

A.A. 2006/2007
Analisi Matematica 1

Stampato integrale delle lezioni
(Volume 1)

Massimo Gobbino

Indice

Lezione 001. Insiemi	6
Lezione 002. Insiemi numerici, numeri reali	10
Lezione 003. Funzioni	15
Lezione 004. Principio d'induzione	20
Lezione 005. Funzioni e funzioni inverse elementari	26
Lezione 006. Inf, sup, max, min	33
Lezione 007. Operazioni sui grafici	38
Lezione 008. Funzioni monotone	45
Lezione 009. Limiti di successioni: definizioni	51
Lezione 010. Limiti di successioni: confronto e carabinieri	55
Lezione 011. Limiti di successioni: teoremi algebrici	60
Lezione 012. Limiti di successioni: rapporto, radice, rapporto- $\sqrt[n]{}$ radice	65
Lezione 013. Limiti di successioni: sottosuccessioni	70
Lezione 014. Limiti di successioni: esempi	75
Lezione 015. Successioni monotone	79
Lezione 016. Limiti di funzioni: definizioni	84
Lezione 017. Limiti notevoli di funzioni	89
Lezione 018. Limiti notevoli di funzioni	94
Lezione 019. o piccolo	99
Lezione 020. Limiti di successioni e funzioni: esempi	105
Lezione 021. Derivata e differenziale in una variabile	110
Lezione 022. Derivate delle funzioni elementari	115

Lezione 023. Limiti di funzioni e successioni: esempi	121
Lezione 024. Derivata della funzione inversa	126
Lezione 025. Teorema di De L'Hôpital	131
Lezione 026. Formula di Taylor con resto di Peano	136
Lezione 027. Calcolo di polinomi di Taylor	140
Lezione 028. Polinomi di Taylor della composizione	144
Lezione 029. Polinomi di Taylor con centro diverso da 0	149
Lezione 030. Serie: definizioni	154
Lezione 031. Serie a termini positivi	159
Lezione 032. Funzioni iperboliche	165
Lezione 033. Serie: criterio del confronto asintotico	170
Lezione 034. Serie: casi limite nel confronto asintotico	175
Lezione 035. Serie: criterio di Leibnitz e assoluta convergenza	180
Lezione 036. Serie: esercizi	185
Lezione 037. Serie di potenze	189
Lezione 038. Serie di Taylor	194
Lezione 039. Teorema di esistenza degli zeri e generalizzazioni	199
Lezione 040. Teorema di Weierstrass e generalizzazioni	204
Lezione 041. Massimi e minimi per funzioni di una variabile	209
Lezione 042. Studio locale di funzioni	214
Lezione 043. Teoremi di Rolle, Cauchy, Lagrange	219
Lezione 044. Segno della derivata e monotonia	224
Lezione 045. Introduzione allo studio globale di funzioni	229
Lezione 046. Funzioni convesse e concave	234
Lezione 047. Lipschitzianità	238
Lezione 048. Studio globale di funzioni: esempi	243
Lezione 049. Formula di Taylor con resto di Lagrange	248

Lezione 050. Successioni per ricorrenza: introduzione	251
Lezione 051. Successioni per ricorrenza: caso autonomo monotono	256
Lezione 052. Successioni per ricorrenza: caso autonomo spiraleggiante	261
Lezione 053. Successioni per ricorrenza: caso non autonomo	265
Lezione 054. Successioni per ricorrenza: esempi vari	269

MAT 1 TLC

ORA 1

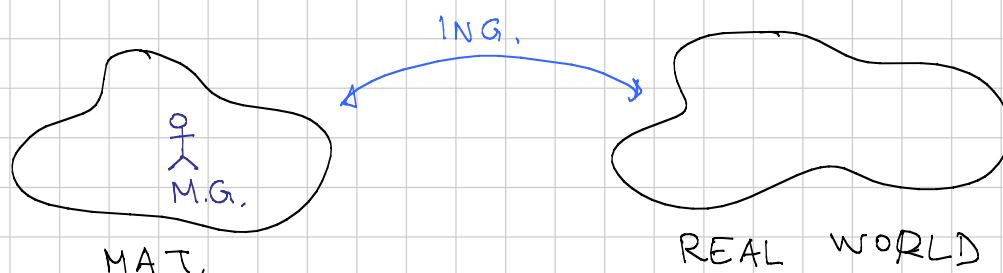
Titolo nota

03/10/2006

Conoscenza di base $\leq$ P22
 Corso $\geq$ P23

→ Rifare esercizi PRECORSO
 sulla dispensa degli
 esercizi

Ruolo della matematica



INSIEMI e FUNZIONI

$a \in A$
 ↑
 elemento insieme

a appartiene ad A

$a \notin A$

$A \ni a$

$A \not\ni a$

Come si presenta un insieme?

1) Per elenco

$A = \{1, 3, 4, 8, b, d, \frac{e}{2}\}$

con l'accordo che
 le ripetizioni
 non contano

2) Per proprietà

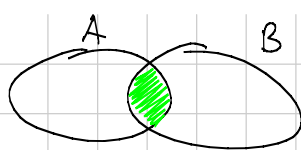
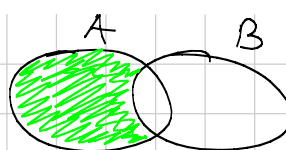
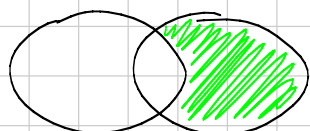
$A = \{\text{persone in aula PN2}\}$
 $= \{\text{interi positivi dispari}\}$

Operazioni tra insiemi

$A \cup B = \text{unione} = \{\text{el. che stanno in } A \text{ o in } B \text{ (o entrambi)}\}$

$A \cap B = \text{intersezione} = \{\text{el. che stanno in } A \text{ e anche in } B\}$

$A \setminus B = \text{differenza} = \{\text{el. che stanno in } A, \text{ ma non in } B\}$

 $A \cup B$  $A \cap B$  $A \setminus B$  $B \setminus A$

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Sottoinsiemi $B \subseteq A$ "B contenuto in A"

ogni elemento di B è anche el. di A

B può anche essere uguale ad A.

 $B \not\subseteq A$

negazione

OCCHIO: $B \subset A$ ha significati diversi su testi diversi $B \subsetneq A$

INSIEME DELLE PARTI

 $\mathcal{P}(A)$ = insieme costituito dai sottoinsiemi di A

$$= \{ B \subseteq A \}$$

Esempio $A = \{ 1, 5 \}$

$$\mathcal{P}(A) = \{ \{1\}, \{5\}, \{1, 5\}, \emptyset \}$$

↑
insiemi che
contengono
1 solo elemento

↑
insieme vuoto (non ha elem.)
è contenuto in ogni
altro insieme

$$B = \{ a, 3, \star \}$$

$$\mathcal{P}(B) = \{ \emptyset, \{a\}, \{3\}, \{\star\}, \{a, 3\}, \{a, \star\}, \{3, \star\}, \{a, 3, \star\} \}$$

Esercizio Quanti el. ha $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$?

Quali sono questi elementi ?

D'ora in poi, quando si presenta un insieme per proprietà, scriveremo

$$B = \{x \in A : x \text{ gode della data proprietà}\}$$



così selezioniamo un sottoinsieme

MAT 1 TLC

ORA 2

INSIEMI NUMERICI

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \text{numeri NATURALI}$$

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\} = \text{numeri INTERI RELATIVI}$$

ZAHLEN = numeri in tedesco

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \ n \neq 0 \right\} = \text{numeri RAZIONALI}$$

Q sta per QUOTIENTI

$$\mathbb{R} = \text{"tutti i numeri"} = \text{numeri REALI}$$

$$\mathbb{C} = \text{numeri COMPLESSI}$$

Proprietà numeri reali

□ Prop. algebriche. Sui numeri reali sono definite 2 operazioni: $+$ e $\cdot$ con le seguenti proprietà

$\uparrow$ SOMMA $\uparrow$ PRODOTTO

$$(S1) \ a+b = b+a \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} \quad \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q} \quad a \cdot b = b \cdot a \quad \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N} \quad (P1)$$

$$(S2) \ a+(b+c) = (a+b)+c \quad \forall a, b, c \quad \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q} \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad (P2)$$

$$(S3) \ \exists \text{ el. speciale (che si indica con } 0) \text{ t.c. } a+0 = 0+a = a \quad \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q} \quad \rightarrow \quad \exists \text{ el. speciale (che si indica con } 1) \text{ t.c. } a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad (P3)$$

$$(S4) \ \forall a \in \mathbb{R} \ \exists \text{ un elemento che si indica con } -a \text{ t.c.} \quad \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0, \exists \text{ un elemento che si indica} \quad (P4)$$

$$a + (-a) = 0 \quad \text{X, Z, Q}$$

↑
opposto

$$\text{con } \frac{1}{a} \quad b \cdot c \quad \text{X, Z, Q}$$

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

↑
reciproco

$$(D) \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

↑
DISTRIBUTIVA

[2] ORDINAMENTO
che $a \leq b$

Per ogni $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ si ha
oppure $b \leq a$

$$(O1) \quad a \leq a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

N, Z, Q

$$(O2) \quad \text{Se } a \leq b \text{ e } b \leq a, \text{ allora } a = b$$

$$(O3) \quad \text{Se } a \leq b \text{ e } b \leq c, \text{ allora } a \leq c$$

$$(OA1) \quad \text{Se } a \leq b, \text{ allora}$$

$$a + c \leq b + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

"Posso aggiungere impunemente a dx e sx"

$$(OA2) \quad \text{Se } a \leq b, \text{ allora}$$

$$a \cdot c \leq b \cdot c \quad \forall c > 0$$

OCCHIO

$$\text{Se } a \leq b, \text{ allora}$$

$$a \cdot c \geq b \cdot c \quad \forall c < 0$$

"Posso moltiplicare a dx e sx per roba positiva impunem.
" " per roba < 0, ma devo girare i versi "

Tutte le proprietà elencate valgono in $\mathbb{Q}$.
Cosa distingue $\mathbb{Q}$ da $\mathbb{R}$?

[3] ASSIOMA DI CONTINUITÀ

Siano dati 2 sottoinsiemi $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ non vuoti.
Diciamo che A sta a sinistra di B se

$\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ si ha che
 $a \leq b$.



Assioma di continuità: se A sta a sx di B , allora

$\exists c \in \mathbb{R}$ tale che

$\uparrow$
separatore

$$a \leq c$$

$$c \leq b$$

$\forall a \in A$ (più grande di tutti el. di A)

$\forall b \in B$ (più piccolo tutti el. B)

Domande: se A sta a sx di B , cosa possiamo dire di
 $A \cap B$?

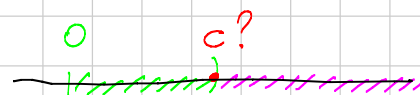
$A \cap B \rightarrow \emptyset$

$\rightarrow |A \cap B| = 1$ contiene un solo elemento
 $\uparrow$
in questo caso l'unico el. in comune
è il separatore.

L'esistenza del separatore vale in $\mathbb{R}$, ma non in $\mathbb{Q}$.

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ e } x^2 < 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ e } x^2 > 2\}$$



A sta a sx di B

Se ci fosse un separatore $c \in \mathbb{Q}$, dovrebbe essere $c^2 = 2$ ma in $\mathbb{Q}$ non esistono numeri il cui quadrato è 2.

Dunque in $\mathbb{Q}$ PUÒ non esistere il separatore.

In $\mathbb{R}$ esiste sempre (nell'esempio $c = \sqrt{2}$).

