (n+1)\pi]$

$\Rightarrow$ lunghezza = π

Altezza di T_n = valore della funzione nel ptod' mezzo

$$= \frac{|\sin(n\pi + \frac{\pi}{2})|}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$$



$$= \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$$

$$\text{Area}(T_n) = \frac{1}{2} \text{ base} \cdot \text{altezza} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$$

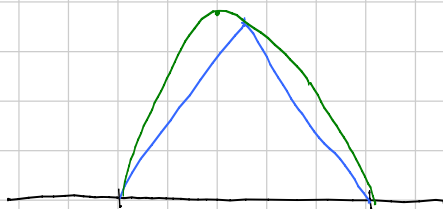
$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(T_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2} \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}} \quad \leftarrow \text{Diverge perché si comporta come } \sum \frac{1}{n}$$

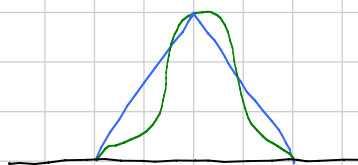
$\Rightarrow$ l'int. improprio diverge

È vero che il vertice del Δ è il p.to di max della funzione nell'intervallo? NO!!!!!!

Basta fare la derivata e vedere che in mezzo non si annulla



Per usare i triangolini dovrei accertarmi che le cose non stiano così



Esercizio: provare a fare lo stesso con

$$\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)| dx = +\infty$$

MAT I TLC

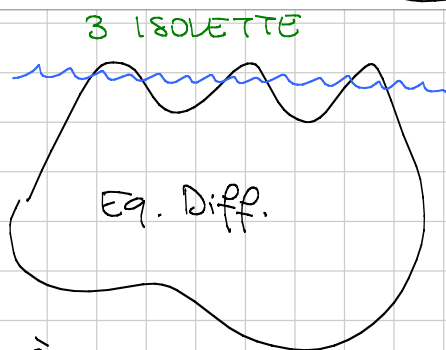
ORA 88

13/12/2006

Titolo nota

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Eq. diff. = equazione in cui l'incognita è una funzione



→ Eq. Diff. **ORDINARIE**: l'incognita è una funzione di una variabile: $y(x)$, $y(t)$, $u(t)$

La funzione incognita $u(t)$ deve soddisfare una certa relazione che lega t , $u(t)$ e un po' di derivate della funzione u

Esempio $u'(t) + 3u(t) = t^2 + 1$ Risolvere l'eq. vuol dire trovare una funzione $u(t)$ che soddisfa la relazione per ogni t e insieme di defin. di u .

→ Eq. Diff. alle derivate parziali: u dipende da più variabili

(ad esempio $u(t, x, y)$) e la relazione coinvolge u e un po' delle sue derivate parziali

Esempio $u_t = u_{xx} + u_{yy}$

Noi vedremo solo eq. diff. ordinarie.

ORDINE DI UN'EQ. DIFF.

È il massimo ordine di derivazione che compare nell'equazione

Esempio $u''(t) + 3u'(t) + [u(t)]^2 = \sin t \rightarrow$ ORDINE 2
 $u'' + 3u' + u^2 = \sin t \leftarrow$ NOTAZIONE RAPIDA

$[u'(t)]^2 + 2tu(t) = 0 \rightarrow$ ORDINE 1

$(u')^2 + 2tu = 0 \leftarrow$ NOTAZIONE RAPIDA

Un'eq. diff. di ordine n si presenta nella forma

$$\Phi(t, u, u', u'', \dots, u^{(n)}) = 0$$

↑
funzione enorme che lega t , u e tutte le derivate di u fino alla n -esima.

Un'eq. diff. si dice **AUTONOMA** se la t compare solo come argomento della u e delle sue derivate,

$$u'(t) = 3u(t) + t^2 \quad \leftarrow \text{NON AUTON.} \quad u' = 3u + t^2$$

$$u'(t) = 3u^2(t) + 5 \quad \leftarrow \text{AUTONOMA} \quad u' = 3u^2 + 5$$

Oss. Autonoma $\Leftrightarrow$ in notazione rapida non compare la t .

Un'eq. diff. si dice **IN FORMA NORMALE** se la derivata di ordine max è ricavata rispetto al resto.

Esempi $u'' = 5u' + 7t \quad \leftarrow \text{SI FORMA NORMALE}$

$$(u'')^3 + 5u' - 10t^2 = 0 \quad \leftarrow \text{NI FORMA NORMALE: non è in forma normale, ma si può portare ricavando } u''$$

$$u'' = \sqrt[3]{10t^2 - 5u'} \quad \leftarrow \text{PORTATA IN FORMA NORMALE}$$

$$(u'')^2 + 5u' - 10t^2 = 0 \quad \leftarrow \text{NO forma normale e non ci si può fare nulla}$$

$$(u'')^2 = 10t^2 - 5u' \quad \leftarrow \text{Non si può decidere univoc. il segno}$$

In generale un'eq. diff. di ordine n in forma normale si presenta nella forma

$$u^{(n)} = F(t, u, u', \dots, u^{(n-1)})$$

non c'è se è AUTONOMA
 $\xrightarrow{\quad} \quad \xrightarrow{\quad}$

Un'eq. diff. del 1° ORDINE in forma normale si dice a

VARIABILI SEPARABILI se il 2° membro è il prodotto di una

funzione della sola t per una funzione della sola u . Si presenta quindi nella forma

$$u' = f(t) \cdot g(u) \rightarrow 1^{\circ} \text{ ISOLA}$$

Esempio 1

$$u' = u \cdot \sin t$$

VAR. SEP. con
 $f(t) = \sin t$ e $g(u) = u$

Es. 2

$$u' + tu = t \quad \text{si può riscrivere come}$$

$$u' = t - tu = t(1-u)$$

VAR. SEP. con
 $f(t) = t$ e $g(u) = 1-u$

Es. 3

$$u' = u^4$$

VAR. SEP. con $g(u) = u^4$ e $f(t) \equiv 1$

Oss. Ogni equazione del 1° ordine in forma normale AUTONOMA è a variabili separabili

$$u' = g(u) \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ f(t)}}{1}$$

Un'eq. diff. di ORDINE qualunque si dice LINEARE se la u e le sue derivate compaiono "di primo grado", cioè se è della forma

$$a_n(t) u^{(n)} + a_{n-1}(t) u^{(n-1)} + \dots + a_1(t) u' + a_0(t) u = f(t)$$

Le funzioni $a_n(t), a_{n-1}(t), \dots, a_1(t), a_0(t)$ si dicono COEFFICIENTI dell'eq.

Esempio 1 $u'' + u' + t^2 u = 0$ SI LINEARE

$u'' + u' + \cos t \cdot u = 0$ SI LINEARE

$u'' + u' + t \cdot \cos u = 0$ NO LINEARE

$u'' + u' + \cos(t \cdot u) = 0$ NO LINEARE

Un'eq. diff. del 1° ORDINE in forma NORMALE e LINEARE si può sempre portare nella forma

$$u' + a(t) u = b(t) \quad 2^a \text{ ISOLA}$$

Si dice che un'eq. diff. lineare è a COEFF. COSTANTI se i coefficienti $a_0, a_1, \dots, a_n$ non dipendono da t e sono quindi numeri.

Si presenta nella forma

$$a_n u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = f(t) \quad 3^a \text{ ISOLA}$$

Un'eq. diff. lineare si dice OMOGENEA se $f(t) = 0$, altrimenti si dice non omogenea.

Domanda: lineare a coeff. cost. + autonoma $\Rightarrow$ omogenea? NO

<u>Esempio</u>	$u'' + 3u' + 5u = \boxed{7}$	$\uparrow f(t)$	coeff. cost. lineare, 2° ordine non omogenea
<u>Esempio</u>	$u' = t(1+u)$ $\downarrow$ $u' - tu = t$	1° ORDINE A VAR. SEP. LINEARE 1° ORDINE	
<u>Esempio</u>	$u' = 7u$ $u' - 7u = 0$	Var. sep. lineare a coeff. costanti omogenea autonoma	

MAT I TLC

ORA 89

Esempio 1 $u' = u$ Una soluzione è $u(t) = e^t$

$u(t) = e^t + c$ per $c \neq 0$ NON è una soluzione

$$u'(t) = e^t \neq u(t).$$

Un'altra soluzione è $u(t) = 2e^t$. Verifica

$$u'(t) = 2e^t = u(t)$$

In generale $u(t) = ce^t$ è una soluzione per ogni $c \in \mathbb{R}$.
Le soluzioni sono infinite. Si potrebbe dimostrare che non ce ne sono altre.

Esempio 2 $u'' = -u$ Una soluz. è $u(t) = \sin t$
Un'altra soluz. è $u(t) = \cos t$

In generale $u(t) = a \sin t + b \cos t$ è una soluzione per ogni valore dei parametri $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$.

$$u'(t) = a \cos t - b \sin t, \quad u''(t) = -a \sin t - b \cos t = -u(t)$$

Si potrebbe dimostrare che non ce ne sono altre

Esempio 3 $u' = -u^2$ Una soluz. è $u(t) = \frac{1}{t}$

$$\text{Verifica: } u'(t) = -\frac{1}{t^2} = -[u(t)]^2$$

$u(t) = \frac{c}{t}$ è soluzione?

$$u'(t) = -\frac{c}{t^2} \stackrel{?}{=} -u^2(t) = -\frac{c^2}{t^2}$$

$$\text{sono uguali} \Leftrightarrow c^2 = c \Leftrightarrow c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per ogni valore del parametro $c \in \mathbb{R}$ si ha che $u(t) = \frac{1}{t+c}$

e soluzione (e non ce ne sono altre)

Verifica: $u'(t) = -\frac{1}{(t+c)^2} = -u^2(t).$

In generale

un'eq. diff. ha infinite soluzioni dipendenti da un numero di parametri uguale all'ordine dell'eq.

PROBLEMA + CAUCHY

→ Equazione differenziale +
CONDIZIONI INIZIALI DI
CAUCHY

Per un'eq. di ordine n le condizioni iniziali di Cauchy prevedono di assegnare il valore di u e di tutte le sue derivate fino alla $(n-1)$ -esima in uno stesso punto t_0 , detto istante iniziale. (In tutto sono n condizioni)

Esempi

$$\begin{cases} u'' + 3u' = t^2 + 1 \\ u(7) = 5 \\ u'(3) = 2 \end{cases}$$

NO: ho assegnato
 u e u' per
valori diversi
di t .

$$\begin{cases} u'' + 3u' = t^2 + 1 \\ u(7) = 5 \\ u''(7) = 5 \end{cases}$$

NO: dovevo
assegnare
 u e u'

$$\begin{cases} u'' + 3u' = t^2 + 1 \\ u(7) = 0 \\ u(5) = 0 \end{cases}$$

NO: dovevo
assegnare
 u e u'

$$\begin{cases} u'' + 3u' = t^2 + 1 \\ u(7) = 5 \\ u'(7) = 6 \end{cases}$$

OK.
($t_0 = 7$)

In generale il problema di CAUCHY per un'eq. diff. in forma normale di ordine n si presenta nella forma

$$\begin{cases} u^{(n)} = F(t, u, u', \dots, u^{(n-1)}) & \leftarrow \text{Eq. Diff.} \\ u(t_0) = u_0 \\ u'(t_0) = u_1 \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t_0) = u_{n-1} \end{cases}$$

n condiz. INIZIALI

$t_0, u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ SONO DATI

TEO. ESISTENZA E UNICITÀ

Consideriamo un problema di Cauchy con l'eq. in forma normale

Allora

* se F è continua il problema ha almeno 1 soluzione (e talvolta anche + di una); $\leftarrow$ ESISTENZA

* se F è un po' meglio (ad esempio differenziabile) allora la soluzione è unica. $\leftarrow$ UNICITÀ

Operativamente: la soluzione di un'eq. diff. di ordine n dipende da n parametri.
Le n condizioni iniziali nei casi decenti permettono di determinare univocamente il valore dei parametri.

EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI

$$\begin{cases} u' = t^3 u^2 \\ u(0) = 5 \end{cases}$$

1. SEPARARE
2. INTEGRARE
3. RICAVARE

Trovare la soluz. gen. dell'eq. con il parametro C (FIN QUI SI USA SOLO l'eq.)

4. DETERMINARE C
5. CONTROLLARE
6. STUDIARE

$\leftarrow$ SI USA COND. INIZIALE

1. SEPARARE

$$u' = t^3 u^2$$

$$\frac{du}{dt} = t^3 u^2$$

[Tutte le t a destra
tutte le u a sinistra]

$$\frac{du}{u^2} = t^3 dt$$

2. INTEGRARE

a sinistra rispetto a u , a destra rispetto a t

$$\int \frac{du}{u^2} = \int t^3 dt ; -\frac{1}{u} = \frac{t^4}{4} + C \leftarrow \text{parametro}$$

3. RICAVARE (u in funzione di t)

$$-\frac{1}{u} = \frac{t^4}{4} + C = \frac{t^4 + 4C}{4} \Rightarrow u = -\frac{4}{t^4 + 4C}$$

La soluzione generale è

$$u(t) = -\frac{4}{t^4 + C}$$

co $4C$, sempre una costante è

Si riesce sempre a trovare la soluz. generale a patto di

- * saper fare le primitive
- * saper ricavare.