————— o ————— o —————

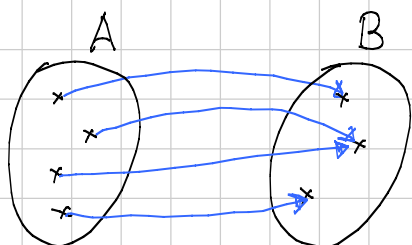
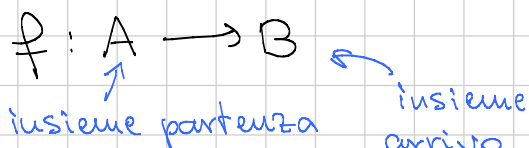
FUNZIONI (tra insiemi)

Una funzione sono 3 cose:

* un insieme di partenza

* un insieme di arrivo

* una legge che ad ogni el. dell'insieme di partenza associa 1 solo el. dell'ins. di arrivo



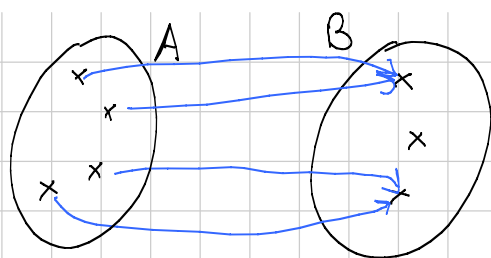
Def. 1 Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice INIETTIVA se "el. diversi di A vanno a finire in el. diversi di B"

$$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

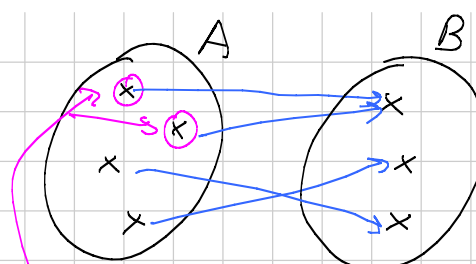
oppure (che è lo stesso) $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

Def 2 Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice SURGETTIVA se "tutti gli el. di B vengono raggiunti"

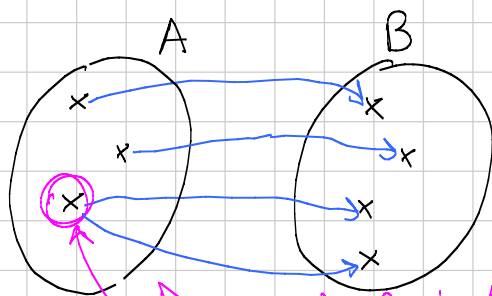
$$\forall b \in B \quad \exists a \in A \quad \text{b.c.} \quad b = f(a)$$



NO INIETTIVA, NO SURG.



NO INIETTIVA
SI SURGETTIVA



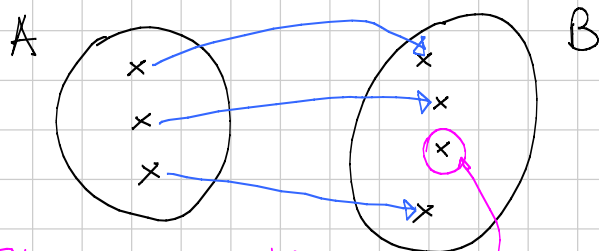
NON È
UNA FUNZIONE

Da ogni el. di A deve partire un'unica freccia!!

MAT 1

TLC

ORA 3



SI INIETTIVA

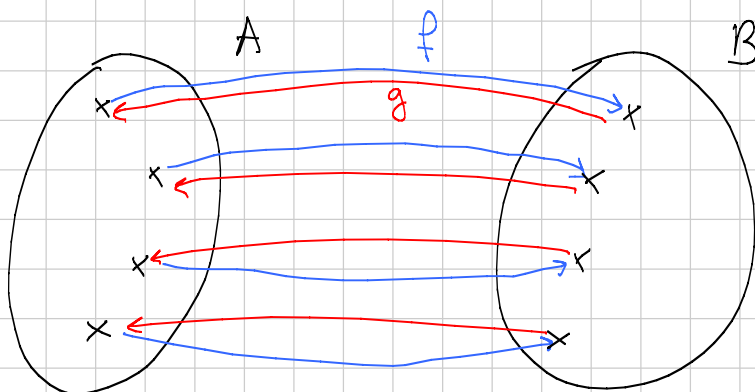
NO SURGETTIVA

Non viene raggiunto

Def. 3 $f: A \rightarrow B$ si dice **BIGETTIVA** se è **INIETTIVA** e **SURGETTIVA**

Def. $f: A \rightarrow B$ si dice invertibile se esiste una funzione $g: B \rightarrow A$ tale che
 $g(f(a)) = a \quad \forall a \in A$ ← con partenza da A

$$f(g(b)) = b \quad \forall b \in B \quad \leftarrow \text{con partenza da } B$$



Le frecce interpretate al contrario rappresentano una funzione

$$g: B \rightarrow A$$

La funzione inversa esiste sempre? NO

Esiste $\Leftrightarrow f$ è BIGETTIVA

Grafico di $f = \{(a,b) \in A \times B : b = f(a)\}$ ← per proprietà

Esempi $f(x) = x^2$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

NO INIETTIVA

$$f(5) \neq f(-5)$$

Diversi

NO SURGETTIVA

Non prende i valori < 0

$f: A \rightarrow B$

$f(x) = x^2$

A	B	INJ.	SURG.
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	NO	NO
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_{\geq 0}$	NO	SI
$\mathbb{R}_{\geq 0}$	$\mathbb{R}$	SI	NO
$\mathbb{R}_{\geq 0}$	$\mathbb{R}_{\geq 0}$	SI	SI

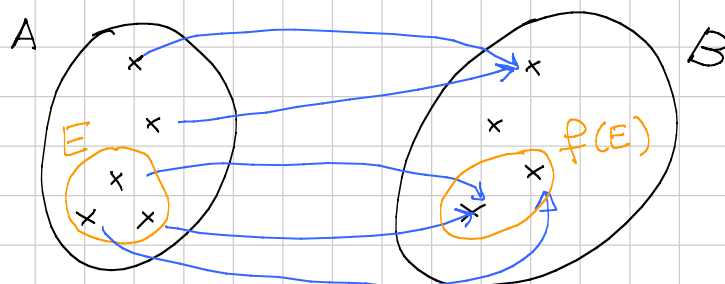
IMMAGINE E CONTROIMMAGINE

$f: A \rightarrow B$ sia dato $E \subseteq A$

$$f(E) = \{f(a) : a \in E\}$$

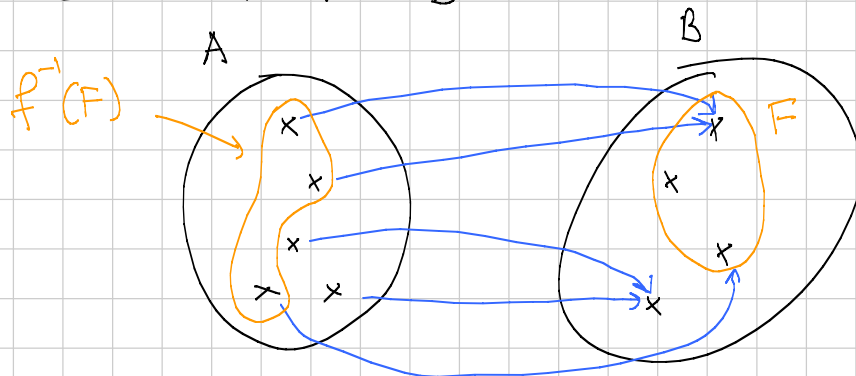
← per ELENCO

← IMMAGINE
DELL'INSIEME
E



$$f(E) = \{b \in B : \exists a \in E \text{ con } f(a) = b\}$$

Sia ora $F \subseteq B$



$$f^{-1}(F) = \{a \in A : f(a) \in F\}$$

↑
controimmagine
dell'insieme F

← pres. per
PROPRIETÀ

Proprietà dell'immagine.

Una funzione $f: A \rightarrow B$ è surgettiva $\Leftrightarrow f(A) = B$

Se prendo $E = A$ $f(A)$ risulta l'insieme di tutti gli el. di B raggiunti dalla funzione

Se è tutto B,
f è SURG.

Se non è tutto B,
f non è surgettiva

ACHTUNG

Il simbolo f^{-1} viene usato per indicare almeno 3 cose diverse

- * la controimmagine di un insieme
- * la funzione inversa (quella che prima abbiamo indicato con g)
- * $\frac{1}{f(x)}$, cioè il reciproco della funzione f .

Il contesto aiuta a distinguere i significati.

INIETTIVITÀ, SURGETTIVITÀ, GRAFICI, EQUAZIONI

$$f: A \rightarrow B.$$

Fissato un elemento $\lambda \in B$, consideriamo l'eq.

$$f(x) = \lambda \quad \text{"cercare gli el. di } A \text{ che vanno a finire in } \lambda \text{"}$$

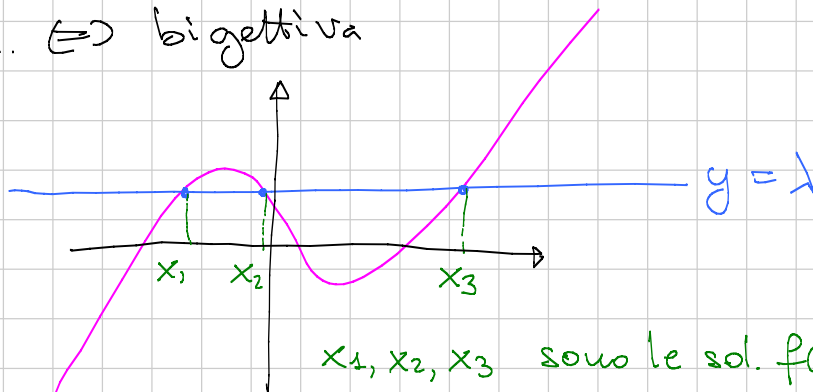
Questa equazione

- * ha almeno 1 sol. per ogni λ se e solo se f è surgettiva
- * ha al più 1 sol. per ogni λ se e solo se f è iniettiva
- * ha esatt. 1 sol. $\Leftrightarrow f$ bigettiva

$$f(x) = \lambda$$

- * 1 o + sol. $\Leftrightarrow$ surg.
- * 0 o 1 sol. $\Leftrightarrow$ iniettiva
- * esatt. 1 sol. $\Leftrightarrow$ bigettiva

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$



x_1, x_2, x_3 sono le sol. $f(x) = \lambda$

Risolvere $f(x) = \lambda$ vuol dire intersecare il grafico con una // asse x ad altezza λ

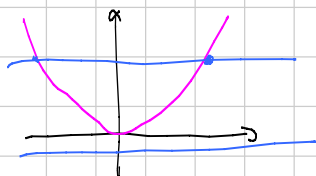
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

- * f è SURGETTIVA $\Leftrightarrow$ ogni // asse x interseca il grafico in almeno 1 p.to
- * f è INIETTIVA $\Leftrightarrow$ ogni // asse x interseca il grafico in al max 1 p.to (0 o 1 p.to)
- * f è BIGETTIVA $\Leftrightarrow$ ogni // asse x interseca in esattamente 1 p.to

$$f(x) = \lambda$$

La coordinata x di quel p.to è
 $x = g(\lambda)$

← funzione inversa



MAT 1 TLC

ORA 4

Titolo nota

04/10/2006

- 1) Principio di induzione
- 2) Presentazione funzioni elementari

— o — o —
INDUZIONE

Serve per dimostrare proprietà dei numeri naturali ($\mathbb{N}$)

P_n = proprietà dei naturali $\rightarrow$ espressione che contiene al suo interno un parametro n naturale e che, a seconda del valore di n può essere vera o falsa

P_n può essere

$$n^2 \geq n+27$$

$$n+7 \geq n$$

$$n+7 \leq n$$

Supponiamo di voler dimostrare che P_n è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$
Induzione

Supponiamo che

(i) P_0 è vera (cioè sostituendo $n=0$ viene vera) PASSO BASE

(ii) P_n vera $\Rightarrow P_{n+1}$ è vera (se è vera per un certo n , è vera anche per il successivo)
PASSO INDUTTIVO

Allora P_n è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Perché funziona? So che P_0 è vera. Applico il pass. ind. con $n=0$. Se P_0 è vera, allora P_1 è vera. So già P_0 vera e quindi anche P_1 è vera.

Applico (i) con $n=1$. $P_1 \text{ vera} \Rightarrow P_2 \text{ vera}$.

" " $n=2$ $P_2 \text{ vera} \Rightarrow P_3 \text{ vera}$

In questo modo prima o poi arrivo a dim. che sono tutte vere.



(i) Passo base $\Rightarrow$ la tessera P_0 cade

(ii) Meccanismo caduta: se cade una tessera, cade succ.

Estensione: supponiamo che

(i) P_7 è vera

(ii) $P_n \text{ vera} \Rightarrow P_{n+1} \text{ vera}$

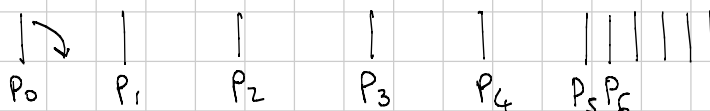
Allora P_n è vera $\forall n \geq 7$

Altra estensione

(i) P_0 è vera

(ii) Se $n \geq 5$ $P_n \text{ vera} \Rightarrow P_{n+1} \text{ vera}$

Allora non si può concludere niente



Esempi di dimostrazione per induzione

Es. 1 $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ P_n

Vera $\forall n \geq 1$.

Passo base $[n=1]$ $1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$ OK.

Per scrupolo provo $[n=2]$ $1+2 = \frac{2 \cdot 3}{2}$ OK

Passo Induttivo $[H_p]$ $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Tesi $1+2+\dots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Devo: dimostrare la tesi usando l'ipotesi

Dim. $1+2+\dots+n+(n+1) \stackrel{\text{uso } H_p}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) =$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Ho ottenuto la tesi. $\square$

Esempio 2 Dimostrare che $2^n \geq n+1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

Passo base: $[n=0]$ $2^0 \geq 0+1$; $1 \geq 1$ OK

Passo induttivo H_p $2^n \geq n+1$

Tesi $2^{n+1} \geq n+2$

Dim. $2^{n+1} \stackrel{\text{P.C.}}{=} 2 \cdot 2^n \geq 2(n+1) =$
 $\quad \quad \quad \text{uso Hp}$
 $\quad \quad \quad = 2n+2 \geq n+2$
 $\quad \quad \quad \quad \quad \quad \uparrow$
 $\quad \quad \quad \quad \quad \text{ovvio}$

Guardando il primo e l'ultimo, abbiamo dim. che

$$2^{n+1} \geq n+2, \text{ cioè la tesi.}$$

Esempio 3 $n!$ ← n fattoriale

$$0! = 1 \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \quad \text{per } n \geq 1$$

$$1! = 1, \quad 2! = 1 \cdot 2 = 2, \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \quad 4! = \dots = 24$$

Dimostrare che $n! \geq 2^n \quad \forall n \geq 4$

Passo base $n=4$ $4! \geq 2^4$; $24 \geq 16$ ok.

P.I. Hp $n! \geq 2^n$ Tesi $(n+1)! \geq 2^{n+1}$

Dim. $(n+1)! = (n+1) \underbrace{(n)(n-1)(n-2) \dots 1}_{n!}$

$$= (n+1) \cdot n!$$

Uso
Hp



$$\geq (n+1) \cdot 2^n$$

SPERO

$$\geq 2^{n+1}$$

ok

Controllo ultimo passaggio

$$(n+1) 2^n \stackrel{?}{\geq} 2^{n+1}$$

$$(n+1) \cdot 2^n \geq 2 \cdot 2^n$$

$$n+1 \geq 2, \text{ cioè } n \geq 1$$

N.B. Il meccanismo di caduta vale per $n \geq 1$



Esempio Disuguaglianza di BERNOULLI

Per ogni $x > -1$ si ha che $(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

P.B. $n=0$ $(1+x)^0 \geq 1+0 \cdot x$; $1 \geq 1$ OK

P.I. Hp $(1+x)^n \geq 1+nx$ Tesi: $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

Dim. $(1+x)^{n+1} = (1+x) \cdot (1+x)^n$

Uso Hp $\rightarrow \geq (1+x) \cdot (1+nx)$

$$= 1+nx+x+nx^2$$

$$= 1+(n+1)x + nx^2$$

$$\geq 1+(n+1)x \quad \text{Tesi}$$

è sempre ≥ 0 ,
quindi se lo
bolgo ottengo q.c.
di più piccolo

L'Hp diceva $(1+x)^n \geq 1+nx$ Io ho dedotto che

$$(1+x)(1+x)^n \geq (1+nx)(1+x)$$

Posso moltip. IMPUNEMENTE se e solo se $(1+x) > 0$
cioè $\Leftrightarrow x > -1$.

Esempio 5

$$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Esempio 6 Per ogni $a \neq 1$

$$1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

MAT 1 TLC

ORA 5

Consideriamo funzioni $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Def. f si dice **PARI** se $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

f si dice **DISPARI** se $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

f si dice **PERIODICA** se $\exists T > 0$ tale che

$$f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

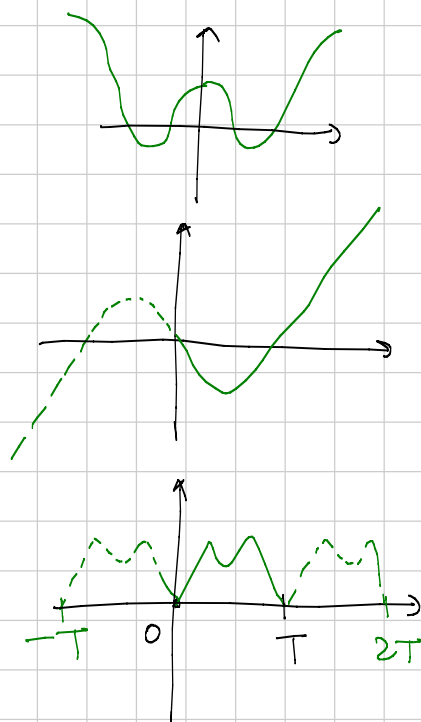
In tal caso il più piccolo $T > 0$ con questa proprietà (se esiste) si dice **MINIMO PERIODO**

Graficamente

f pari $\Leftrightarrow$ grafico simmetrico
risp. asse y

f dispari $\Leftrightarrow$ grafico simm.
rispetto all'origine

f periodica $\Leftrightarrow$ quello che succede
tra 0 e T si ripete
uguale prima e dopo



FUNZIONI ELEMENTARI

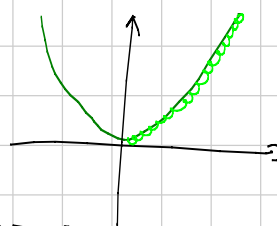
$$f(x) = x^2$$

PARI

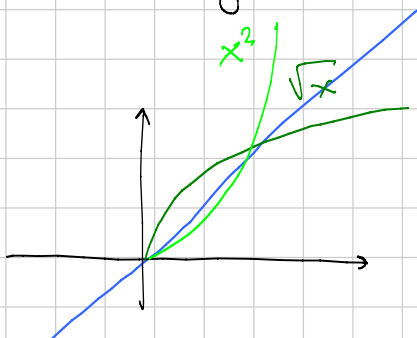
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

NO INJ.
NO SURG.

$$f: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ INVERTIBILE.}$$

La sua inversa è una funzione $g: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

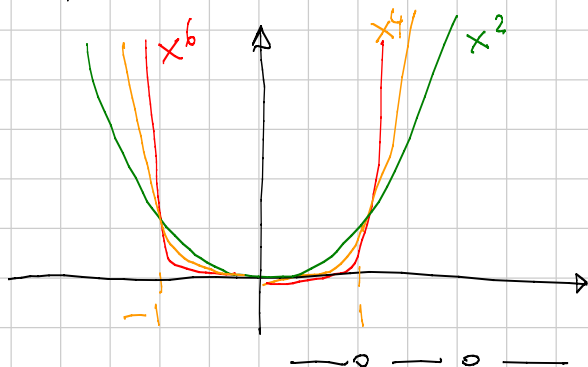
$$g(x) = \sqrt{x}$$



N.B. Per definizione $\sqrt{x}$ accetta in INPUT solo valori $x \geq 0$ e restituisce in OUTPUT valori ≥ 0 .

N.B. I grafici di una funzione e della sua inversa sono simm. rispetto bisettrice $y = x$

$$f(x) = x^4, x^6, x^8, \dots$$

stessa cosa $\leadsto \sqrt[4]{x}, \sqrt[6]{x}, \sqrt[8]{x}$ 

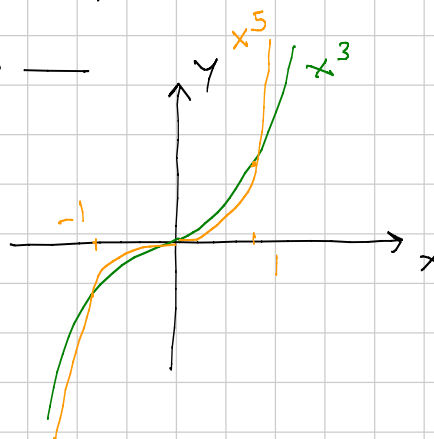
$$f(x) = x^3$$

← FUNZIONE DISPARI

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

INJ e SURG

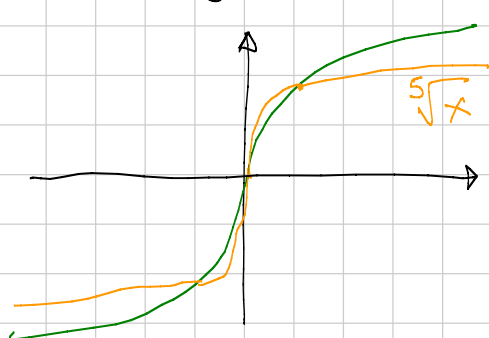
$$\Downarrow$$

 INVERTIBILE


L'inversa è una funzione

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = \sqrt[3]{x}$$



$\sqrt[3]{x}$ accetta in INPUT
sia pos. sia neg. e
restituisce in OUTPUT
valori con lo stesso segno

Stessa cosa per $x^5, x^7, x^9, \dots$

$$\sqrt[5]{x}, \sqrt[7]{x}, \sqrt[9]{x}, \dots$$

FUNZIONI ESPONENZIALI

$$f(x) = 2^x$$

[NB.] x base, espou = numero $\leftarrow$ POTENZE

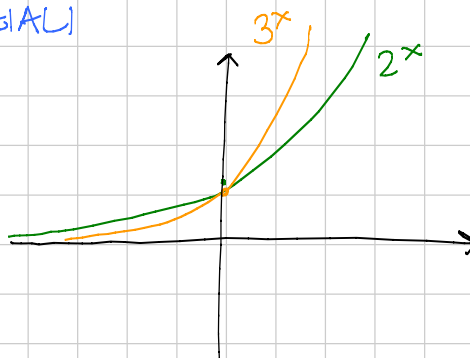
x esponente $\leftarrow$ ESPONENZIALI

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{SI INJ.} \\ \text{NO SURG.}$$

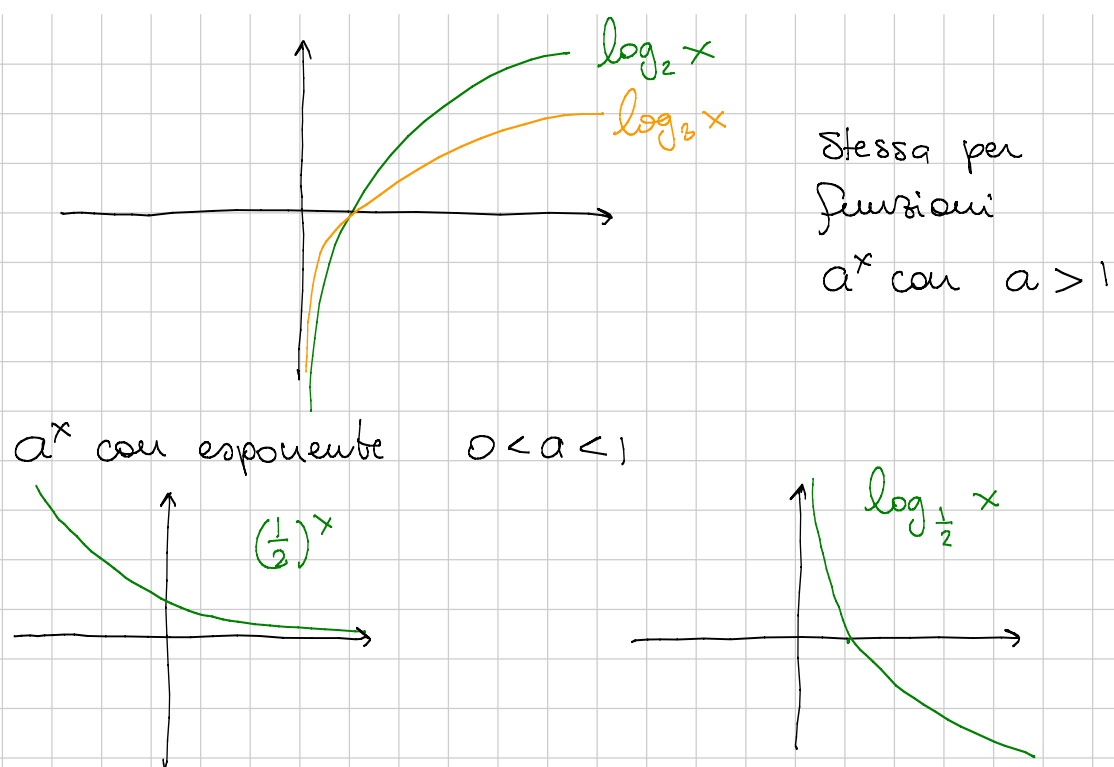
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \\ \text{INVERTIBILE}$$

La sua inversa è una funzione $g: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = \log_2 x$$