4. DETERMINARE C (usando la condizione iniziale)

$$u(0) = 5 \Rightarrow -\frac{4}{C} = 5 \Rightarrow C = -\frac{4}{5}$$

↑ ho messo $t=0$ nella

La soluzione del problema di Cauchy è

$$u(t) = -\frac{4}{t^4 - \frac{4}{5}} = -\frac{20}{5t^4 - 4}$$

$$u(t) = \frac{20}{4 - 5t^4}$$

5. CONTROLLARE (che quella ottenuta al punto 4 sia la soluzione del problema)

Verifico cond. iniz. $u(0) = \frac{20}{4} = 5$. Der. denom.

Verifico l'eq.: $u'(t) = 20 \left(-\frac{1}{(4 - 5t^4)^2} \right) (-20t^3)$

$$= \frac{20^2}{(4 - 5t^4)^2} \cdot t^3 = t^3 \cdot u^2(t) \quad \text{OK}$$

MAT I TLC

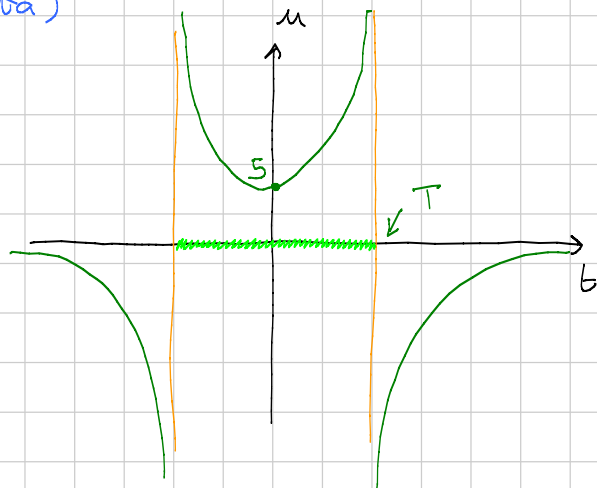
ORA 90

6. **STUDIARE** (la soluzione ottenuta)

$$u(t) = \frac{20}{4 - 5t^4}$$

Problemi quando $4 - 5t^4 = 0$

$$5t^4 = 4 \quad t = \pm \sqrt[4]{\frac{4}{5}}$$

**INTERVALLO MASSIMALE DI ESISTENZA**

Il pezzo dell'insieme di definizione di $u(t)$ che contiene l'istante iniziale

Nell'esempio l'insieme di def. ha 3 pezzi e quello che ci interessa (int. max. di esistenza) è quello centrale, cioè

$$\left(-\sqrt[4]{\frac{4}{5}}, +\sqrt[4]{\frac{4}{5}} \right)$$

TEMPO DI VITA della soluzione (LIFE SPAN) che è il sup dell'int. max. di esistenza.

Nell'esempio $T = \sqrt[4]{\frac{4}{5}}$.

In generale ci sono 3 possibilità

[1] $T = +\infty$ (cioè non ci sono problemi per t successivi a t_0)
Si dice che la soluzione ha **ESISTENZA GLOBALE** nel futuro.

[2] $T < +\infty$. Si dice che la soluzione **MUORE** al tempo T .

[2.1] Si dice che si ha **BLOW-UP** al tempo T se

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u(t) = \pm \infty \quad (\text{come nell'esempio})$$

(2.2) Si dice che si ha BREAK-DOWN al tempo 1 se non si ha blow-up, ma

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u'(t) = \pm \infty$$

— 0 — 0 —

(Volendo: BREAK-DOWN = blow-up della derivata)

Esempio 2 $\begin{cases} u' = t^3 u^2 \\ u(0) = 0 \end{cases}$ Fasi 1, 2, 3 come prima e portano alla soluz. gen.

$$u(t) = -\frac{4}{t^4 + C}$$

4. DET. C Impongo $u(0) = 0$

$$-\frac{4}{C} = 0 \rightarrow \text{Non riesco a trovare } C.$$

N.B. Per il teo. di esistenza e unicit  la soluzione DEVE esistere ed essere unica

In questo caso la soluzione   la funzione costante $u(t) \equiv 0$, come si verifica banalmente.

Pi  in generale, quando abbiamo il pb. di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t) \cdot g(u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Se $g(u_0) = 0$, allora la soluzione   la funzione costante $u(t) \equiv u_0$.

Perch  funziona il metodo 1, 2, 3.

$$u'(t) = u^2(t) \cdot t^3. \text{ Divido per } u^2(t):$$

$$\frac{u'(t)}{u^2(t)} = t^3. \quad \text{Integro tra } 0 \text{ e } T \text{ rispetto a } t$$

↑
costante iniziale

$$\int_0^T \frac{u'(t)}{u^2(t)} dt = \int_0^T t^3 dt$$

A destra ottengo $\int_0^T t^3 dt = \frac{T^4}{4}$

A sinistra: $\int_0^T \frac{u'(t)}{u^2(t)} dt =$

Pongo $y = u(t)$

$$\Rightarrow dy = u'(t) dt$$

Quando $t=0$ ho che
 $y = u(0) = u_0$ (condiz. iniziale)

Quando $t=T$ ho che
 $y = u(T)$

$$= \int_{u_0}^{u(T)} \frac{dy}{y^2} = \left[-\frac{1}{y} \right]_{y=u_0}^{y=u(T)}$$

$$= -\frac{1}{u(T)} + \frac{1}{u_0}$$

Poichè gli integrali a dx e su devono essere uguali, avremo

$$-\frac{1}{u(T)} + \frac{1}{u_0} = \frac{1}{4}, \text{ da cui si può ricavare } u(T) \text{ in funzione di } T.$$

Un po' brutale è aver diviso per $u^2(t)$.

* Se $u(0) \neq 0$, allora $u(t) \neq 0$ per t piccoli, quindi ha senso dividere, almeno per valori piccoli di t .

* Se $u(0) = 0$, allora di sicuro non si può dividere (e per questo motivo in questo caso non si trova la soluz.!).

Esempio 3 $\begin{cases} u' = -\frac{t^2}{u} \\ u(0) = 4 \end{cases}$ ① SEPARARE:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{t^2}{u}$$

$$u du = -t^2 dt$$

② INTEGRARE

$$\int u du = -\int t^2 dt$$

$$\frac{u^2}{2} = -\frac{t^3}{3} + c$$

③ RICAVARE $\frac{u^2}{2} = -\frac{t^3 + C}{3}$ ← solo un corso sul c

$$u^2 = -\frac{2}{3}(t^3 + C)$$

$$u(t) = \pm \sqrt{-\frac{2}{3}(t^3 + C)}$$

SOLUZ. GENERALE

④ DETERMINARE C. Impongo $u(0) = 4$

$$u(0) = +\sqrt{-\frac{2}{3}C} = 4 \Rightarrow -\frac{2}{3}C = 16$$

Ho scelto il + perché deve venire 4

$$\Rightarrow C = -\frac{16 \cdot 3}{2} = -24$$

La soluzione del problema di Cauchy è

$$u(t) = \sqrt{-\frac{2}{3}(t^3 - 24)} = \sqrt{-\frac{2}{3}t^3 + 16}$$

$$u(t) = \sqrt{16 - \frac{2}{3}t^3}$$

⑤ VERIFICARE : la cond. iniz. è facile $u(0) = \sqrt{16} = 4$
Eq. → Esercizio

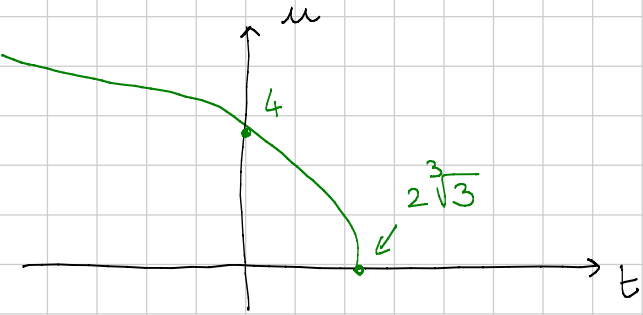
⑥ STUDIARE : $u(t)$ è definita quando $16 - \frac{2}{3}t^3 \geq 0$

$$16 \geq \frac{2}{3}t^3 ; \quad \frac{t^3}{3} \leq 8 ; \quad t^3 \leq 24 \Rightarrow t \leq \sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3}$$

Intervallo massimale di esistenza: $(-\infty, 2\sqrt[3]{3}]$

Tempo di vita : $T = 2\sqrt[3]{3}$

Non c'è blow-up, ma break-down



$$\lim_{t \rightarrow 2\sqrt[3]{3}^-} u(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 2\sqrt[3]{3}^-} u'(t) = \lim_{t \rightarrow \dots} \frac{1}{2\sqrt{16 - \frac{2}{3}t^3}} \cdot (-2t^2) = -\infty$$

$$u'(0) = -\frac{0}{4} = 0$$

$$u'(t) = -\frac{t^2}{u}$$

$\Downarrow$

u' sempre
negativa



MAT I TLC

ORA 91

Titolo nota

14/12/2006
(-10)

Eq. diff. lineari

$$a_n(t) u^{(n)} + a_{n-1}(t) u^{(n-1)} + \dots + a_1(t) u' + a_0(t) u = f(t)$$

CASI $\nearrow$ OMOGENEO $f(t) \equiv 0$
 $\searrow$ NON OMOGENEO $f(t) \neq 0$

1ª Osservazione Detto brutalmente: la soluzione di un'eq. diff. lineare vive finché può, cioè l'interv. max. di esistenza è il più grosso intervallo (o semiretta, o tutto $\mathbb{R}$) su cui i coeff. $a_0(t), \dots, a_n(t)$ e $f(t)$ sono definiti)

CASO OMOGENEO L'insieme delle soluzioni di un'eq. diff. lineare omogenea di ordine n è uno SPAZIO VETTORIALE di $\dim = n$.

Operativamente: se conosco una base $u_1(t), \dots, u_n(t)$ di tale spazio, ogni altra soluzione la posso scrivere nella forma

SOLUZ. GEN. EQ. OMOGENEA

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + \dots + c_n u_n(t)$$

Basta trovare una base e abbiamo trovato la solus. generale.

Dim. per dim. che è uno sp. vettoriale devo verificare

- ① che la somma di 2 solus. è ancora una solus.
- ② che se moltiplico una solus. per un numero ottengo ancora una solus.

① Siano u e v 2 soluz. e sia $w = u + v$

$$a_n(t) u^{(n)} + a_{n-1}(t) u^{(n-1)} + \dots + a_1(t) u' + a_0(t) u = 0 \leftarrow u \text{ sol.}$$

$$a_n(t) v^{(n)} + a_{n-1}(t) v^{(n-1)} + \dots + a_1(t) v' + a_0(t) v = 0 \leftarrow v \text{ sol.}$$

Sommando ottengo

$$a_n(t) [u^{(n)} + v^{(n)}] + \dots + a_1(t) [u' + v'] + a_0(t) [u + v] = 0$$

$\underbrace{\quad}_{w^{(n)}} \quad \quad \quad \underbrace{\quad}_{w'} \quad \quad \quad \underbrace{\quad}_w$

$\uparrow$
 w è soluz.

② Sia u una soluz. e sia λ un numero.

Moltiplico la prima eq. per λ

$$\lambda a_n(t) u^{(n)} + \dots + \lambda a_1(t) u' + \lambda a_0(t) u = 0$$

$$a_n(t) [\lambda u]^{(n)} + \dots + a_1(t) [\lambda u]' + a_0(t) [\lambda u] = 0 \leftarrow \lambda u \text{ è una soluz.}$$

③ Perché ha dimensione n ? Brutalmente

$$\begin{cases} \text{Eq.} \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = 0 \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(0) = 0 \end{cases}$$

$\uparrow$
1ª soluz., $v_1(t)$

$$\begin{cases} \text{Eq.} \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 1 \\ u''(0) = 0 \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(0) = 0 \end{cases}$$

$\uparrow$
2ª soluz., $v_2(t)$

Procedendo nello stesso modo ottengo n soluzioni diverse, che indico con $v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)$

Dico che $v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)$ è una base. Essere una base vuol dire 2 cose:

- essere lin. indep.
- ogni altra soluz. è comb. lineare degli elementi della base

Primo punto: supponiamo che $c_1 v_1(t) + c_2 v_2(t) + \dots + c_n v_n(t) = w$ sia la funzione nulla.

$$w(0) \text{ deve fare } 0, \text{ ma } w(0) = c_1 \underbrace{v_1(0)}_1 + c_2 \underbrace{v_2(0)}_0 + \dots + c_n \underbrace{v_n(0)}_0 = c_1$$

Analogamente $w'(0)$ deve fare 0, ma

$$W'(0) = C_1 \underset{\substack{1 \\ 0}}{v_1'(0)} + C_2 \underset{\substack{1 \\ 1}}{v_2'(0)} + \dots + C_n \underset{\substack{1 \\ 0}}{v_n'(0)} = C_2$$

Quindi tutti i coeff. devono essere nulli

Secondo punto: bisogna dimostrare che ogni altra soluzione è comb. lineare delle v_i

Sia u una soluz. con

$$\begin{cases} \text{Eq.} \\ u(0) = u_0 \\ u'(0) = u_1 \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(0) = u_{n-1} \end{cases}$$

Dico che $u(t) = u_0 v_1(t) + u_1 v_2(t) + \dots + u_{n-1} v_n(t)$
[Fare la verifica]

COME DETERMINARE UNA BASE

Si "riesce" se i coeff. sono costanti.