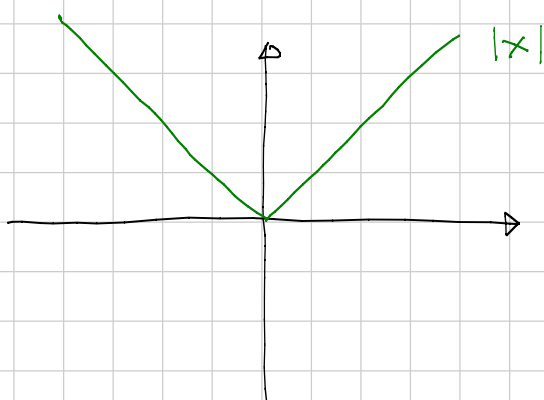


$\log_2 x$ accetta in
INPUT valori > 0



$$f(x) = |x|$$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Funzione pari

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{NO INT, NO SURG}$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{NO INT, SI SURG.}$$

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

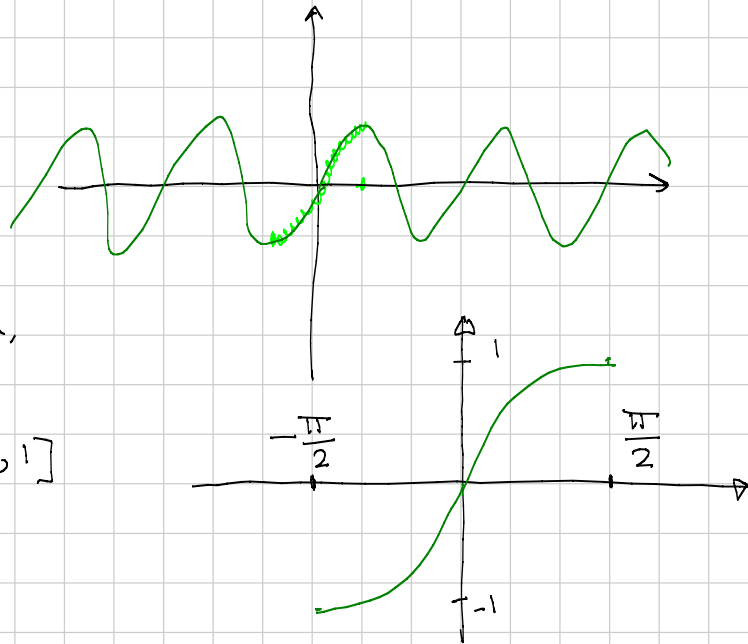
$$f(x) = \sin x$$

DISPARI

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{NO INJ.} \\ \text{NO SURG.}$$

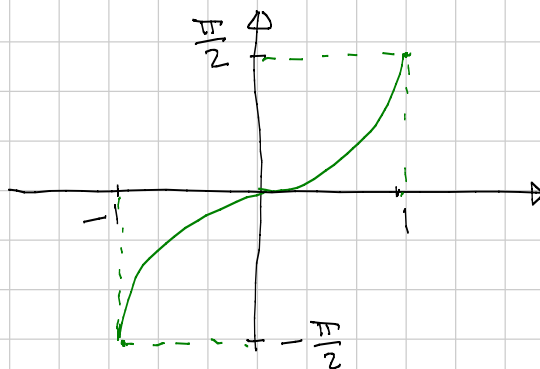
$$f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

INVERTIBILE



La sua inversa è $g: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$g(x) = \arcsin(x)$$

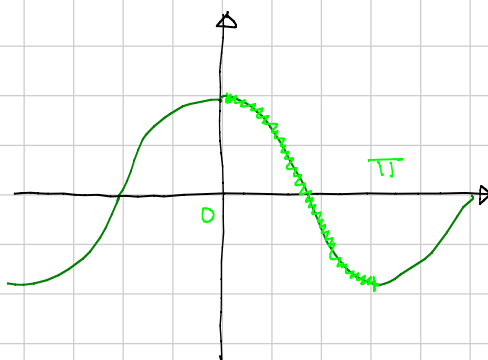
INPUT: valori $x \in [-1, 1]$ OUTPUT: valori
in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 

$$f(x) = \cos x$$

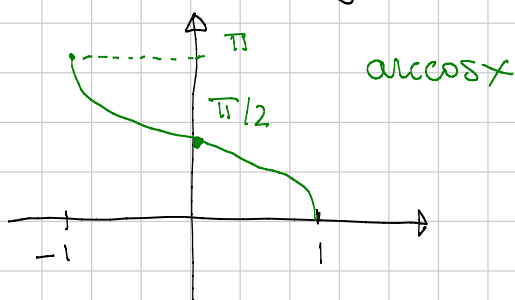
PARI

$$f: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

INVERTIBILE



è l'inversa $g: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ è $g(x) = \arccos x$



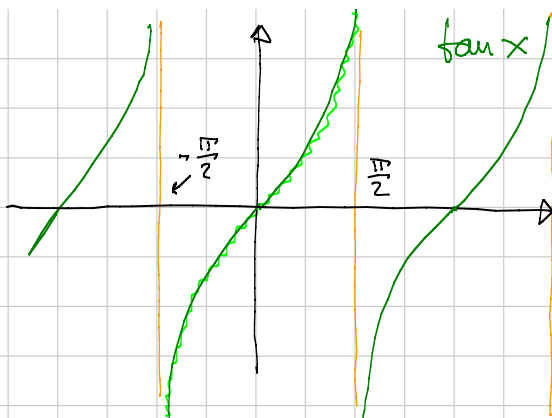
$$f(x) = \tan x$$

DISPARI

$$f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\updownarrow$$

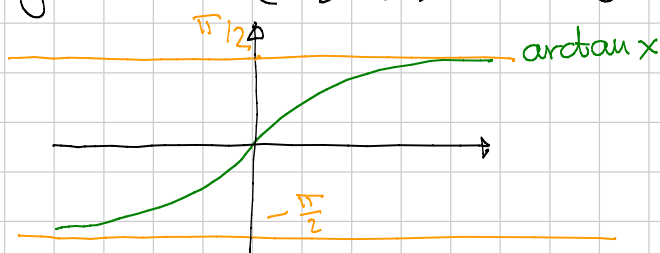
$$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$



INVERTIBILE. L'inversa è una

funzione $g: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$g(x) = \arctan x$$



INPUT: ogni $x \in \mathbb{R}$
 OUTPUT: solo valori
 in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Esempi

$$\sin(\arcsin(\frac{1}{2})) = \frac{1}{2}$$

$$\arcsin(\sin 1) = 1$$

$$\arccos(\cos 1) = 1$$

$$\arcsin(\sin 2) = 2$$

$$\arccos(\cos 2) = 2$$

$$\arccos(\cos 3) = 3$$

$$\arccos(\cos 4) = 4$$

SI

←

←

NO

←

SI

←

SI

←

NO

arcsin NON
SPOTA ROBA
> $\pi/2$

arccos SPOTA
ROBA $\leq \pi$
Non può
DARE 4.

MAT 1 TLC

Titolo nota

ORA 6

05/10/2006

Max, min, Sup, inf.Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsiemeDef. Dico che $M \in \mathbb{R}$ è il massimo di A , e scrivo

$$M = \max A$$

Commenti

se

① $M \in A$;

② $M \geq a \quad \forall a \in A$.

① M non è obbligato ad esistere

② Se esiste, è unico

Esempi

1.

$A = [0, 1]$

$M = 1$

$m = 0$

2.

$A = (0, 1)$

 M non esiste "vorrebbe essere 1, ma $1 \notin A$ "

3.

$A = [0, +\infty)$
 $= \mathbb{R}_{\geq 0}$

 m non esiste
 M non esiste
 $m = 0$.Def. Dico che $m = \min A$ se

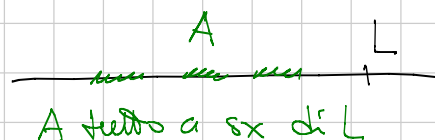
① $m \in A$

② $m \leq a \quad \forall a \in A$

Stessi commenti
di sopra

Def. A si dice limitato superiormente se esiste $L \in \mathbb{R}$ (anche non appartenente ad A) tale che

$$L \geq a \quad \forall a \in A$$



Ogni L che va bene in questa def. si dice **MAGGIORANTE** di A .

A si dice limitato inferiormente se esiste $K \in \mathbb{R}$ t.c.

$$K \leq a \quad \forall a \in A.$$

Tutti i K che vanno bene si dicono **MINORANTI** di A .

A si dice limitato se A è limitato sia superiormente sia inferiormente.

COMMENTI

① I maggioranti non sono obbligati ad esistere.

Esempio $A = [0, +\infty)$

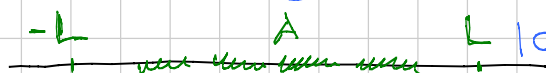
② Se esiste un maggiorante, di sicuro non è unico

Esempio $A = (0, 5)$ $L = 7$ è un magg.
 $L = 8$ è pure un magg.

Tutti i numeri $L \geq 5$ sono maggioranti

③ Idem per i minoranti

④ A è limitato $\Leftrightarrow$ esiste $L \in \mathbb{R}$ tale che



ESTREMO INFERIORE

ESTREMO SUPERIORE

Def. ① Dico che $\sup A = +\infty$ se A non è limitato superiormente, cioè non esistono maggioranti

② Dico che $\inf A = -\infty$ se A non è limitato inferiormente, cioè non esistono minoranti

③ Dico che $\sup A = L \in \mathbb{R}$ se esistono dei maggioranti, ed L è il + piccolo di loro (L è il minimo dei maggioranti)

④ Dico che $\inf A = l \in \mathbb{R}$ se l è il massimo dei minoranti,

Teorema Se A è limitato superiormente (dunque esistono dei maggioranti) allora il minimo dei maggioranti esiste per forza.

Dim. Prendiamo l'insieme A ,
Indichiamo con B l'insieme dei maggioranti di A .
Per def. di maggiorante, A sta tutto a sx di B

Per l'assioma di CONTINUITÀ —————
esiste un elemento $c \in \mathbb{R}$ b.c.

① $a \leq c \quad \forall a \in A \quad \leftrightarrow \quad c \text{ è un maggiorante di } A$

② $c \leq b \quad \forall b \in B \quad \leftrightarrow \quad c \text{ è più piccolo di tutti gli altri maggioranti}$

Quindi c è il minimo dei maggioranti.

CONSEGUENZA

Inf e sup sono OBBLIGATI AD ESISTERE, finiti o infiniti

Commenti

- ① Inf e sup esistono sempre e sono UNICI
- ② Se esiste $M = \max A$, allora $M = \sup A$
Se esiste il max, questo è anche sup.
[Se esiste min, questo è anche inf].
- ③ Se $\sup A \in \mathbb{R}$ e $\sup A \in A$, allora è anche il $\max A$.
Idem per min e inf.
- ④ Se $\sup A = +\infty$, allora di SICURO $\max A$ non esiste

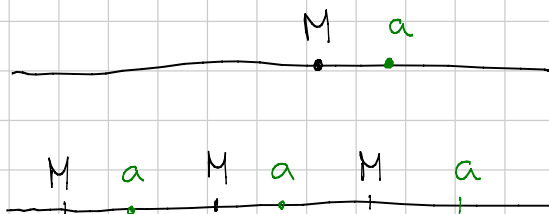
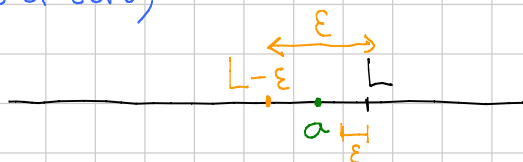
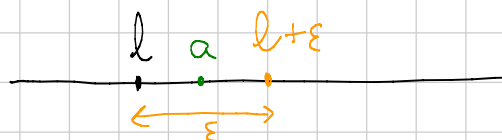
Esempi

A	Inf	Sup	min	max
$[0, 1]$	0	1	0	1
$(0, 1]$	0	1	N.E.	1
$\mathbb{N}$	0	$+\infty$	0	N.E.
$(0, 1) \cup (2, 4]$	0	4	N.E.	4
$\mathbb{Z}$	$-\infty$	$+\infty$	N.E.	N.E.

OCCHIO: il massimo è (QUANDO ESISTE) un maggiorante, anzi è il min. dei maggioranti, cioè il sup.

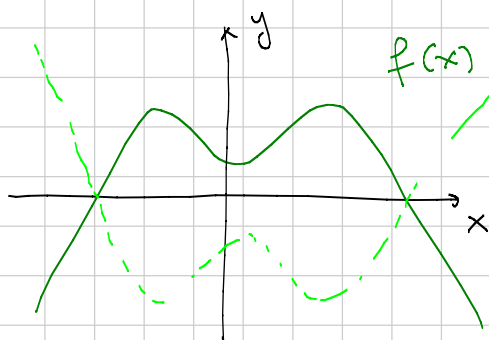
CARATTERIZZAZIONE DEL SUP

(altro modo di dare la definizione)

① $\sup A = +\infty$ se $\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)esiste $a \in A$ t.c. $a \geq M$ ② $\sup A = L \in \mathbb{R}$ se(i) $a \leq L \quad \forall a \in A$ (L è un maggiorante)(ii) $\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a zero)esiste $a \in A$ t.c. $a \geq L - \varepsilon$ ③ $\inf A = -\infty$ se $\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorm. neg.)esiste $a \in A$ t.c. $a \leq M$ ④ $\inf A = l \in \mathbb{R}$ se(i) $l \leq a \quad \forall a \in A$ (l è minovente)(ii) $\forall \varepsilon > 0$ esiste $a \in A$ t.c. $a \leq l + \varepsilon$.

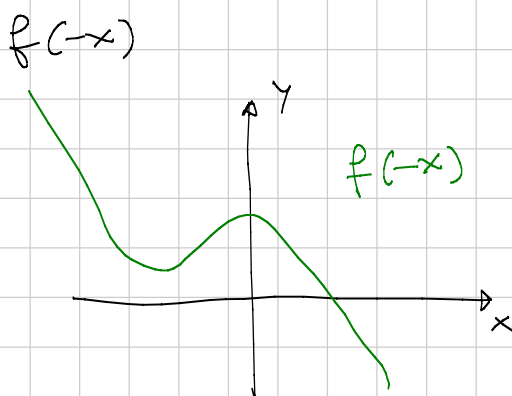
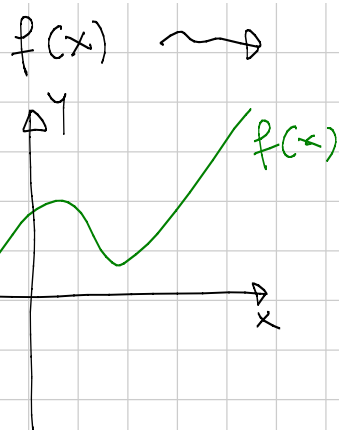
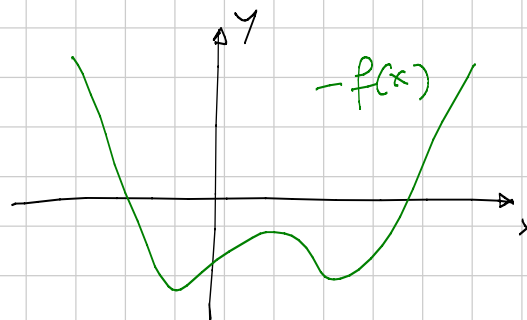
MAT 1 TLC

ORA 7

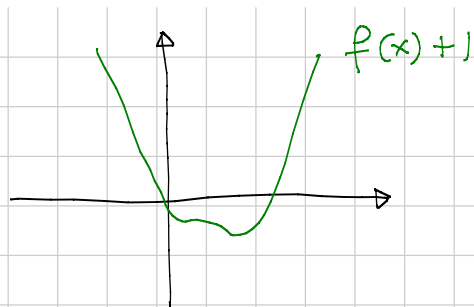
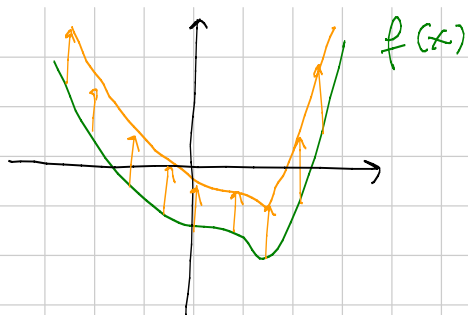
OPERAZIONI SUI GRAFICI

$$f(x) \rightsquigarrow -f(x)$$

SIMMETRIA RISPETTO
ASSE X



SIMMETRIA RISPETTO ASSE Y

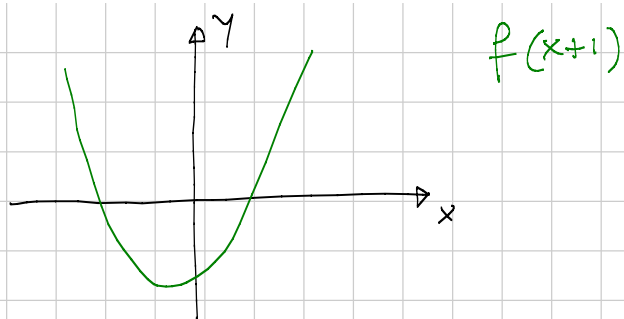
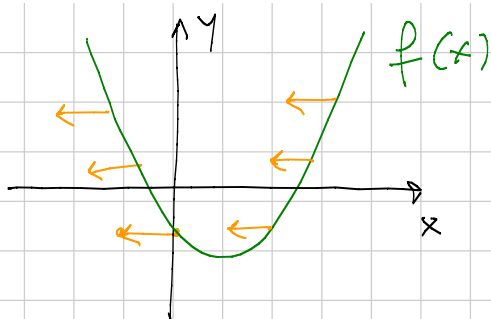


$$f(x) \rightsquigarrow f(x) + a$$

TRASLAZIONE IN
VERTICALE

↗ in alto se $a > 0$

↘ in basso se $a < 0$

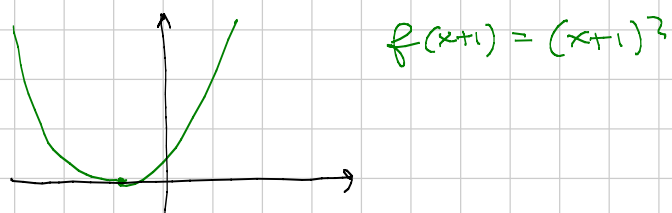
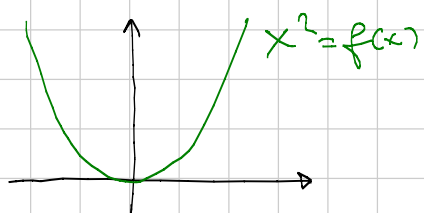


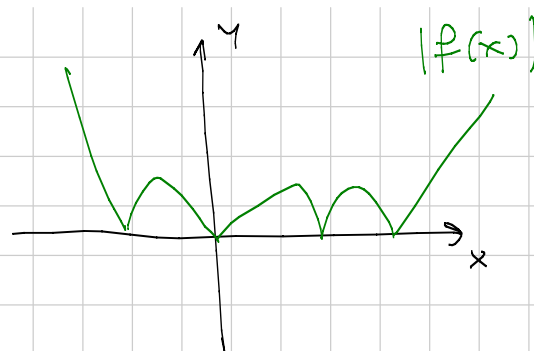
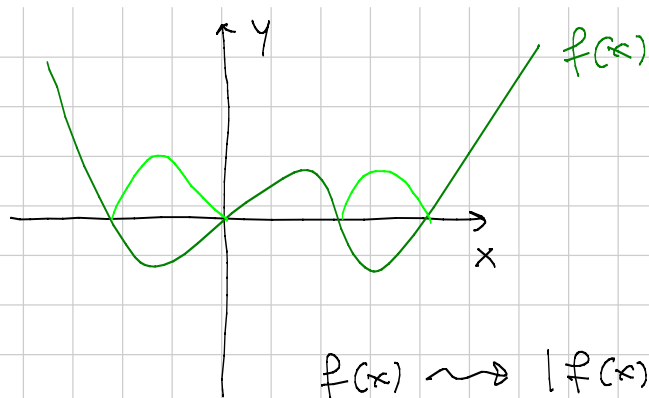
$$f(x) \rightsquigarrow f(x+a)$$

TRASLAZIONE IN
ORIZZONTALE

verso sx se $a > 0$

verso dx se $a < 0$

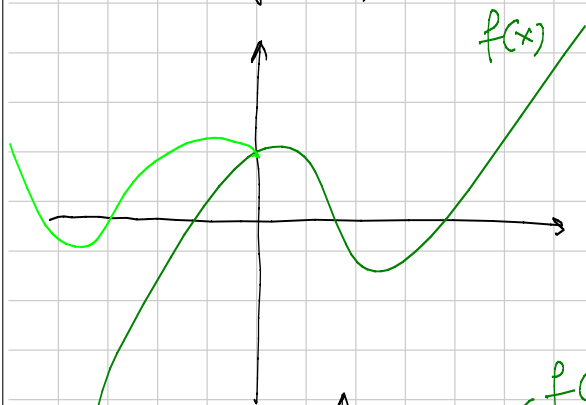




$$f(x) \rightsquigarrow |f(x)|$$

Le parti negative (nel semipiano $y \leq 0$) vengono riflesse in alto

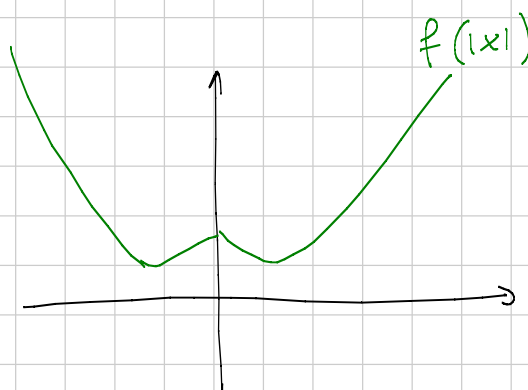
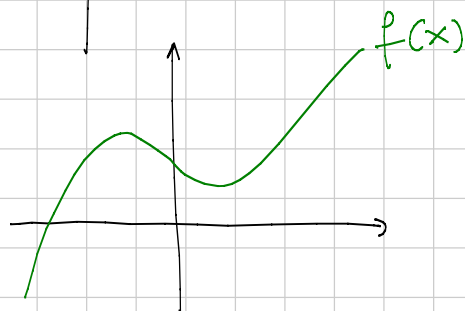
$$f(x) \rightsquigarrow f(|x|)$$

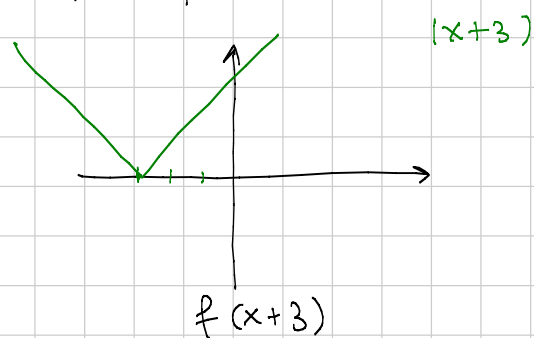
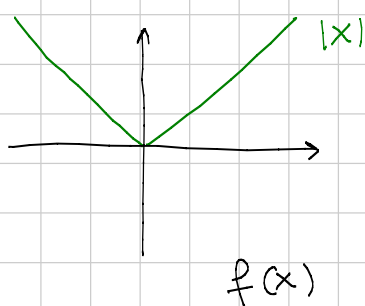
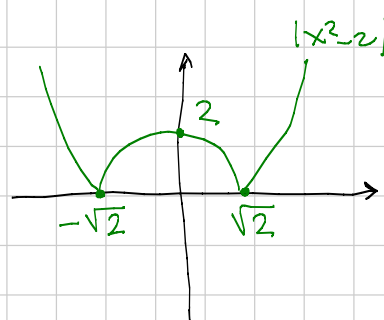
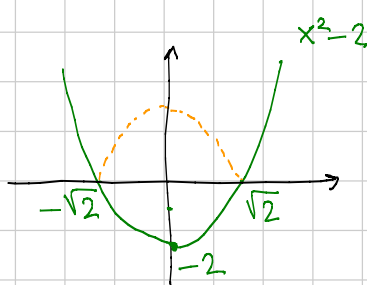
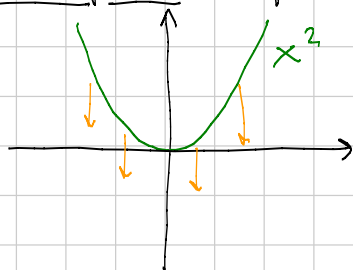


$f(|x|)$ è una funzione che coincide con $f(x)$ per $x \geq 0$ ed inoltre è una funzione