Caso particolare $n=2$ $au'' + bu' + cu = 0$

Considero l'eq. polinomiale associata $ax^2 + bx + c = 0$

Considero le radici dell'eq.: ho 3 casi

- $\Delta > 0 \Rightarrow$ l'eq. ha 2 radici reali distinte λ, μ .

Una base è $e^{\lambda t}, e^{\mu t} \Rightarrow$ la soluz. gen. è

$$u(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{\mu t}$$

- $\Delta = 0 \Rightarrow$ l'eq. ha una radice λ di molteplicità 2.

Una base è $e^{\lambda t}, t e^{\lambda t} \Rightarrow$ la soluz. gen. è $\leftarrow$ questo non è multiplo di $e^{\lambda t}$ per una cost.

$$u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

- $\Delta < 0 \Rightarrow$ l'eq. ha 2 radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$.

Una base è $e^{\alpha t} \cos(\beta t), e^{\alpha t} \sin(\beta t)$

$\Rightarrow$ la soluz. generale è

$$u(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

Nota bene: il caso $\Delta < 0$ è imparentato con il caso $\Delta > 0$ nel senso che verrebbe da dire che una base è

$$e^{(\alpha+i\beta)t} \quad e^{(\alpha-i\beta)t}$$

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t + i\beta t} = e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$

Dim della formula che dà le basi: basta verificare che i 2 elementi indicati sono soluzioni dell'equazione.

In realtà, uno potrebbe cercare una soluzione dell'eq.

$$au'' + bu' + cu = 0$$

che sia della forma $u(t) = e^{\lambda t}$. Sostituisco

$$u'(t) = \lambda e^{\lambda t}, \quad u''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}, \quad \text{quindi deve essere}$$

$$a \lambda^2 e^{\lambda t} + b \lambda e^{\lambda t} + c e^{\lambda t} = 0; \quad \cancel{e^{\lambda t}} (a \lambda^2 + b \lambda + c) = 0$$

$\uparrow$
 $\neq 0$

$\uparrow$
 λ deve essere una radice del polinomio

Nel caso generale di un'eq. di ordine n il polinomio associato ha n radici (contate con molteplicità)

- ogni radice reale λ di molt. 1 produce 1 el. della base:

$$e^{\lambda t}$$

- ogni radice reale λ di molt. k produce k el. della base:

$$e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \dots, t^{k-1} e^{\lambda t}$$

- ogni coppia di radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$ di molt. 1 produce 2 el. della base:

$$e^{\alpha t} \cos(\beta t)$$

$$e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

- se la coppia $\alpha \pm i\beta$ ha molt. k , produce $2k$ el. della base;

i 2 precedenti, e gli stessi moltiplicati per

$$t, t^2, \dots, t^{k-1}$$

MAT 1 - ILC

ORA 92 (-9)

Esempio 1 $u'' + 4u' + 3u = 0 \rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$
 $(x+3)(x+1) = 0$

$\rightarrow$ Radici: $x = -3, x = -1 \rightarrow$ Base: e^{-3t}, e^{-t}

Sol. gen. $u(t) = ae^{-3t} + be^{-t}$

Esempio 2 $u'' + 6u' + 9u = 0 \rightarrow x^2 + 6x + 9 = 0$
 $(x+3)^2 = 0$

$\rightarrow$ Radici: $x = -3$ radice di mult. 2 $\rightarrow$ Base: e^{-3t}, te^{-3t}

Sol. gen. $u(t) = ae^{-3t} + bte^{-3t}$

Esempio 3 $u'' + 2u' + 5u = 0 \rightarrow x^2 + 2x + 5 = 0$

$\rightarrow$ Radici: $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2}$
 $= -1 \pm 2i \quad (\alpha = -1, \beta = 2)$

$\rightarrow$ Base: $e^{-t} \cos(2t), e^{-t} \sin(2t)$

Sol. gen. $u(t) = ae^{-t} \cos(2t) + be^{-t} \sin(2t)$

Esempio 4 $u'' - 9u = 0 \rightarrow x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = \pm 3$

Sol. gen.: $u(t) = ae^{3t} + be^{-3t}$

Esempio 5 $u'' - 9u' = 0 \rightarrow x^2 - 9x = 0 \quad x(x-9) = 0$

$\rightarrow$ Radici: $x = 0, x = 9 \rightarrow$ Base: $e^{9t}, e^{0t} = 1$

Sol. gen.: $u(t) = ae^{9t} + b$

Esempio 6 $u'' + 9u = 0 \rightarrow x^2 + 9 = 0 \quad x = \pm 3i$

Radici: $x = \pm 3i$ (compl. coniugate con $\alpha=0, \beta=3$)

$\rightarrow$ Base: $e^{0t} \cos(3t) \quad e^{0t} \sin(3t)$

Sol. gen.:

$$u(t) = a \cos(3t) + b \sin(3t)$$

EQUAZIONI NON OMOGENEE

Teorema La soluzione generale di un'eq. diff. lineare NON omogenea (anche a coeff. non costanti) è

$$u(t) = \underbrace{c_1 u_1(t) + \dots + c_n u_n(t)}_{\text{solus. gen. dell'eq. omogenea}} + \underbrace{\tilde{u}(t)}_{\text{soluzione QUALUNQUE dell'eq. non omog.}}$$

Operativamente: se trovo una soluzione QUALUNQUE dell'eq. non omogenea le ho trovate tutte.

Su cosa si basa la dim. del teo.? Su 2 fatti:

- ① Se u e v sono 2 solus. della NON OMOGENEA, allora $w = u - v$ è una solus. dell'eq. OMOGENEA
- ② Se u è una solus. della NON OMOGENEA e w è una solus. dell'OMOGENEA, allora $u + w$ è sol. della NON OMOGENEA.

Operativamente: servono dei metodi per trovare almeno una solus. della non omogenea.

$\nearrow$ PROVARE A INDOVINARE

$\searrow$ METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI

Esempio 1 $u'' + 4u' + 3u = e^t$ Cerco una soluz. del tipo $u(t) = \lambda e^t$

$u'(t) = \lambda e^t$ $u''(t) = \lambda e^t$ sostituisco

$\lambda e^t + 4\lambda e^t + 3\lambda e^t = e^t$ $8\lambda e^t = e^t \Rightarrow \lambda = \frac{1}{8}$
 $u'' + 4u' + 3u$

Soluz. generale: $u(t) = \underbrace{\frac{1}{8}e^t}_{\substack{\uparrow \\ \text{soluz.} \\ \text{appena} \\ \text{trovata}}} + \underbrace{ae^{-t} + be^{-3t}}_{\substack{\text{soluz. generale eq.} \\ \text{omogenea } u'' + 4u' + 3u = 0}}$

Esempio 2 $u'' + 4u' + 3u = e^{2t}$ Provo con $u(t) = \lambda e^{2t}$

$u'(t) = 2\lambda e^{2t}$ $u''(t) = 4\lambda e^{2t}$

$4\lambda e^{2t} + 8\lambda e^{2t} + 3\lambda e^{2t} = e^{2t}$ $15\lambda e^{2t} = e^{2t}$
 $u'' + 4u' + 3u$

$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{15} \Rightarrow \text{Sol. gen. } u(t) = \frac{1}{15}e^{2t} + ae^{-t} + be^{-3t}$

Esempio 3 $u'' + 4u' + 3u = e^{-3t}$ Provo con $u(t) = \lambda e^{-3t}$

$u'(t) = -3\lambda e^{-3t}$ $u''(t) = 9\lambda e^{-3t}$

$9\lambda e^{-3t} - 12\lambda e^{-3t} + 3\lambda e^{-3t} = e^{-3t}$ $0 = e^{-3t} \quad !!!$
 $u'' + 4u' + 3u$

BRAVO FURBO!!!! e^{-3t} è soluzione dell'eq. omogenea, quindi sostituita a sinistra produce 0!!!

Secondo tentativo: $u(t) = \lambda t e^{-3t}$

$u'(t) = \lambda e^{-3t} - 3\lambda t e^{-3t}$, $u''(t) = -3\lambda e^{-3t} - 3\lambda e^{-3t} + 9\lambda t e^{-3t}$

Sostituisco !

$$\underbrace{-6\lambda e^{-3t} + 9\lambda t e^{-3t}}_{u''} + \underbrace{4\lambda e^{-3t} - 12\lambda t e^{-3t}}_{+4u'} + \underbrace{3\lambda t e^{-3t}}_{+3u} = e^{-3t}$$

$$-2\lambda e^{-3t} = e^{-3t} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

Sol. gen. :

$$u(t) = -\frac{1}{2} t e^{-3t} + a e^{-t} + b e^{-3t}$$

2° membro di tipo e^{xt} : provare con $u(t) = \lambda e^{xt}$.

Se non funziona, aggiungere delle t davanti finché basta.

Esempio 4 $u'' + 4u' + 3u = \cos(2t)$

Provo con $u(t) = \lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t)$

$$u'(t) = -2\lambda \sin(2t) + 2\mu \cos(2t)$$

$$u''(t) = -4\lambda \cos(2t) - 4\mu \sin(2t)$$

Sostituisco !

$$\underbrace{-4\lambda \cos() - 4\mu \sin()}_{u''} + \underbrace{-8\lambda \sin() + 8\mu \cos()}_{+4u'} + \underbrace{3\lambda \cos() + 3\mu \sin()}_{+3u} = \cos()$$

$$\begin{cases} -4\lambda + 8\mu + 3\lambda = 1 & \leftarrow \text{coeff. } \cos() \\ -4\mu - 8\lambda + 3\mu = 0 & \leftarrow \text{coeff. } \sin() \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\lambda + 8\mu = 1 \\ -8\lambda - \mu = 0 \end{cases}$$

↓

Risolvo $\rightarrow$ trovo λ e μ

In generale: se 2° membro contiene $\sin$ e/o $\cos$,
provare con una comb. lineare degli stessi.
Se non funziona, t davanti finché basta.

MAT I TLC

ORA 93 (-8)

Esempio 5 $u'' + 4u' + 3u = t^2 + 1$ ← polinomialeProvo con $u(t) = at^2 + bt + c$ ← polinomio di II grado completo (a, b, c sono da trovare)

$$u'(t) = 2at + b \quad u''(t) = 2a$$

$$\underbrace{2a}_{u''} + \underbrace{8at}_{4u'} + \underbrace{4b}_{+3u} + 3at^2 + 3bt + 3c = t^2 + 1$$

$$\begin{cases} 3a = 1 & \text{coeff. di } t^2 \\ 8a + 3b = 0 & \text{coeff. di } t \\ 2a + 4b + 3c = 1 & \text{termine noto} \end{cases}$$

$$a = 1/3$$

$$3b = -8a = -\frac{8}{3} \Rightarrow b = -\frac{8}{9}$$

3° eq → ricavo c In generale, se il 2° membro è un polinomio di grado k , provo con un polinomio di grado k a coeff. incognitiEsempio 6 $u''' + u' = t^2$ Consideriamo prima l'omogenea $u''' + u' = 0$

$$\rightarrow x^3 + x = 0, \quad x(x^2 + 1) = 0 \rightarrow \text{Radici: } \begin{matrix} x = 0 & x^2 = -1 \\ x = 0 & x = \pm i \end{matrix}$$

 $(\alpha=0, \beta=1)$

$$\rightarrow \text{Base: } e^{0t} = 1, \quad e^{0t} \cos t, \quad e^{0t} \sin t \\ 1, \cos t, \sin t$$

Cerco una soluz. qualunque dell'eq. non omogenea. Verrebbe da cercarla della forma

$$u(t) = at^2 + bt + c \quad \text{Questo non funziona.}$$

Allora si mette una "t davanti"

$$u(t) = at^3 + bt^2 + ct$$

$$u'(t) = 3at^2 + 2bt + c, \quad u''(t) = 6at + 2b, \quad u'''(t) = 6a$$

$$\underbrace{6a}_{u'''} + \underbrace{3at^2 + 2bt + c}_{u'} = t^2$$

$$\begin{cases} 3a = 1 & \text{coeff. } t^2 \\ 2b = 0 & \text{coeff. } t \\ 6a + c = 0 & \text{termine noto} \end{cases} \quad a = \frac{1}{3} \quad b = 0 \quad c = -6a = -2$$

Soluz. particolare dell'eq. non omog. è

$$u(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t$$

Sol. gen.: $u(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t + a + b \cos t + c \sin t$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 3 parametri liberi

METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI

$$u'' + 4u' + 3u = e^t$$

Sol. gen. dell'omogenea: $u(t) = a e^{-t} + b e^{-3t}$

Cerco una soluzione della non omogenea del tipo

$$u(t) = a(t)e^{-t} + b(t)e^{-3t}$$

$a(t)$ e $b(t)$ sono funzioni da determinare

$$u'(t) = \boxed{a'(t)e^{-t}} - a(t)e^{-t} + \boxed{b'(t)e^{-3t}} - 3b(t)e^{-3t}$$

Impongo che la somma dei 2 termini con a' e b' faccia 0

$$\boxed{a'(t)e^{-t} + b'(t)e^{-3t} = 0} \quad \text{1ª equazione}$$

$$u''(t) = -a'(t)e^{-t} + a(t)e^{-t} - 3b'(t)e^{-3t} + 9b(t)e^{-3t}$$

Sostituisco u'' , u' e u nell'equazione

$$\begin{array}{l} u'' \\ + 4u' \\ + 3u \end{array} \begin{array}{l} -a'e^{-t} + a'e^{-t} - 3b'e^{-3t} + 9b'e^{-3t} \\ -4ae^{-t} - 12b'e^{-3t} \\ + 3ae^{-t} + 3b'e^{-3t} \end{array} = e^t$$

DEVE SUCCEDERE che i termini con la a e quelli con la b se ne vanno. Resta un'eq. in a' e b'

$$\boxed{-a'e^{-t} - 3b'e^{-3t} = e^t} \quad 2^{\text{a}} \text{ equazione}$$

La prima e 2^a eq. costituiscono un sistema nelle incognite a' e b'

$$\begin{cases} a'(t)e^{-t} + b'(t)e^{-3t} = 0 \\ -a'e^{-t} - 3b'e^{-3t} = e^t \end{cases} \quad \text{Sommo: } -2b'e^{-3t} = e^t \Rightarrow \boxed{b' = -\frac{1}{2}e^{4t}}$$

Sostituisco nella 1^a: $a'e^{-t} - \underbrace{\frac{1}{2}e^{4t}}_{b'} \cdot e^{-3t} = 0$

$$a'e^{-t} = \frac{1}{2}e^t \Rightarrow \boxed{a' = \frac{1}{2}e^{2t}}$$

Trovati $a'(t)$ e $b'(t)$ posso ricavare $a(t)$ e $b(t)$ facendo la primitiva (se si riesce!!!)

$$a(t) = \frac{1}{4}e^{2t}$$

$$b(t) = -\frac{1}{8}e^{4t}$$

e finalmente

$$u(t) = a(t)e^{-t} + b(t)e^{-3t} = \frac{1}{4}e^{2t} \cdot e^{-t} - \frac{1}{8}e^{4t} \cdot e^{-3t}$$

$$= \frac{1}{4} e^t - \frac{1}{8} e^t = \frac{1}{8} e^t$$

= stesso risultato che con il tentativo $u(t) = \lambda e^t$!!!!
 — o — o —

$$u'' + 4u' + 3u = \cos(3t) + t^2 + e^{5t}$$

Tentativo misto :

$$u(t) = a \cos(3t) + b \sin(3t) + ct^2 + dt + e + fe^{5t}$$

oppure : si risolve separatamente con un solo pezzo per volta e poi si sommano le soluzioni così ottenute.

Perché funziona? LINEARITÀ (verifica per esercizio!!!)

MAT I TLC

ORA 94 (-7)

Titolo nota

10/12/2006

EQ. DIFF. LINEARI DEL 1° ORDINE

← 2° ISOLA

$$u' + a(t)u = b(t)$$

1° METODO: FATTORE INTEGRANTE

Sia $A(t)$ una primitiva di $a(t)$: $A'(t) = a(t)$

Molt. l'eq. a destra e sinistra per

$$e^{A(t)}$$

← fattore integrante

$$u' e^{A(t)} + a(t) e^{A(t)} u = b(t) e^{A(t)}$$

$$(u e^{A(t)})' = b(t) e^{A(t)}$$

$$u' e^{A(t)} + u (e^{A(t)})'$$

Posso ricavare

$$u e^{A(t)} = \int b(t) e^{A(t)} dt + c$$

parametro che
ci aspettiamoOra basta ricavare u

$$u(t) = e^{-A(t)} \left\{ c + \int b(t) e^{A(t)} dt \right\}$$

FORMULA
PER SOLUZ.
GENERALE

Operativamente: si trova esplicitamente la soluzione a patto di

* saper fare la primitiva di $a(t)$ * " " " di $b(t) e^{A(t)}$.

— o — o —

2° METODO

Comportarsi come per le altre eq. lineari:

→ soluzione generale eq. omogenea

→ + soluzione QUALUNQUE della non omog.

L'eq. omog. diventa

$$u' + a(t)u = 0 \rightarrow \text{lin. + omog., ma NO coeff. costanti}$$

$\rightarrow$ in realtà è a var. sep. e quindi la posso risolvere

$$u' = -a(t)u$$

1. Separare $\frac{du}{dt} = -a(t)u \Rightarrow \frac{du}{u} = -a(t)dt$

2. Integrare $\int \frac{du}{u} = -\int a(t)dt$

$$\log |u| = -A(t) + c$$

3. Ricavare $|u(t)| = e^{-A(t)+c} = e^{-A(t)} \cdot e^c = k e^{-A(t)}$

$$u(t) = \pm k e^{-A(t)}$$

$$u(t) = k e^{-A(t)}$$

SOL.
GEN.
OMOG.

Mi serve ora una soluz. qualunque della non omog. e la posso cercare con il metodo di variazione delle costanti.

La cerco quindi del tipo

$$u(t) = k(t) e^{-A(t)}$$

$$u'(t) = k'(t) e^{-A(t)} - k(t) a(t) e^{-A(t)}$$

Sostituisco nell'eq.

$$\underbrace{k'(t) e^{-A(t)} - k(t) a(t) e^{-A(t)}}_{u'} + \underbrace{a(t) k(t) e^{-A(t)}}_{+a(t)u} = b(t)$$

$$k'(t) e^{-A(t)} = b(t) \Rightarrow k'(t) = b(t) e^{A(t)}$$

$$\Rightarrow k(t) = \int b(t) e^{A(t)} dt$$

Conclusioni: *Stessa formula che con il fattore integrante*

$$u(t) = k e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int b(t) e^{A(t)} dt$$

$\uparrow$ sol. gen. non omog. $\uparrow$ sol. gen. omog. $\uparrow$ soluz. part. eq. non omog. trovata con metodo variazioni costanti

Esempio 1 $u' = u + t$ $u' - u = t$

$a(t) = -1$ $b(t) = t$

$A(t) = -t \Rightarrow$ Fattore integrante: $e^{A(t)} = e^{-t}$

Moltiplico per e^{-t} : $\underbrace{u'e^{-t} - u e^{-t}}_{(u e^{-t})'} = t e^{-t}$

$$u e^{-t} = \int t e^{-t} dt + c = t(-e^{-t}) - \int 1(-e^{-t}) dt + c$$

$\begin{matrix} f & g \\ \text{F} & \text{G} \end{matrix}$

$$= -t e^{-t} + \int e^{-t} + c = -t e^{-t} - e^{-t} + c$$

Abbiamo ottenuto:

$$u(t) e^{-t} = -t e^{-t} - e^{-t} + c \quad \text{e quindi}$$

$$u(t) = -t - 1 + c e^t$$

soluz. generale ottenuta con il fattore integrante.

In alternativa: $u' - u = t$ *lineare a coeff. costanti*

Omogenea $u' - u = 0 \leadsto$ Pol.: $x - 1 = 0$

$\leadsto$ Radici: $x = 1 \leadsto$ Base $e^t \leadsto$ Sol. gen. omog: $u(t) = c e^t$

Calcolo soluz. particolare con il tentativo $u(t) = at + b$

$$u'(t) = a \quad \text{Sostituisco}$$

$$\begin{aligned} a - at - b &= t \\ u' - u &= t \end{aligned} \quad \begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \quad a = b = -1$$

Soluz. particolare: $u(t) = -t - 1$

— 0 — 0 —

Esempio 2 $\begin{cases} u' + \frac{u}{t} = \cos t \\ u(\pi) = \alpha \end{cases} \quad a(t) = \frac{1}{t} \quad b(t) = \cos t$

FATTO GENER. PER EQUAZ. LINEARI

Interv. max. di esistenza della soluzione = interv. max. di esistenza dei coefficienti

$$= (0, +\infty) = \text{perzo dell' insieme di def di } \frac{1}{t} \text{ e } \cos t \text{ che contiene } \pi$$

$$A(t) = \log t$$

$$e^{A(t)} = e^{\log t} = t$$

↑
soglia che
 $t > 0$ dove soluz.
"vive"

Moltiplico tutto per t : $\underbrace{t u' + u}_{(tu)'} = t \cdot \cos(t)$

$$\begin{aligned} t u &= \int t \cdot \cos(t) dt = t \cdot \sin(t) - \int \sin(t) dt \\ &= t \cdot \sin(t) + \cos(t) + c \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u(t) = \sin(t) + \frac{\cos(t)}{t} + \frac{c}{t}$$

Determiniamo c in funzione del parametro α

$$u(\pi) = \alpha \quad -\frac{1}{\pi} + \frac{c}{\pi} = \alpha \Rightarrow \frac{c}{\pi} = \alpha + \frac{1}{\pi} \Rightarrow c = \pi(\alpha + 1)$$

Soluzione del problema di Cauchy e

$$u(t) = \sin(t) + \frac{\cos(t)}{t} + \frac{\pi\alpha + 1}{t}$$

Cosa succede ad $u(t)$ quando $t \rightarrow 0^+$? Riscriviamo

$$u(t) = \underbrace{\sin(t)}_{\rightarrow 0} + \frac{\underbrace{\cos(t) + 1}_{\rightarrow 2 + \pi\alpha}}{\underbrace{t}_{\rightarrow 0^+}}$$

- se $2 + \pi\alpha > 0$, abbiamo che $u(t) \rightarrow +\infty$
 - se $2 + \pi\alpha < 0$, " " $u(t) \rightarrow -\infty$
 - se $2 + \pi\alpha = 0$, che succede? Vuol dire che $\pi\alpha = -2$
- } BLOW-UP

$$u(t) = \sin(t) + \frac{\cos(t) - 1}{t} \rightarrow 0$$

Esempio 3 (Non è lineare!)

$$\begin{cases} u' = u \log u & \rightarrow \text{VAR. SEP.} & \frac{du}{dt} = u \log u \\ u(0) = \alpha > 0 & & \frac{du}{u \log u} = dt \end{cases}$$

$$\int \frac{du}{u \log u} = \int dt \quad \log |\log u| = t + c$$

$$|\log u| = e^{t+c} = e^t \cdot e^c = ce^t$$

$$\Rightarrow \log u = \pm ce^t = ce^t \Rightarrow u(t) = e^{ce^t}$$

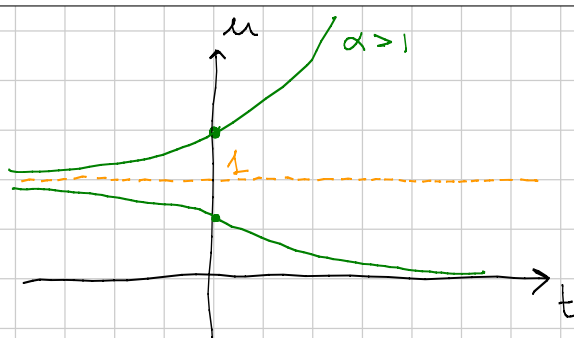
Determino c in funzione di α

$$u(0) = \alpha \quad e^{ce^0} = \alpha \quad e^c = \alpha \Rightarrow c = \log \alpha$$

Solut. del prob. di Cauchy

$$u(t) = e^{\log \alpha \cdot t}$$

- Se $\alpha > 1$, cioè $\log \alpha > 0$
- Se $\alpha \in (0, 1)$, cioè $\log \alpha < 0$



MAT I TLC

ORA 95 (-6)

Osservazione generale. Data un'eq. diff. AUTONOMA, se $u(t)$ è una soluzione, allora

Traslata dx/sx di $u(t)$ $\rightarrow u(t+c)$ è ancora una soluzione per ogni valore di c .