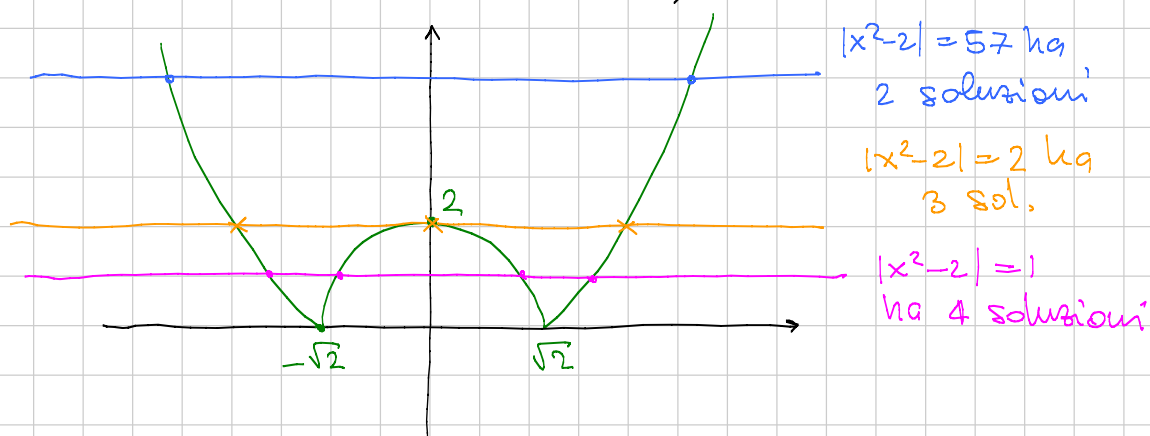
PARI

$$f(|x|) = f(|-x|)$$



Esempio 1 Grafico di $|x+3|$ Esempio 2 $|x^2-2|$ Esempio 3 Quante soluzioni ha l'equazione

$$|x^2-2| = 1 ; \quad |x^2-2| = 2 \quad ; \quad |x^2-2| = 57$$

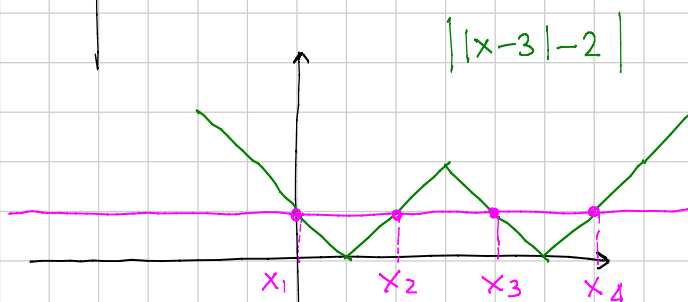
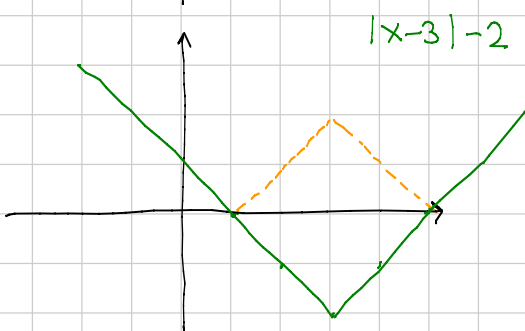
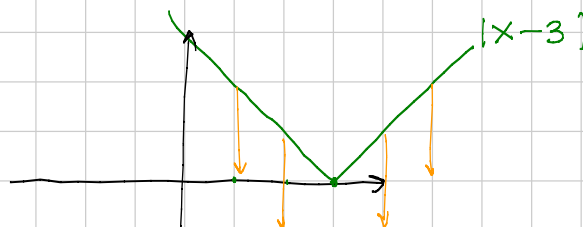
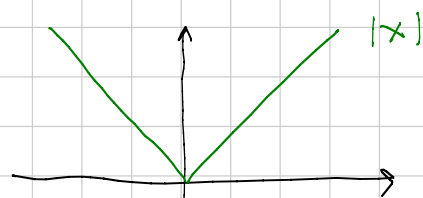


Esempio

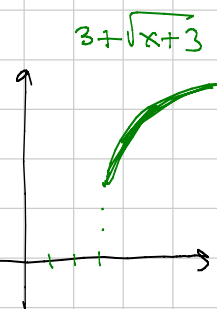
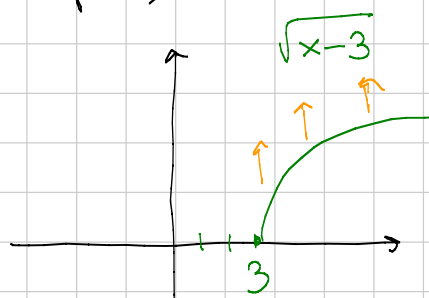
$$||x-3|-2| = 1$$

L'eq. ha 4 soluzioni:

$$x = 0, 2, 4, 6$$

Esempio

$$3 + \sqrt{x-3} = f(x)$$



$$f(x) = 3 + \sqrt{x-3}$$

 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ NON HA SENSO

 $f: [3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ NO SURG.
SI INIETTIVA

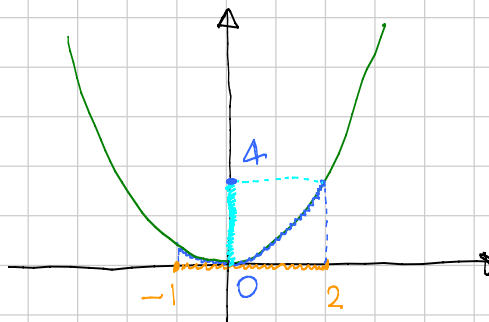
 $f: [3, +\infty) \rightarrow [3, +\infty)$ invertibile

Immagine e controimmagine di insiemi

$$f(x) = x^2$$

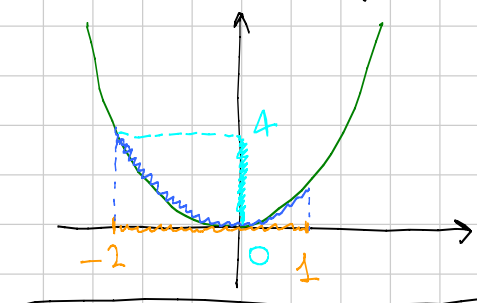
$f([1, 2])$ = insieme dei valori assunti da $f(x)$ quando x varia tra 1 e 2
 $= [1, 4]$

$$f([-1, 2]) = \rightarrow \cancel{[-1, 4]} \rightarrow [0, 4]$$



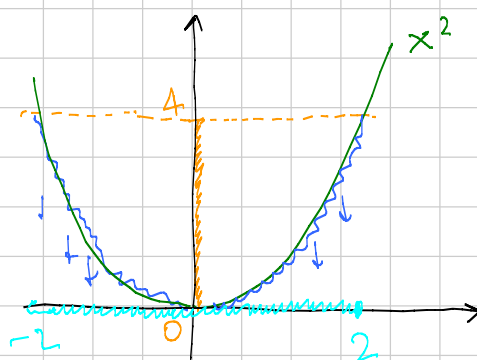
$$f(x) = x^2$$

$$f([-2, 1]) = [0, 4]$$

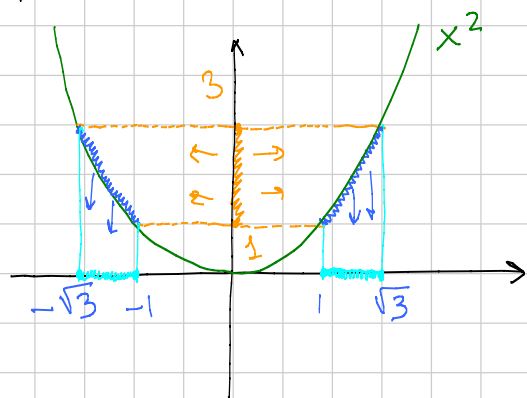


Controimmagine

$f^{-1}([0, 4])$ = valori della x per cui $f(x)$ cade tra 0 e 4
 $= [-2, 2]$



$$f^{-1}([1,3]) = \text{val. di } x \text{ per cui } f(x) \in [1,3]$$



$$= [-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]$$

$$f^{-1}((-9,9])$$

$$= [-3, 3]$$

MAT 1 TLC

ORA 8

Titolo nota

07/10/2006

Funzioni monotone sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Diciamo che f è

- **DEBOLMENTE CRESCENTE** se

$$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

- **STRETT. CRESCENTE** se

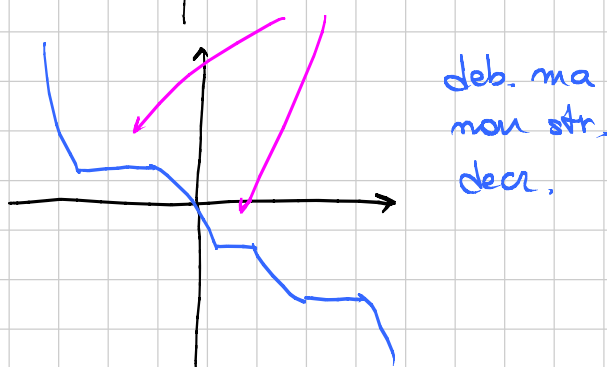
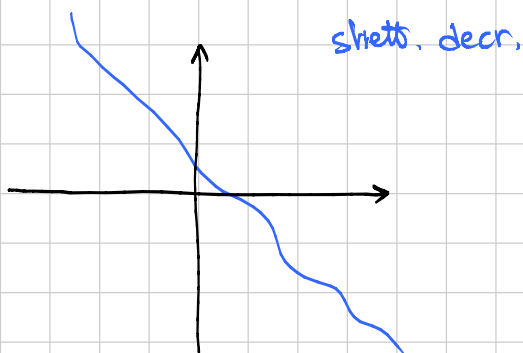
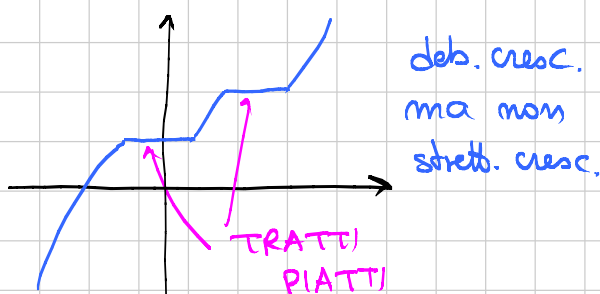
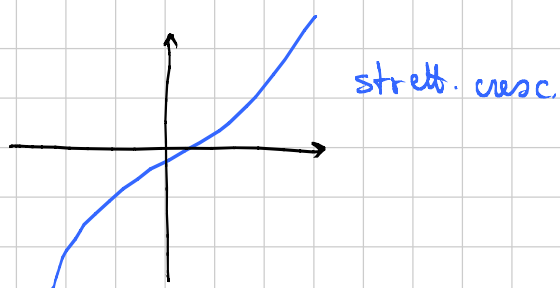
$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

- **DEBOL. DECR.** $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

- **STRETT. DECR.** $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

N.B. Mai usare (de)cresc. senza aggettivo (deb./strett.)

Oss. Se f è strett. cresc. $\Rightarrow f$ è anche deb. cresc.
 " decres. $\Rightarrow$ " decr.



GRANDI TENTAZIONI

$$\textcircled{1} \quad 2^{x+3} = 2^{2x+1} \Rightarrow x+3 = 2x+1 \quad \dots \quad \textcircled{\text{SI}}$$

$$\textcircled{2} \quad \log_5 (x+3) = \log_5 (2x+1) \Rightarrow x+3 = 2x+1 \quad \dots \quad \textcircled{\text{NO}}$$

$$\textcircled{3} \quad \sin (x+3) = \sin (2x+1) \Rightarrow x+3 = 2x+1 \quad \dots \quad \textcircled{\text{NO}}$$

$$\text{G.T.} \quad \cancel{f}(A) = \cancel{f}(B) \Rightarrow A = B$$

$$\textcircled{4} \quad (x+3)^2 = (2x+1)^2 \Rightarrow x+3 = 2x+1 \quad \dots \quad \textcircled{\text{NO}}$$

Si può fare tranquillamente se f è INIETTIVA.
Chiaramente A e B devono essere insieme di partenza di f

① SI perché $f(x) = 2^x$ è INIETTIVA e def. su tutto $\mathbb{R}$

② SI pur di porre $A > 0, B > 0$ (ins. di partenza di $\log$)

③ e ④ no perché $\sin x$ e x^2 non INIETTIVE

$$2^{x+1} > 2^{2x+3} \Rightarrow x+1 > 2x+3 \quad \text{SI}$$

$$\log_3 (x+1) > \log_3 (2x+3) \Rightarrow x+1 > 2x+3 \quad \text{NO}$$

$$\sin (\quad) > \sin (\quad) \Rightarrow \quad \quad \quad \text{NO}$$

$$\text{G.T.} \quad \cancel{f}(A) > \cancel{f}(B) \Rightarrow A > B$$

Si può fare se f è STRETT. CRESC.