[Verifica per eq. del 1° ORDINE: se l'eq. è $u' = g(u)$

$$u'(t) = g(u(t)) \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}$$

ma allora se $v(t) = u(t+c)$

$$v'(t) = u'(t+c) = g(u(t+c)) = g(v(t))$$

$\Rightarrow v$ è una soluzione]

Esempio

$$\begin{cases} u' = e^{-u} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

$$\frac{du}{dt} = e^{-u} \Rightarrow \frac{du}{e^u} = dt$$

$$\int \frac{du}{e^u} = \int dt = t+c$$

$$\int e^{-u} du = -e^{-u}$$

$$-e^{-u} = t+c \Rightarrow e^{-u} = -t+c \Rightarrow -u = \log(c-t)$$

$$\Rightarrow \boxed{u(t) = -\log(c-t)} \quad \text{SOLUZ. GEN.}$$

Determino c :

$$u(0) = 1$$

$$\begin{aligned} & \text{"} \\ & -\log c \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \log c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{e}$$

Soluz. problema di Cauchy:

$$\boxed{u(t) = -\log\left(\frac{1}{e} - t\right)}$$

Interv. max. di esistenza : $(-\infty, \frac{1}{e})$

Tempo di vita : $T = \frac{1}{e}$

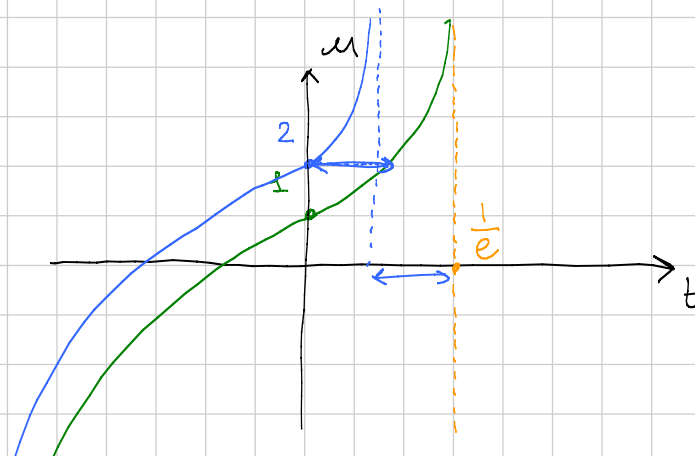
Blow-up per $T = \frac{1}{e}$

Usando l'osserv. generale

sappiamo che tutte le
soluzioni hanno blow-up

e inoltre più α è grande, più il tempo di vita è vicino a zero

Per ogni valore $T_0 > 0$ esiste esattamente una soluz. che sopravvive fino a esattamente T_0 , dove ha blow-up.



Esempio 2

$$u'' + u = \sin(\alpha t)$$

↑ parametro

Domanda: le soluzioni di questa equazione sono funzioni limitate?

Come ci aspettiamo le soluz. ? Eq. lineare.

Omogenea: $u'' + u = 0 \leadsto x^2 + 1 = 0 \leadsto x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i$

Sol. gen. omog.: $u(t) = a \cos(t) + b \sin(t)$

Serve poi una soluz. particolare della NON omog. che cercheremo del tipo

$$u(t) = \lambda \cos(\alpha t) + \mu \sin(\alpha t)$$

In conclusione la soluz. gen. della non omog. sarà del tipo

$$u(t) = \underbrace{a \cos(t) + b \sin(t)}_{\text{dall' omog.}} + \lambda \cos(\alpha t) + \mu \sin(\alpha t)$$

Indipendentemente dai valori dei vari parametri si tratta di una funzione limitata.

Questa analisi funziona per $\alpha \neq 1$ Cosa succede per $\alpha = 1$?

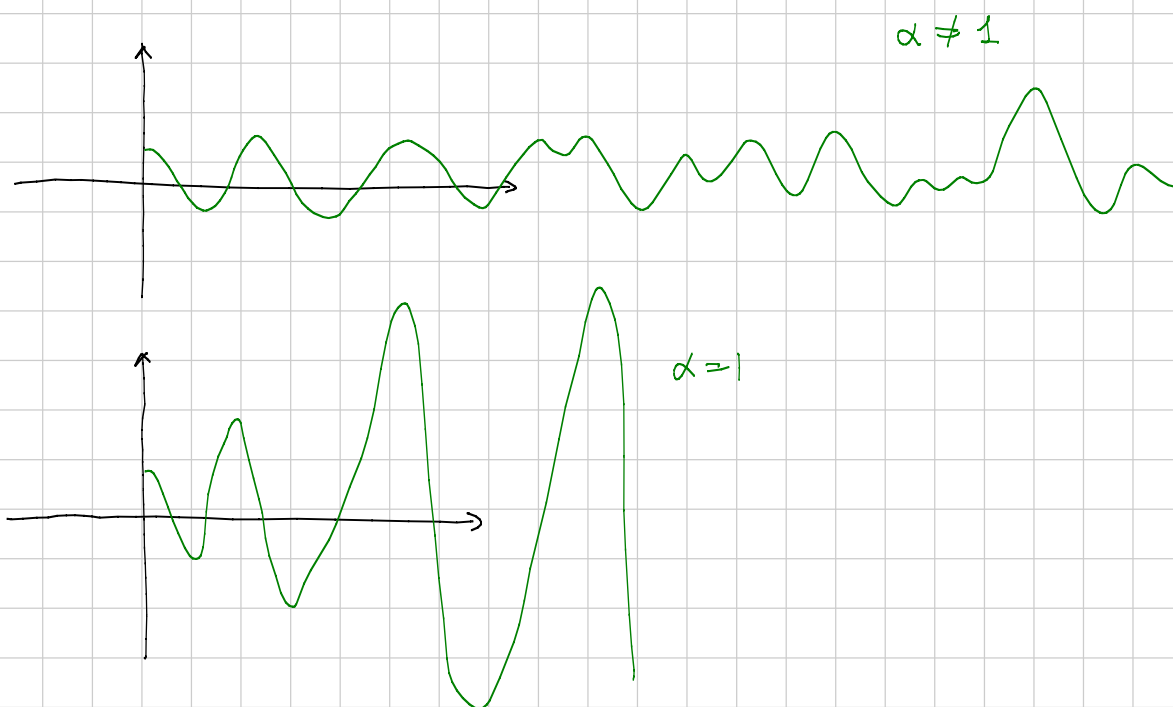
$$u'' + u' = \cos(t) \leftarrow \text{soluz. dell' omog.}$$

$\Rightarrow$ soluz. particolare non è del tipo $\lambda \sin(t) + \mu \cos(t)$,
ma del tipo

$$\underbrace{\lambda t \sin(t) + \mu t \cos(t)}$$

oscilla come $\sin(t)$ e $\cos(t)$, ma
l'ampiezza delle oscillazioni cresce
con il tempo

Quindi per $\alpha \neq 1$, tutte le soluzioni sono limitate
per $\alpha = 1$, tutte le soluzioni sono illimitate



MAT I TLC

(-5) ORA 96

Titolo nota

19/12/2006

Baricentri, solidi di rotazione, Teo. Guldinus 1, geo. analitica nello spazio.

BARICENTRI

 $n=2$ Data una figura piana $F \subseteq \mathbb{R}^2$

Matematicamente il baricentro della figura F è il punto G di coordinate

$$G = (x_G, y_G)$$

$$x_G = \frac{1}{\text{Area}(F)} \iint_F x \, dx \, dy$$

$$y_G = \frac{1}{\text{Area}(F)} \iint_F y \, dx \, dy$$

Nelle ipotesi
che la figura F
sia fatta di un
materiale omogeneo

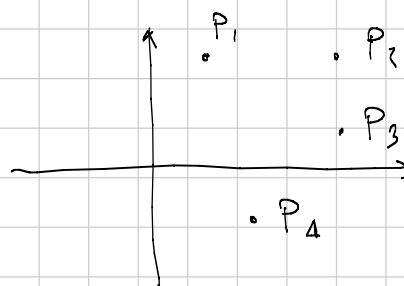


Piccola interpretazione "fisica". Siano dati n punti $P_1, \dots, P_n$ tutti con la stessa massa.

Il baricentro del sistema $P_1, \dots, P_n$ è il punto G di coordinate (x_G, y_G)

$$P_1 = (x_1, y_1), \dots, P_n = (x_n, y_n)$$

$$x_G = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \quad y_G = \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}$$



Se i punti avessero masse $m_1, \dots, m_n$ (anche diverse tra di loro), allora

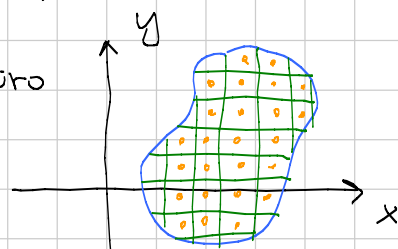
$$x_G = \frac{m_1 x_1 + \dots + m_n x_n}{m_1 + \dots + m_n}$$

massa totale degli
 n punti

$$y_G = \frac{m_1 y_1 + \dots + m_n y_n}{m_1 + \dots + m_n}$$

Se invece di avere n punti abbiamo una figura piana F , possiamo pensare di suddividerla in tanti "quadrettini", trattare

ogni $\square$ come fosse un punto (il suo centro) e calcolare il baricentro dei punti così ottenuti.
 Al limite (lato dei $\square \rightarrow 0$) il baricentro ottenuto tende agli integrali indicati prima.



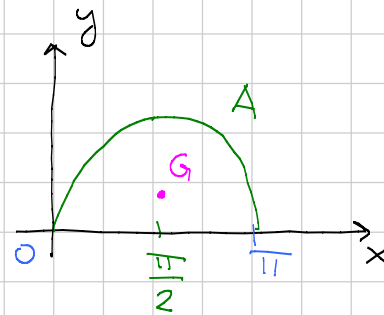
Esempio 1

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x \}$$

$$\text{Area}(A) = 2 \quad x_G = \frac{\pi}{2} \quad (\text{per ragioni di simmetria})$$

$$\iint_A y \, dx \, dy = \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} y \, dy = \int_0^\pi dx \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=\sin x} = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin^2 x \, dx$$

normale asse x



$$\left[\int_0^\pi \sin^2 x \, dx = \int_0^\pi \cos^2 x \, dx \text{ per simmetria e sommati danno} \right]$$

$$\int_0^\pi (\sin^2 x + \cos^2 x) \, dx = \int_0^\pi 1 \, dx = \pi$$

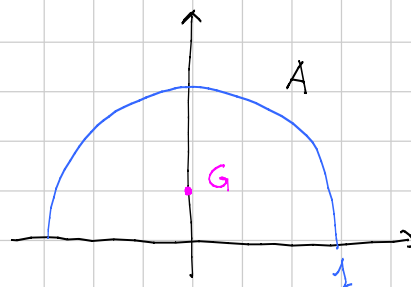
$$y_G = \frac{1}{\text{Area}(A)} \cdot \iint_A y \, dx \, dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$

Esempio 2 Semicirconfenza (posso supporre centro in $(0,0)$ e raggio $= 1$)

$$x_G = 0 \quad (\text{per simmetria})$$

$$\iint_A y \, dx \, dy = \int_0^1 \rho \, d\rho \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta$$

coord. polari



$$= \int_0^1 \rho^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta}_2 = 2 \int_0^1 \rho^2 d\rho = 2 \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_{\rho=0}^1 = \frac{2}{3}$$

$$y_G = \frac{1}{\text{Area}(A)} \iint_A y dx dy = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3\pi}$$

Baricentro di un solido $V \subseteq \mathbb{R}^3$. Punto $G = (x_G, y_G, z_G)$ di coordinate

$$x_G = \frac{1}{\text{Vol}(V)} \iiint_V x dx dy dz$$

$$y_G = \frac{1}{\text{Vol}(V)} \iiint_V y dx dy dz$$

$$z_G = \frac{1}{\text{Vol}(V)} \iiint_V z dx dy dz$$

Sempre nell'ipotesi in cui il solido è costruito con un materiale omogeneo

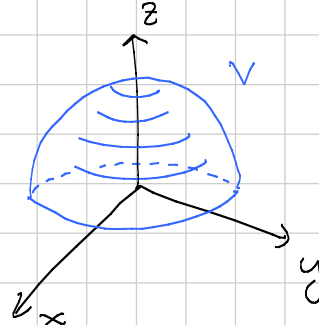
Motivazione fisica analoga alla dim = 2.