Supponiamo $f(A) > f(B) \Rightarrow$

- $\nearrow$ $A > B \leftarrow$ UNICO POSS.
- $\rightarrow$ $A = B \rightarrow$ NO, sarebbe $f(A) = f(B)$
- $\searrow$ $A < B \rightarrow$ NO, perché essendo f strett. cresc. sarebbe $f(A) < f(B)$

Se f è strett. decr. posso "eliminare f " pur di INVERTIRE i VERSI della disug.

$$f(A) > f(B) \Rightarrow A < B$$

3 G.T. Eliminare una funzione con la sua inversa.

Se g è l'inversa di f , allora $g(f(x)) = x$

$$\arcsin(\sin x) = x$$

$$\arccos(\cos x) = x$$

$$\sin(\arcsin x) = x$$

NO (NI)

$f: A \rightarrow B$ e l'inversa $g: B \rightarrow A$

$$g(f(a)) = a \quad \forall a \in A$$

SI

$$f(g(b)) = b \quad \forall b \in B$$

SI

$$\arcsin(\sin x) = x$$

$\forall x \in$ insieme di partenza della restrizione di $\sin$ usata per definire $\arcsin x$

$$\arcsin(\sin x) = x$$

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \begin{array}{l} x=0 \text{ SI} \\ x=1 \text{ SI} \\ x=2 \text{ NO} \end{array}$$

$$\sin(\arcsin x) = x$$

$$\forall x \in [-1, 1] \quad \leftarrow \text{insieme di arrivo della restrizione di } \sin x \text{ ("B")}$$

$$\arccos(\cos x) = x$$

$$\forall x \in [0, \pi]$$

$$\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \text{ SI} \\ x=3 \end{array} \quad \begin{array}{l} x=4 \\ x=-1 \text{ NO} \end{array}$$

$$\cos(\arccos x) = x$$

$$\forall x \in [-1, 1]$$

idem con $\tan$ e $\arctan x$

Considero $f(x) = \arcsin(\sin x)$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

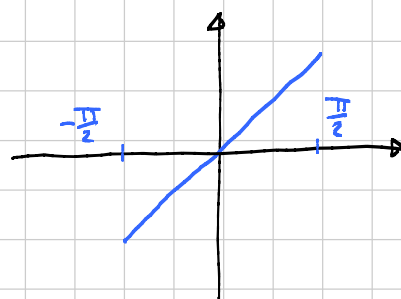
Qual è il grafico?

$$\text{Per } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad f(x) = x$$

f ha delle simmetrie?

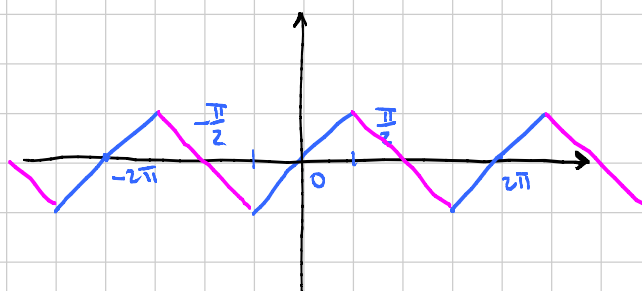
f è DISPARI

f è PERIODICA di periodo 2π



$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= \arcsin(\sin(x+2\pi)) \quad \leftarrow \text{poich\'e } \sin \text{ \u00e9 periodica} \\ &= \arcsin(\sin x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Per esercizio.
Nei tratti rimanenti:



$f(x) = \arctan(\sin x)$	PARI	DISP	PER
$= \sin x^2$			
$= \sin^2 x$	SI	NO	SI
$= \sin^3 x$	NO	SI	SI
$= \sin x^3$	NO	SI	NO
$= \cos x^3$	SI	NO	NO
$= 2^{\sin x}$	NO	NO	SI
$= \cos(2^x)$			

$$f(x) = \sin x^3$$

Pari ? Dispari ?

$$f(-x) = \sin(-x)^3 = \sin(-x^3) = -\sin x^3 = -f(x)$$

x^3 dispari

$\sin$ DISPARI

$$f(x) = \cos x^3$$

PARI

$$f(-x) = \cos(-x)^3 = \cos(-x^3) = \cos x^3 = f(x)$$

$\cos$ PARI

$$f(x) = \sin(\cos x)$$

$\cos$ PARI

$$f(-x) = \sin(\cos(-x)) = \sin(\cos x) = f(x) \text{ PARI!}$$

$$f(x) = 2^{\sin x}$$

Periodica ?

sin periodico

Provo con 2π

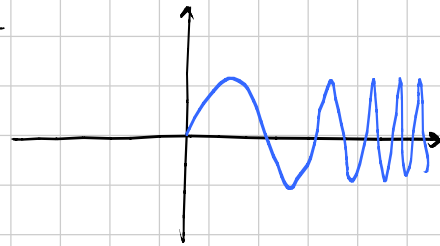
$$f(x+2\pi) = 2^{\sin(x+2\pi)} = 2^{\sin x} = 2 = f(x)$$

$\Rightarrow f$ è PERIODICA

Oss. Se in una composizione la + interna è periodica, allora la composizione è periodica

$$f(x) = \sin x^2 \quad \text{NON è periodica}$$

I p.ti in cui si annulla f sono sempre + ravvicinati invece di essere equispaziati



MAT 1 TLC

ORA 9

Successioni

Limiti

Una successione burocraticamente è una funzione $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

Di solito invece di scrivere $a(0), a(1), a(2), \dots, a(n)$ si scrive
 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

Diciamo che una certa proprietà vale DEFINITIVAMENTE se vale da un certo p.to in poi, cioè se $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che la proprietà vale $\forall n \geq n_0$.

Def + elastica di successione: non si chiede che a_n sia definita $\forall n \in \mathbb{N}$, ma solo definitivamente.

Esempi

$$a_n = 3n + 4$$

SI BURO

$$b_n = \frac{5n^2 + 6}{n+1}$$

SI BURO

$$c_n = \frac{1}{n-5}$$

NO BURO (male per $n=5$)
 SI ELAS. (OK per $n \geq 6$)

$$d_n = \sqrt{n - 2006}$$

NO BURO
 SI ELAST.

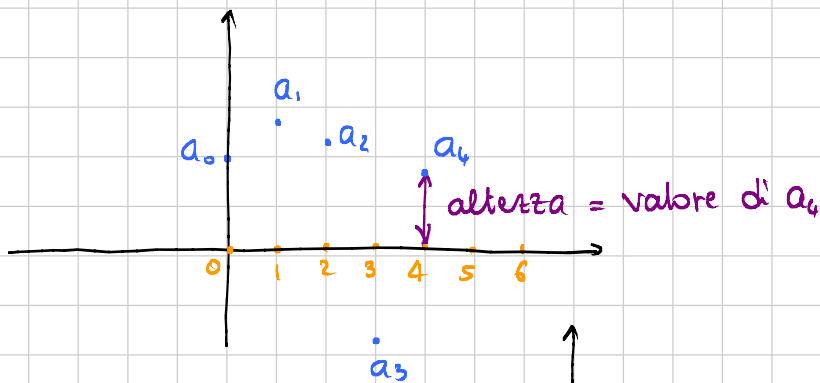
$$e_n = \sqrt{2006 - n}$$

NO BURO
 NO ELAST.

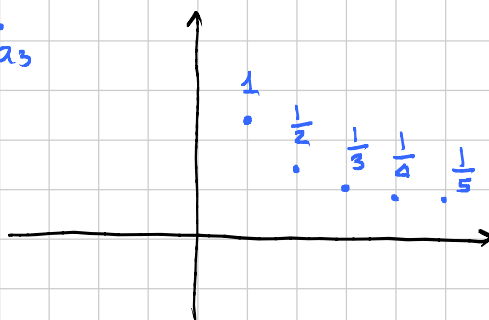
NON È UNA SUCCESSIONE

Come rappresentare una successione?

1° modo In modo cartesiano



Es. Rapp. di $\frac{1}{n}$
(Defin. per $n \geq 1$)



2° MODO Punti su una retta $\leadsto$ LAMPADINE



Es. con $\frac{1}{n}$



Lampadine: pensare che sulla retta ad ogni secondo si accende una lampadina.

Al secondo k si accende una lampadina nel p.to di ascissa a_k (e sta accesa 1 sec.)

LIMITE Una successione può avere 4 tipi di comportamento

$$\textcircled{1} \quad a_n \longrightarrow l \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{2} \quad a_n \longrightarrow +\infty$$

$$" = +\infty$$

$$\textcircled{3} \quad a_n \longrightarrow -\infty$$

$$" = -\infty$$

$$\textcircled{4} \quad a_n \text{ INDETERMINATA}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \text{ NON ESISTE}$$

ACHTUNG

Per le successioni $n \rightarrow +\infty$ e
a uient' altro

Def RIGOROSE

Def. $\textcircled{4}$ Nessuna delle precedenti

Def. $\textcircled{2}$ $\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)

$a_n \geq M$ definitivamente



Def. $\textcircled{3}$ $\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorm. neg.)

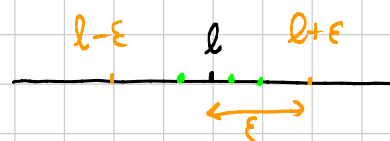
$a_n \leq M$ definitivamente



Def. $\textcircled{1}$ $\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a zero)

$l - \varepsilon \leq a_n \leq l + \varepsilon$ definitiv.

$|a_n - l| \leq \varepsilon \leftarrow \text{dist. tra } a_n \text{ ed } l$



Estensione di ①

$$a_n \rightarrow l^+$$

$$a_n \rightarrow l^-$$

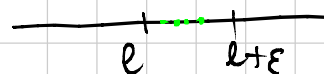
$$\forall \varepsilon > 0$$

$$l \leq a_n \leq l + \varepsilon \text{ defiu.}$$

$$\forall \varepsilon > 0$$

$$l - \varepsilon \leq a_n \leq l$$

importante
che siano strette



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 = 0^+$$

Oss. Se $a_n \rightarrow 0$, è obbligata a tendere a 0^+ o 0^- ? **No**
Se $a_n \rightarrow 0^+$, è obbligata ad essere defiu. dec. **No**



MA 1 TLC

Titolo nota

ORA 10

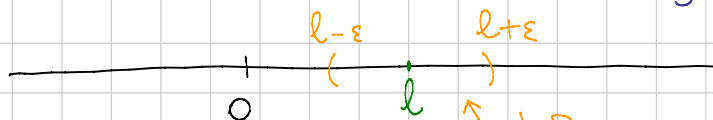
10/10/2006

 a_n successioneDef. 1 $N \neq \emptyset$ Def. 2 $\forall M \in \mathbb{R}, a_n \geq M$ definitivamente.Def. 3 $\forall M \in \mathbb{R}, a_n \leq M$ def. in.Def. 1 $\forall \varepsilon > 0 \quad |a_n - l| \leq \varepsilon$ definit.

Def. 1bis $a_n \rightarrow l^+ \quad \forall \varepsilon > 0 \quad l < a_n \leq l + \varepsilon$ definit.
 $a_n \rightarrow l^- \quad \forall \varepsilon > 0 \quad l - \varepsilon \leq a_n < l$ definit.

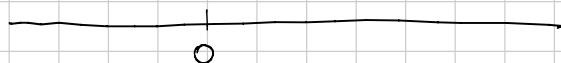
Teo. permanenza del segno* Se $a_n \rightarrow l > 0$, allora definitivamente $a_n > 0$ * Se $a_n \rightarrow +\infty$, allora definitivamente $a_n > 0$

Analoghi: se $a_n \rightarrow l < 0$, allora def. $a_n < 0$
 se $a_n \rightarrow -\infty$, allora def. $a_n < 0$

Dim. Hp. $a_n \rightarrow l > 0$ Tesi $a_n > 0$ def. in.

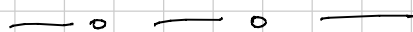
↑ def. in. a_n sta tra $l - \varepsilon$ e $l + \varepsilon$, quindi sopra 0.

Hp $a_n \rightarrow +\infty$ Tesi $a_n > 0$ defiu.



Fisso $M = 2006$ Per defn. di ② defiu. $a_n \geq 2006$,
dunque > 0

Per esercizio fare enunciati analoghi con < 0 .



Estensioni Se $a_n \rightarrow l > 27$, allora defiu. $a_n > 27$
 $a_n \rightarrow -\infty$, allora defiu. $a_n < -85$.



Teo. unicità del limite. Una successione a_n può avere
uno ed uno solo dei comportamenti ①, ②, ③, ④.