Esempio 1 Semisfera (suppongo centro in $(0,0,0)$ e raggio 1)

Subito $x_G = y_G = 0$ (per simmetria)
cioè G sta sull'asse z .

$$\text{Vol}(V) = \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2\pi}{3}$$

$\uparrow$
 $r=1$



$$\iiint_V z dx dy dz = \int_0^1 \underbrace{dp}_{\text{coord. sferiche}} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \underbrace{p \sin \varphi}_z \underbrace{p^2 \cos \varphi}_J$$

$$= \int_0^1 p^3 dp \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = 2\pi \int_0^1 p^3 dp \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi$$

$$\sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \quad = \pi \int_0^1 p^3 dp \left[-\frac{\cos(2\varphi)}{2} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2}$$

$$= \pi \int_0^1 \rho^3 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] d\rho = \pi \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{4}$$

$\uparrow$
 $\varphi = \frac{\pi}{2}$

Conclusione: $z_G = \frac{1}{\text{vol}(V)} \iiint_V z \, dx \, dy \, dz = \frac{3}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{3}{8}$

Più basso o più alto rispetto al semicerchio?

$$\frac{3}{8} \stackrel{?}{<} \frac{4}{3\pi}$$

$$9\pi \stackrel{?}{<} 32$$

$\uparrow$
 $28, \dots$

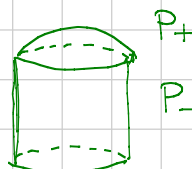
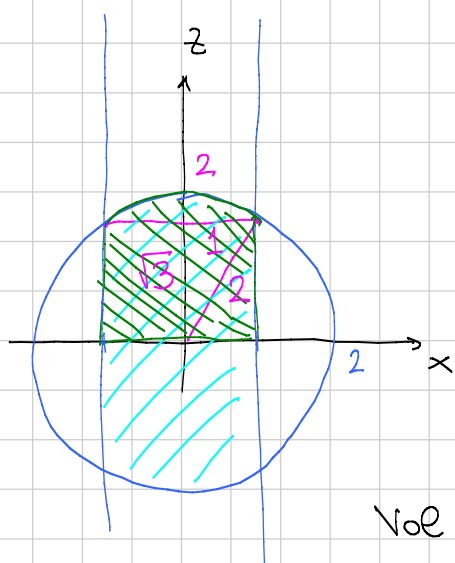
PIÙ BASSO !!!

Esempio 2 PANETTONE

$$P = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0 \}$$

sfera con centro
in (0,0,0) e raggio 2

cilindro infinito con
asse lungo asse z
e "base" il cerchio nel
piano con centro in
(0,0) e raggio 1



$$\begin{aligned} \text{Vol}(P_-) &= \text{Area base} \cdot \text{altezza} \\ &= \pi \cdot \sqrt{3} = \pi\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\text{Vol}(P^+) = \iiint_{P^+} 1 \, dx \, dy \, dz = \int_{\sqrt{3}}^2 dz \iint_{S_z} 1 \, dx \, dy =$$

↑
sezioni

$$= \int_{\sqrt{3}}^2 dz \cdot \text{area}(S_z) =$$

$S_z = \text{cerchio di raggio}$
 $\sqrt{4-z^2}$

$$= \pi \int_{\sqrt{3}}^2 (4-z^2) \, dz$$

$$= \pi \left[4z - \frac{z^3}{3} \right]_{z=\sqrt{3}}^{z=2} = \text{conto} \dots$$

$$\iiint_{P^+} z \, dx \, dy \, dz = \int_{\sqrt{3}}^2 dz \iint_{S_z} z \, dx \, dy = \int_{\sqrt{3}}^2 z \cdot \text{area}(S_z) \, dz =$$

-o-o-
↑
S_z

$$= \pi \int_{\sqrt{3}}^2 z (4-z^2) \, dz.$$

Ancora + semplice
su P^+ .

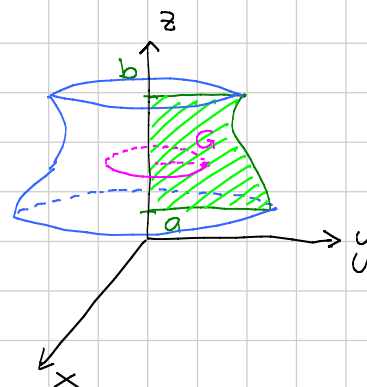
MAT I ILC

-4

ORA 37

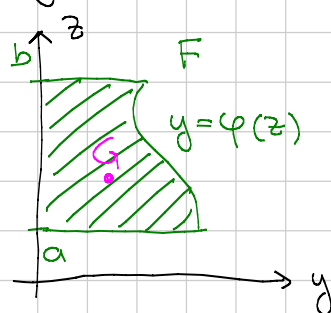
Solidi di rotazione e guldino

Solido di
rotazione



Fissiamo le notazioni

Figura F che ruota



$$F = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : z \in [a, b], 0 \leq y \leq \varphi(z)\}$$

TEO. GULDINO 1

Sia V il solido ottenuto ruotando F intorno all'asse z . Sia G il baricentro della figura F . $G = (y_G, z_G)$. Allora

$$\text{Vol}(V) = \text{Area}(F) \cdot 2\pi y_G$$

y_G = distanza di G
dall'asse di rotazione

Area figura
che ruota

lunghezza della circonferenza
descritta da G durante la
rotazione.

Def. baricentro di
figura piana

$$y_G = \frac{1}{\text{Area}(F)} \iint_F y \, dy \, dz = \frac{1}{\text{Area}(F)} \int_a^b dz \int_0^{\varphi(z)} dy \cdot y$$

insieme
normale
asse z

$$= \frac{1}{\text{Area}(F)} \int_a^b dz \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=\varphi(z)} = \frac{1}{2 \text{Area}(F)} \int_a^b \varphi^2(z) \, dz$$

$$\begin{aligned}
 \text{Vol}(V) &= \iiint_V 1 \, dx \, dy \, dz = \int_a^b dz \iint_{S_z} 1 \, dx \, dy = \\
 &= \int_a^b \text{area}(S_z) \, dz & S_z = \text{cerchio di raggio } \varphi(z) \\
 &= \int_a^b \pi \varphi^2(z) \, dz & \Rightarrow \text{Area}(S_z) = \pi \varphi^2(z)
 \end{aligned}$$

Allora in Guldinus il termine di sinistra è

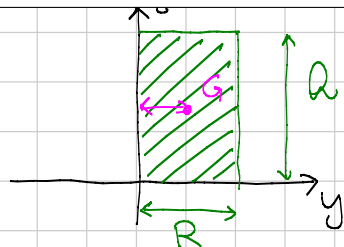
$$\pi \int_a^b \varphi^2(z) \, dz. \quad \text{Il termine di destra è}$$

$$\text{Area}(F) \cdot 2\pi y_G = \cancel{\text{Area}(F)} \cdot \cancel{2\pi} \frac{1}{\cancel{2 \text{Area}(F)}} \int_a^b \varphi^2(z) \, dz$$

Quindi sono uguali !!!

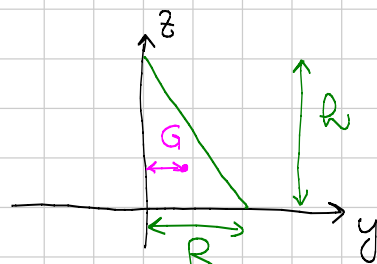
Esempio 1 Cilindro

$$\begin{aligned}
 \text{Volume} &= \text{Area}(F) \cdot 2\pi y_G \\
 &= R \cdot R \cdot 2\pi \frac{R}{2} = \pi R^2 R
 \end{aligned}$$



Esempio 2 Cono

$$\begin{aligned}
 \text{Volume} &= \text{Area}(F) \cdot 2\pi y_G \\
 &= \frac{R R}{2} \cdot 2\pi \frac{R}{3} \\
 &= \pi R^2 \frac{R}{3}
 \end{aligned}$$

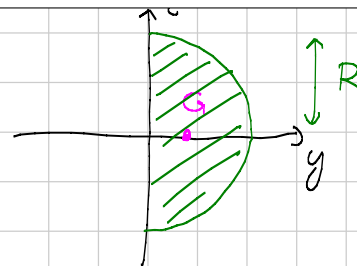
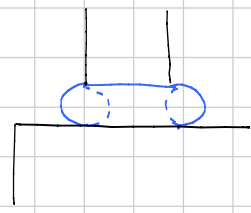
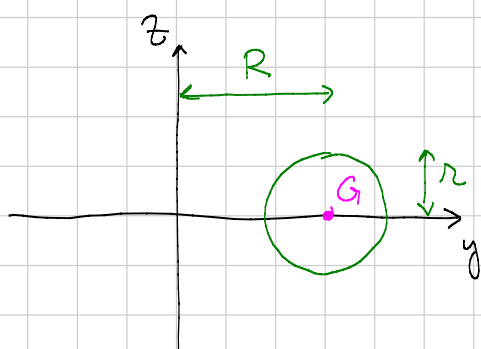


Se i vertici di un Δ hanno coord. (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , allora

$$G = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

Esempio 3 Sfera

$$\begin{aligned}
 \text{Vol} &= \text{Area}(F) \cdot 2\pi y_G \\
 &= \frac{1}{2} \pi R^2 \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3\pi} R \quad \text{calcolo fatto preced.} \\
 &= \frac{4}{3} \pi R^3
 \end{aligned}$$

Esempio 4 Toro

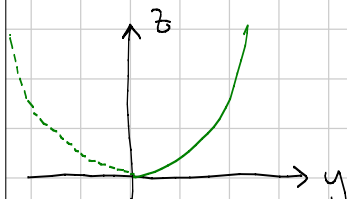
$$\begin{aligned}
 \text{Vol}(V) &= \text{Area}(F) \cdot 2\pi y_G \\
 &= \pi r^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 r^2 R
 \end{aligned}$$

Riconoscere le figure di rotazione.

Qual è l'eq. di un solido di rotazione. Nelle ipotesi fatte prima si ha che

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z \in [a, b], \underbrace{x^2 + y^2 \leq \varphi^2(z)}_{\text{la sezione è un cerchio di raggio } \varphi(z)}\}$$

Se invece di $\leq$ c'è solo $=$, vuol dire che sto considerando solo la superficie laterale del solido di rotazione.

Esempio 1 $z = x^2 + y^2 \leftarrow$ solido di rotazione con $\varphi(z) = \sqrt{z}$ 

$$y = \varphi(z) \text{ diventa } y = \sqrt{z}, \text{ cioè } z = y^2$$

$z = x^2 + y^2 =$ paraboloide di rotazione,

Doppio cono

Esempio 2

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

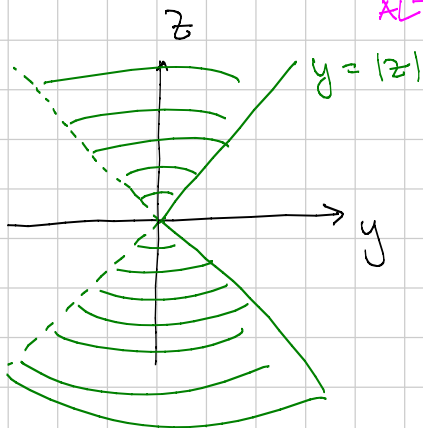
SOLO PARTE
ALTA

Si può scrivere come $x^2 + y^2 = z^2$

solido di rotaz. con $\varphi(z) = |z|$

$$y = |z|$$

Se scrivo $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ho che z deve essere $z \geq 0$, quindi solo la parte sopra



Esempio 3

$$x^2 + y^2 = z^2 - 1$$

Solido di rotazione con

$$\varphi(z) = \sqrt{z^2 - 1}$$

Disegnare

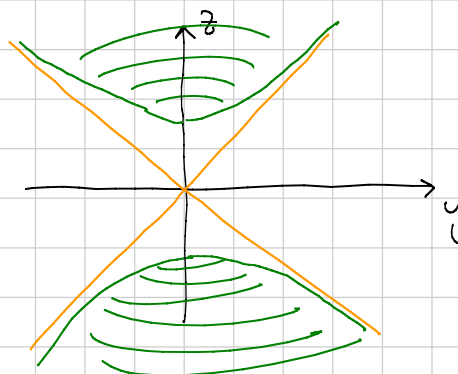
$$y = \varphi(z)$$

$$y = \sqrt{z^2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = z^2 - 1$$

$$z^2 - y^2 = 1$$

iperboloide a 2 FALDE

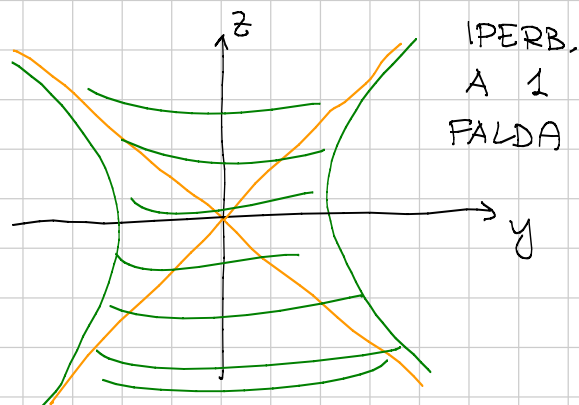


Esempio 4 $x^2 + y^2 = z^2 + 1$

$$\varphi(z) = \sqrt{z^2 + 1}$$

$$y = \varphi(z) \leadsto y = \sqrt{z^2 + 1}$$

$$\leadsto y^2 = z^2 + 1 \leadsto y^2 - z^2 = 1$$



MAT I TLC

-3!!

ORA 98

Titolo nota

20/12/2006

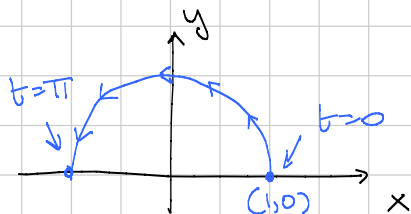
CURVE, LUNGH. CURV., INTEGRALI CURVILINEICurva in $\mathbb{R}^2$: funzione $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = (x(t), y(t))$$

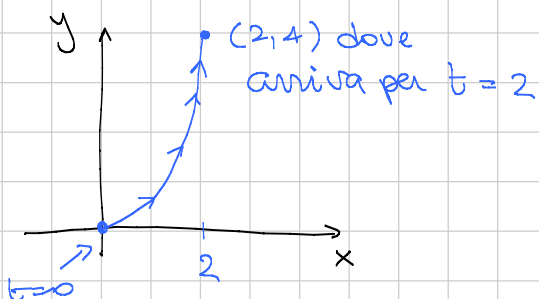
2 componenti di un punto P nel piano
che varia con il parametro t (tempo)

Esempio 1

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)) \quad t \in [0, \pi]$$

Esempio 2

$$\gamma(t) = (t, e^t) \quad t \in [0, 2]$$

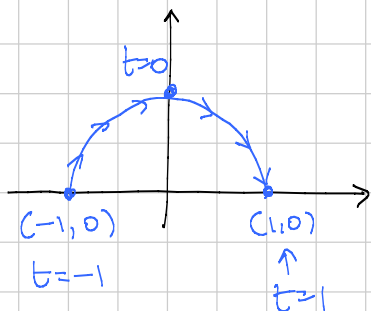
Esempio 3

$$\gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2}) \quad t \in [-1, 1]$$

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

$$y^2 = 1 - x^2$$

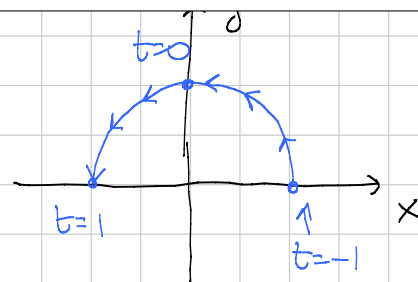
$$x^2 + y^2 = 1$$



Esempio 4

$$\gamma(t) = (-t, \sqrt{1-t^2})$$

$$t \in [-1, 1]$$

Esempio 5-6

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

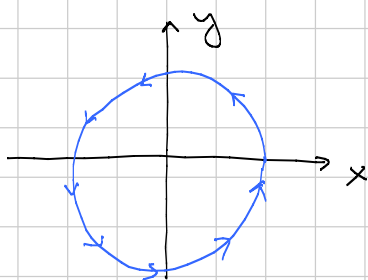
$$t \in [0, 2\pi]$$

1 GIRO

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$t \in [0, 4\pi]$$

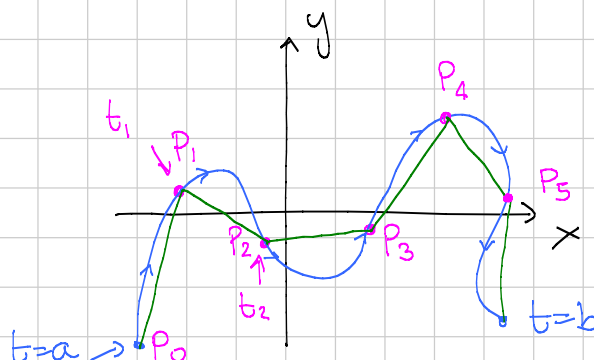
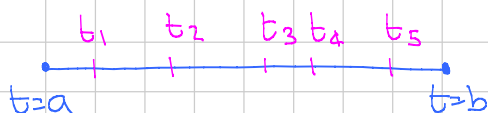
2 GIRI

LUNGHEZZA DI UNA CURVA

1. significato geometrico → INTUITIVO
2. Come si definisce
3. Come si calcola

$$\boxed{2} \quad \gamma(t) = (x(t), y(t))$$

$$t \in [a, b]$$



Con la procedura descritta approssimiamo la traiettoria percorsa "dalla curva" con una spezzata (unione di segmenti).

È intuitivo che l'approssimazione migliora quando aumento il numero dei punti del campionamento.

Si definisce lunghezza della curva l'estremo superiore delle lunghezze delle poligoni (spezzate) approssimanti.

Caso banale: segmento

Caso semi-banale: spezzata

Caso generale: approssimazione con spezzate $\leadsto \sup$.

3. COME SI CALCOLA Si può dimostrare che per una curva

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad t \in [a, b]$$

con $x(t)$ e $y(t)$ decenti (ad esempio con derivata continua)

si ha che

$$\text{lungh. curva} = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

Esempio $\gamma(t) = (\underbrace{\cos(t)}_{x'(t)}, \underbrace{\sin(t)}_{y'(t)}) \quad t \in [0, \pi]$

$$x'(t) = -\sin(t) \quad y'(t) = \cos(t)$$

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1$$

$$\text{Lungh.} = \int_0^\pi \sqrt{\dots} dt = \int_0^\pi 1 dt = \pi$$

Teorema Se due curve percorrono lo stesso insieme del piano una sola volta, allora la loro lunghezza è la stessa.

"Brutalmente": lungh. di una curva = quello che segna il contakilometri.

Commenti fisici

$(x(t), y(t))$ rappresenta la posizione al tempo t di un punto che si muove nel piano

VELOCITY: velocità come vettore $(x'(t), y'(t))$



SPEED: velocità come scalare, cioè la norma della velocity

$$\text{speed} = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

Lunghezza = integrale risp. al tempo della speed

Spatio = velocità · tempo
— o — o —

INTEGRALE CURVILINEO

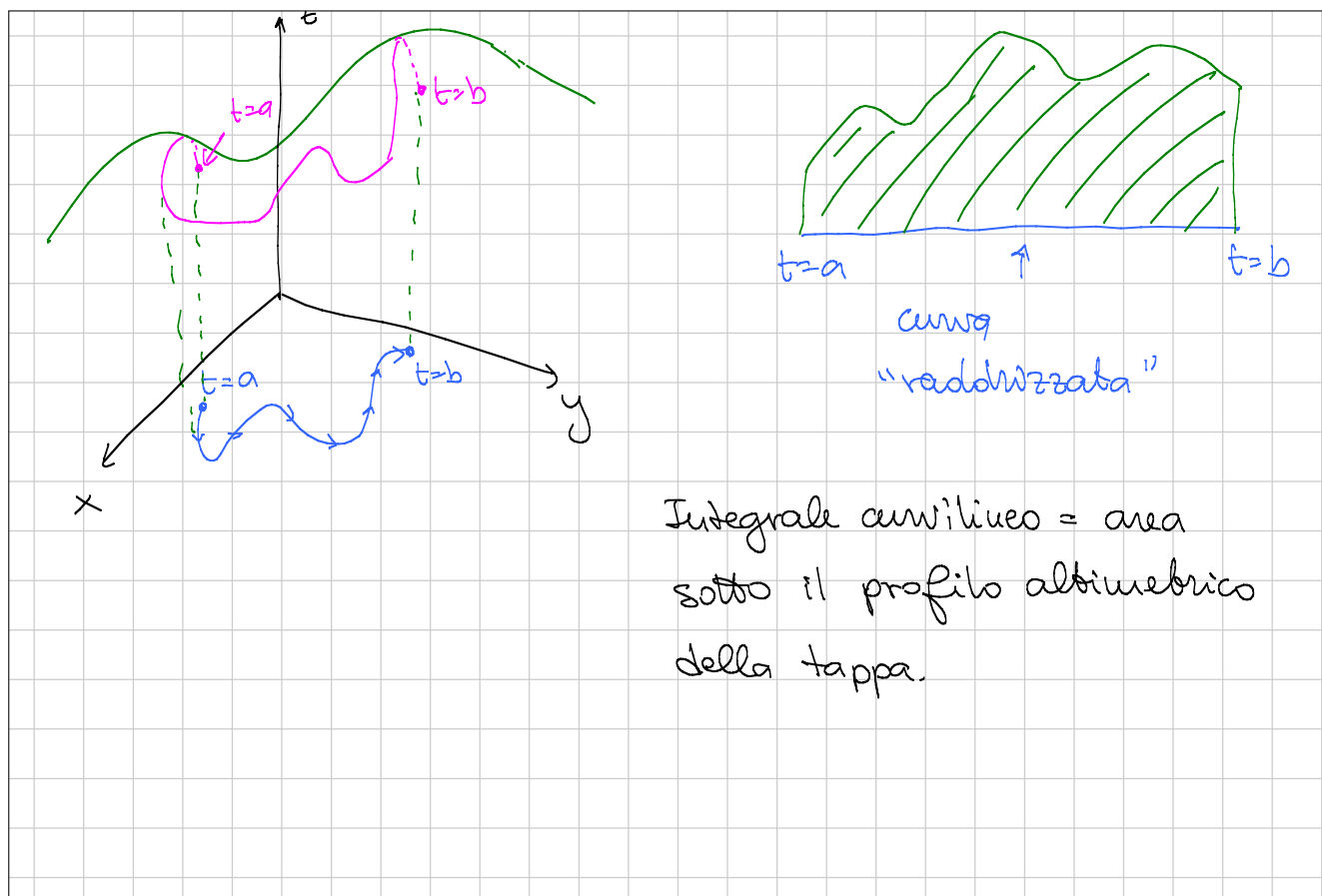
Ingredienti: * una curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ $t \in [a, b]$

* una funzione $f(x, y)$ di 2 variabili definita su $\mathbb{R}^2$ (o almeno dove passa la curva) a valori reali

Si definisce integrale di f lungo la curva γ il numero

$$\int_{\gamma} f(x, y) \, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \, dt$$

$\uparrow$ integr. curvilineo
 $\uparrow$ curva



MAT. I TLC

-2!

ORA 99

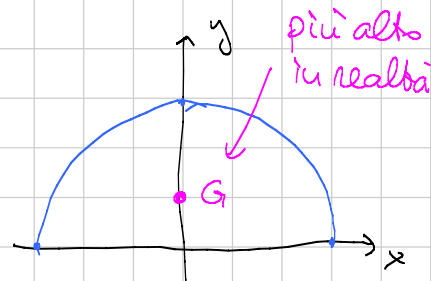
BARICENTRO DI UNA CURVA Data una curva $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad t \in [a, b]$, il suo baricentro è il punto $G = (x_G, y_G)$, dove

$$x_G = \frac{1}{\text{Lunghezza}(\gamma)} \int_{\gamma} x \, ds; \quad y_G = \frac{1}{\text{Lunghezza}(\gamma)} \int_{\gamma} y \, ds$$

Esempio Baricentro di una semicirconferenza
(centro in $(0,0)$ e raggio 1)

Scelgo la parametrizzazione

$$\gamma(t) = (\underbrace{\cos(t)}_{x''(t)}, \underbrace{\sin(t)}_{y''(t)}) \quad t \in [0, \pi]$$



Il risultato sarebbe lo stesso con ogni altra parametrizzazione (ad esempio $\gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2}) \quad t \in [-1, 1]$), ma con sin e cos i calcoli vengono + semplici !!!

Speed : $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = 1 \quad \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$

Lunghezza : π

SPEED

$$\int_{\gamma} x \, ds = \int_0^{\pi} \underbrace{\cos(t)}_{\substack{\uparrow \\ \text{Ho messo } x(t) \text{ al} \\ \text{posto di } x}} \cdot \underbrace{1}_{\substack{\downarrow \\ \text{SPEED}}} dt = 0$$

DEF

 $\Rightarrow x_G = 0$ (come era ovvio per simmetria)

$$\int_{\gamma} y \, ds = \int_0^{\pi} \underbrace{\sin(t)}_{y(t)} \cdot \underbrace{1}_{\text{SPEED} = 1} dt = 2$$

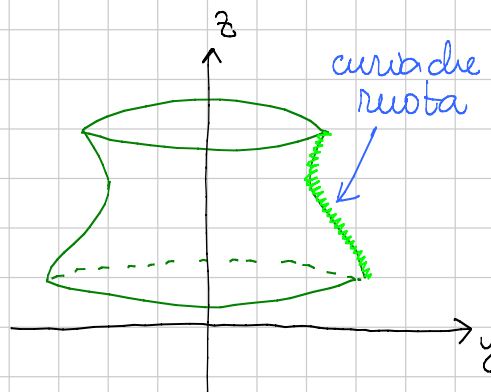
$$\Rightarrow y_G = \frac{1}{\text{Lunghezza}} \int y \, ds = \frac{z}{\pi} \quad (\text{SOPRA } \frac{1}{2} !!!)$$

GULDINO 2

L'area della superficie laterale di un solido di rotazione è data da

$$\text{Area} = \text{lunghezza curva} \cdot 2\pi y_G$$

↑
coordinata y
del baricentro
della curva
che ruota

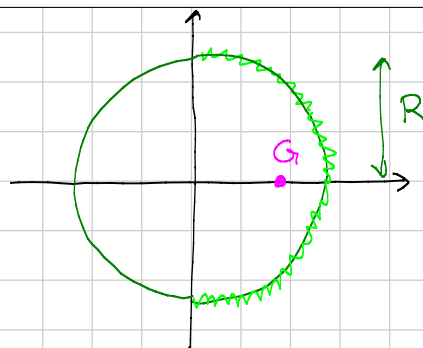
Esempio 1 Sfera

$$\text{Sup. sfera} = \text{lunghezza semicirc.} \cdot 2\pi y_G$$

$$= \frac{1}{2} \cancel{2\pi} R \cdot \cancel{2\pi} \cdot \boxed{\frac{2}{\pi} R}$$

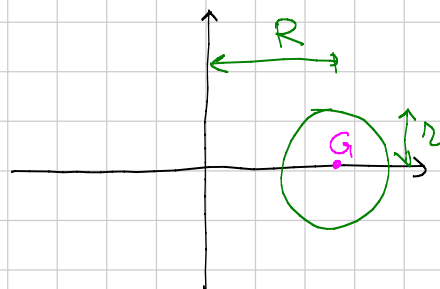
↑
calcolo baricentro
fatto prima

$$= 4\pi R^2$$

Esempio 2 Toro

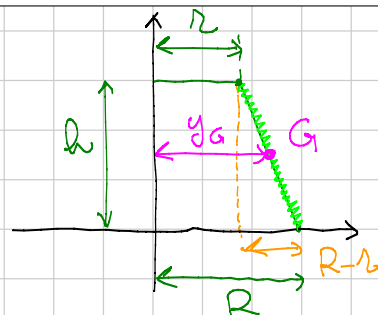
$$\text{Sup.} = \text{lunghezza curva} \cdot 2\pi y_G$$

$$= 2\pi r \cdot 2\pi R = 4\pi^2 r R$$



Esempio 3 Tronco di cono

$$\begin{aligned} \text{Sup. lat.} &= \text{lungh. curva} \cdot 2\pi y_G \\ &= \sqrt{R^2 + (R-r)^2} \cdot 2\pi \frac{R+r}{2} \end{aligned}$$



[Oss.] Vol. sfera = $\frac{4}{3}\pi R^3$

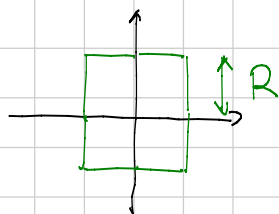
Sup. sfera = $4\pi R^2$

Area cerchio = πR^2

Lungh. circ. = $2\pi R$

Area quadrato = L^2

Perimetro quadr. = $4L$ NON FUNZIONA



$$\begin{aligned} \text{Area} &= (2R)^2 \\ &= 4R^2 \end{aligned}$$

Perimetro = $8R$

FUNZIONA !!!

Esercizio Calcolare il volume dell'insieme

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1, y^2 + z^2 \leq 1\}$$

È limitato? Sì. Dalla 1ª eq. x e z stanno in $[-1, 1]$
Dalla 2ª eq. anche y sta in $[-1, 1]$

$x^2 + z^2 \leq 1 \rightarrow$ cilindro infinito con asse lungo asse y e raggio $= 1$

$y^2 + z^2 \leq 1 \rightarrow$ " " asse lungo asse x

$A =$ intersezione di 2 cilindri infiniti perpendicolari

$=$ volta a crociera

$$\text{Vol}(A) = \iiint_A 1 \, dx \, dy \, dz$$

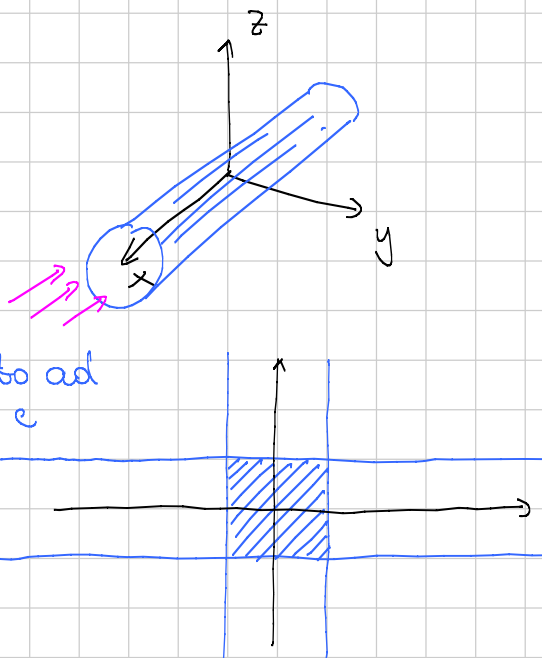
(sezioni)
$$= \int_{-1}^1 dz \iint_{S_z} 1 \, dx \, dy = \int_{-1}^1 \text{Area}(S_z) \, dz$$

Come è fatta la sezione S_z ?

Tagliando con un piano ad altezza $z \in [-1, 1]$ ottengo su ogni cilindro una striscia infinita

Quanto vale, in funzione di z , il lato del quadrato?

Ho tagliato ad altezza z e quando ball'alto



Per rispondere guardiamo "di lato"

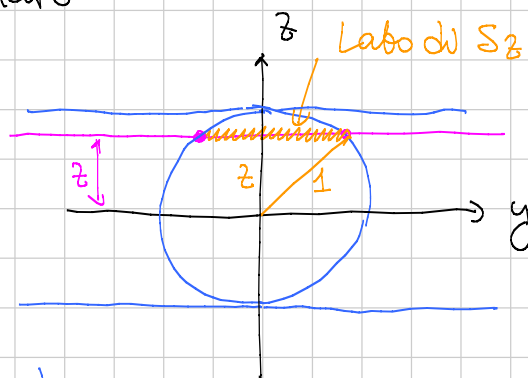
$$\Rightarrow \text{Lato } S_z = 2\sqrt{1-z^2}$$

$$\text{Vol} = \int_{-1}^1 \text{Area}(S_z) \, dz$$

$$= 4 \int_{-1}^1 (1-z^2) \, dz = 8 \int_0^1 (1-z^2) \, dz$$

$$= 8 \left[z - \frac{z^3}{3} \right]_{z=0}^{z=1} = 8 \cdot \frac{2}{3} = \boxed{\frac{16}{3}}$$

Cosa accade intersecando con il "terzo cilindro" $x^2 + y^2 \leq 1$?



MAT I TLC

LAST (BUT NOT LEAST !!!)

ORA 100

$$f(x) = x - \int_0^x e^{-t^2} dt$$

primitiva di e^{-t^2} → No forma esplicita
in termini di funzioni
elementari

$$f(x) = 2006 \quad \text{Quante soluz. ?}$$

Studio la funzione $f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

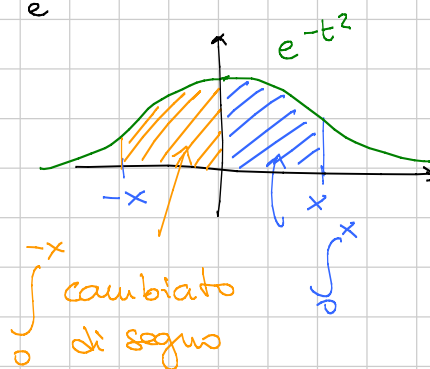
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$x - \int_0^x e^{-t^2} dt$$

$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt =$ Numero perché
l'int. impr.
converge

$f(x)$ è dispari, perché x è dispari e

$$\int_0^{-x} e^{-t^2} dt = - \int_0^x e^{-t^2} dt$$



Dai limiti per $x \rightarrow \pm\infty$ possiamo dedurre che l'eq. ha
ALMENO una soluz.

Per sapere se è unica studiamo la monotonia di $f(x)$

$$f'(x) = 1 - e^{-x^2} \geq 0 \text{ sempre e } = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Monotonia $\nearrow \Rightarrow f$ strett. crescente $\Rightarrow$ iniettiva $\Rightarrow$ al +
una soluzione.

Conclusione: f è iniettiva e surgettiva ↗ dai limiti

$\Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}$ l'eq.

$f(x) = \lambda$ ha esattamente una soluzione.

② Calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ [$\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow$ Hôpital]

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x^2}) = 1$$

③ Studiare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$ [Già sappiamo che $f(n) \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{f(n)} \rightarrow 0$]

Perché $f(n) > 0$ per $n \geq 1$?

Perché $f(0) = 0$ e f è

strett. cresc.

$\Rightarrow$ cond. nec. ok $\Rightarrow$ la serie può convergere]

La serie diverge per C.A. con $b_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{f(n)}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{f(n)} = 1$$

↑ limite del punto 2

④ Studiare $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^{\frac{1}{n}} f(x) dx}_{a_n}$

$a_n \geq 0$ sempre perché $f(x) \geq 0$ sui positivi;

Confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{\frac{1}{n}} f(t) dt}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^2}$$

↑
cambio variabili $x = \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{0}{0} \Rightarrow \text{H\ddot{o}p} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} & \left[\frac{0}{0} \Rightarrow \text{H\ddot{o}p} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2} = \frac{1}{2} f'(0) = 0 & [\text{caso limite}]
 \end{aligned}$$

$$\left[\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \leq 1 \text{ defiu.} \Rightarrow a_n \leq b_n \text{ defiu.} \right]$$

$$\sum b_n = \sum \frac{1}{n^2} \text{ conv.} \Rightarrow \sum a_n \text{ converge}$$

Domanda semi-Hard: per quali x converge $\sum (a_n)^x$
 — 0 — 0 —

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(a_n) \\ a_0 = 2006 \end{cases} \quad \text{E' autonoma!!!}$$

Devo risolvere

$$f(x) = x, \quad f(x) \leq x$$

$$f(x) \stackrel{?}{\leq} x \text{ diventa}$$

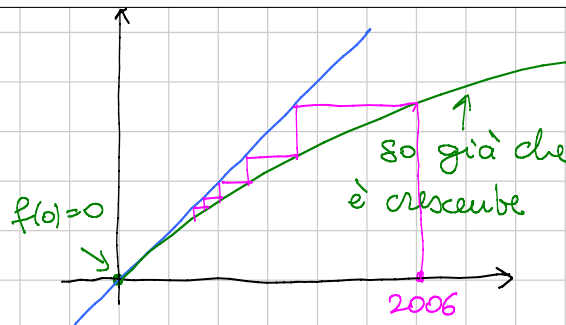
$$\cancel{x - \int_0^x e^{-t^2} dt} \stackrel{?}{\leq} \cancel{x}$$

$$\int_0^x e^{-t^2} dt \stackrel{?}{\geq} 0$$

vero se $x \geq 0$ (perché l'integranda è > 0)
 falso se $x < 0$ (perché gli estremi sono
 nell'ordine sbagliato)

Conclusione: $f(x) \leq x$ per ogni $x \geq 0$ con uguaglianza
 $\Leftrightarrow x = 0$

Idea: $a_n \rightarrow 0$



PIANO (i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ← INDUZIONE

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ ← SOLITO (i) + (ii) + teo. astratto

(iv) $l = 0$

(iv) si riduce all'eq. $f(l) = l$ che già sappiamo avere $l=0$ come unica soluz.

(ii) $a_{n+1} \leq a_n$ è come dire $f(a_n) \leq a_n \Rightarrow$ si riduce alla diseq. $f(x) \leq x$, che sappiamo essere vera $\forall x \geq 0$

Se, data a_n definita per ricorrenza, vogliamo studiare la serie

$$\sum a_n$$

possiamo usare il criterio del rapporto:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(a_n)}{a_n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$$

$\uparrow$ cambio variabili $x = a_n$

$\uparrow$ FATTO PRIMA

LAST Primi termini di Taylor di $f(x)$ con centro in $x=0$?

$$f(x) = x - \int_0^x e^{-t^2} dt$$

$$f'(x) = 1 - e^{-x^2} = 1 - \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + o(x^7)\right)$$

$$= \cancel{1-1} + x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + o(x^7)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{10} + \frac{x^7}{42} + o(x^8)$$