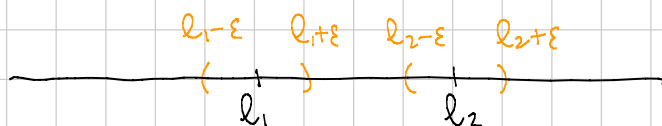
Inoltre, se è di tipo ①, lo è per un solo valore di l .

[Una successione NON può avere 2 limiti diversi]

"Dim" Dimostriamo che non può essere contemporaneamente

$a_n \rightarrow l_1$ con $l_1 < l_2$

$a_n \rightarrow l_2$



prende 2 intorno di
 l_1 ed l_2 disgiunti.
Definit. a_n dovrebbe
stare in entrambi
ASSURDO.

Calcolo dei primi limiti. Dim. che $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$

Uso def. Devo mostrare che $\forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $n^2 \geq M$ definit.

$n^2 \geq M$ $\nearrow$ se $M \leq 0$ è vero $\forall n \in \mathbb{N}$ $\searrow$ in entrambi i casi
 $\searrow$ se $M > 0$ è vero $\forall n \geq \sqrt{M}$ $\nearrow$ è vero definit.

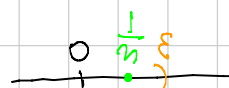
Allo stesso modo si dimostra che $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty$ ($\alpha > 0$)

Caso particolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}$ ($\alpha = \frac{1}{2}$)

Devo dim. che $\forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $\sqrt{n} \geq M$ definit.

$\sqrt{n} \geq M$ $\nearrow$ se $M \leq 0$ è vero $\forall n \in \mathbb{N}$
 $\searrow$ se $M > 0$ è vero $\forall n \geq M^2$ $\searrow$ cioè definit.

Dimostriamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, anzi 0^+



Devo dimostrare che $\forall \varepsilon > 0$ si ha che $0 < \frac{1}{n} \leq \varepsilon$

$0 < \frac{1}{n}$ questa è vera $\forall n \geq 1$

$\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ questa è vera $\forall n \geq \frac{1}{\varepsilon}$, cioè definitivamente

Allo stesso modo si dimostra che $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\beta = 0^+$ ($\beta < 0$)

CONCLUSIONE

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ TABELLINA

La successione n^0 è la succ.
 $1^0, 2^0, 3^0, 4^0, \dots$
 $\begin{matrix} 1^0 & 2^0 & 3^0 & 4^0 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \end{matrix}$
 dunque $\rightarrow 1$.

Teorema di confronto (confronto a 2).

Siano a_n e b_n due succ. Supponiamo che

$$a_n \leq b_n \text{ definitivamente.}$$

Allora * se $a_n \rightarrow +\infty$, anche $b_n \rightarrow +\infty$

* se $b_n \rightarrow -\infty$, anche $a_n \rightarrow -\infty$

* se $a_n \rightarrow l_1 \in \mathbb{R}$ e $b_n \rightarrow l_2 \in \mathbb{R}$, allora $l_1 \leq l_2$

ACHTUNG Sapendo solo che $a_n \rightarrow l_1 \in \mathbb{R}$, non possiamo concludere che $b_n \rightarrow l_2 \in \mathbb{R}$ e $l_2 \geq l_1$ (potrebbe essere $b_n \rightarrow +\infty$ oppure b_n senza limite (indet).)

Teorema dei Carabinieri (confronto a 3).

Siano a_n, b_n, c_n 3 succ. Supponiamo che

$$a_n \leq b_n \leq c_n \text{ definitivamente.}$$

Supponiamo inoltre che $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ $\nwarrow$ stesso limite
 $c_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \swarrow$

Allora $b_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ (stesso limite delle altre 2).



Esempio 1

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

Dim.

$$-1 \leq \sin u \leq 1$$

Divido per n consentendo i versi (si può per $n \geq 1$)

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

vera $\forall n \geq 1$, cioè definitivamente.

(si dim. come quell'altro)

(Dim. prima)

Esempio 2

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\arctan(n! - 2^n + \sin n^2)}{n^3} = 0$$

a_n

Dim. Devo verificare che $\forall \varepsilon > 0$ si ha che $-\varepsilon \leq a_n \leq \varepsilon$ definitivamente, il che si riduce ad una semplice diseq.
NO!!!!!!!!!!

Nuova partenza

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arctan(\text{nostro}) \leq \frac{\pi}{2}$$

Divido per n^3

$$-\frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{n^3} \right) \leq \frac{\arctan(\text{nostro})}{n^3} \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n^3}$$

MAT 1 TLC

[ORA 11]

Teoremi algebrici

- somma di 2 succ.
- prodotto costante · succ.
- prodotto di 2 succ.
- quoziente di 2 succ.

Retta reale estesa $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$

$a_n \rightarrow l \in \overline{\mathbb{R}}$ (è come dire a_n di tipo ①, ②, ③)

Su $\overline{\mathbb{R}}$ posso, entro certi limiti, estendere le operazioni aritmetiche

$$27 + (+\infty) = +\infty$$

$$27 + (-\infty) = -\infty$$

$$27 \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$$

Teorema somma $a_n \rightarrow l_1 \in \overline{\mathbb{R}}, b_n \rightarrow l_2 \in \overline{\mathbb{R}}, c_n = a_n + b_n$

Allora $c_n \rightarrow l_1 + l_2$

TRANNE nel caso

$$(+\infty) + (-\infty)$$

Teorema prodotto costante · successione
succ. · succ.

$$a_n \rightarrow l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$b_n \rightarrow l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$c_n = a_n \cdot b_n$$

$$c_n \rightarrow l_1 \cdot l_2$$

TRANNE nel caso

$$0 \cdot \pm\infty$$

$\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$ $c_n = \lambda \cdot a_n$, allora $c_n \rightarrow \lambda l_1$

Teorema quoziente

$$\begin{aligned} a_n &\rightarrow l_1 \in \bar{\mathbb{R}} \\ b_n &\rightarrow l_2 \in \bar{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

$$c_n = \frac{a_n}{b_n}$$

Allora $c_n \rightarrow \frac{l_1}{l_2}$ **TRANNE**

* nei casi $\frac{0}{0}$ e $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

serve per Hp
che sia
 $b_n \neq 0$
definitivamente

* nei casi in cui $l_2 = 0$. In questi casi bisogna vedere se è 0^+ oppure 0^- .

ACHTUNG, ACHTUNG

Se $a_n \rightarrow +\infty$, $b_n \rightarrow -\infty$,

$c_n = a_n + b_n$, si dice che c_n è una forma indeterminata

Cosa vuol dire? NON VUOL DIRE che il limite non esiste (cioè che c_n non ha limite, è di tipo ④) VUOL dire che il limite di c_n non si può dedurre dal limite di a_n e b_n . Occorre vedere come sono fatte a_n e b_n .

IDEM per le forme indeterminate $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $0 \cdot (\pm\infty)$.

Esempio 1

$$a_n = \begin{matrix} n^2 & - & n \\ \downarrow & & \downarrow \\ +\infty & & -\infty \end{matrix}$$

Forma indeterminata
 $+\infty - \infty$

$$n^2 - n = \begin{matrix} n & (n-1) \\ \downarrow & \downarrow \\ +\infty & \cdot & +\infty \end{matrix} \rightarrow +\infty = +\infty$$

Esempio 2

$$a_n = \underbrace{n^2}_{+\infty} - \underbrace{n^7}_{-\infty}$$

Forma indeterminata

$$n^2 - n^7 = \underbrace{n^2}_{+\infty} \underbrace{(1 - n^5)}_{1 - \infty = -\infty} \rightarrow -\infty$$

$$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$$

Commento sul teo. quoziente

$$a_n \rightarrow l_1, b_n \rightarrow l_2$$

 l_1

	$-\infty$	2	0^+	0^-	-3	$+\infty$
$-\infty$	Bol	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	B
-5	0^+	$-\frac{5}{2}$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{5}{2}$	0^-
0	0	0	B	B	0	0
4	0^-	2	$+\infty$	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	0
$+\infty$	B	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	B

 $\frac{a_n}{b_n}$

Esempio 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - \cos n = +\infty$

$$\underbrace{n^2 - \cos n}_{+\infty} \geq \underbrace{n^2 - 1}_{+\infty}$$

per confronto a 2

Esempio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 - n^2 \sin n^3 = +\infty$

$$\underbrace{n^3 - n^2 \sin n^3}_{+\infty} \geq \underbrace{n^3 - n^2}_{+\infty} = n^2 (n-1)$$

congr. a 2.

$$n^3 - n^2 \sin u^3 = \underbrace{n^3}_{+\infty} \left(1 - \underbrace{\frac{\sin u^3}{n}}_{0} \right) \rightarrow +\infty$$

$$+\infty \cdot (1 - 0) = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

$-1 \leq \sin(u^3) \leq 1$ Divido per n

$$\underbrace{-\frac{1}{n}}_{0} \leq \underbrace{\frac{\sin(u^3)}{n}}_{0} \leq \underbrace{\frac{1}{n}}_{0}$$

Carabinieri

Esempio 3

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 + 3n^2 + 5}{n^3 - 27} = 1$$

Raccolgo n^3 sopra e sotto

$$\frac{\cancel{n^3} \left(1 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^3} \right)}{\cancel{n^3} \left(1 - \frac{27}{n^3} \right)} \rightarrow \frac{1}{1} = 1$$

Esempio 4

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2+2}{5n+1} - \frac{n^3+2}{n^2+3} \right)$$

$\downarrow$ $(+\infty) - (+\infty)$

Forma
indeterminata

Facciamo denominatore

$$\frac{(n^2+2)(n^2+3) - (n^3+2)(5n+1)}{(n^2+3)(5n+1)}$$

$$= \frac{\cancel{n^4} + 3n^2 + 2n^2 + 6 - 5\cancel{n^4} - \cancel{n^3} - 10n - 2}{5n^3 + n^2 + 15n + 3}$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{-\infty} = \frac{-4n^4 - n^3 + 5n^2 - 10n + 4}{5n^3 + n^2 + 15n + 3} \end{aligned}$$

$\nearrow$ raccordo n^4 sopra
 $\searrow$ n^3 sotto

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2+2}{5n+1} - \frac{n^3+2}{n^2+3} \right)$$

$$\sim \frac{n^2}{5n} - \frac{n^3}{n^2}$$

$$= \frac{n}{5} - n = -\frac{4}{5}n \rightarrow -\infty$$

MAT 1 TLC

ORA 12

Titolo nota

11/10/2006

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$$

1° modo : Devo dim. che $\forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $2^n \geq M$ definit.

$$2^n \geq M \begin{cases} \nearrow \text{se } M \leq 1 \text{ è vera } \forall n \in \mathbb{N} \\ \searrow \text{se } M \geq 1 \text{ è vera } \forall n \geq \log_2 M \end{cases} \rightarrow \text{cioè defn.}$$

2° modo ; abbiamo dim. per inclusione che

$$\begin{array}{ccc} \textcircled{2^n} & \geq & \textcircled{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \downarrow \text{confronto} & & \downarrow \\ \text{a } 2 & & +\infty \end{array}$$

Più in generale $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$ se $a > 1$

Dim. : Se $a > 1$, posso scriverlo nella forma $a = 1+x$ con $x > 0$

$$a^n = (1+x)^n \geq 1+nx$$

disug. di BERNOLLI, dim. per induzione

$\downarrow$ (se usa che $x > 0$)
 $\downarrow$
 $+\infty$

confronto a 2

Se $0 < a < 1$, allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$

Se $a \in (0,1)$ posso scrivere
 $a = \frac{1}{b}$ con $b = \frac{1}{a} > 1$

$$a^n = \left(\frac{1}{b}\right)^n = \frac{1}{\textcircled{b^n}} \rightarrow 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } 0 \leq a < 1 \end{cases} \quad \leftarrow \text{è una succ. di uni.}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty$$

Per induzione $n! \geq 2^n$ def'n.
si conclude con confronto a?

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2} = 1$$

Dim. abusiva: $\sqrt[n]{2} = 2^{\frac{1}{n}} \rightarrow 2^0 = 1$
Per il momento nessuno ci autorizza a
passare al limite negli esponenti

Disug. Bernoulli

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \text{Pongo } x = \frac{1}{n}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2 \quad \text{Estraggo } \sqrt[n]{}$$

$$1 \leftarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq \sqrt[n]{2} \geq 1$$

Dim. con Bernoulli

uso che $\sqrt[n]{x}$ è crescente
 $2 \geq 1 \Rightarrow \sqrt[n]{2} \geq \sqrt[n]{1} = 1$

Più in generale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{per ogni } a > 0$$

Teo. algebrico sull'esponenziale.

$$a_n \rightarrow l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$b_n \rightarrow l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$c_n = (a_n)^{b_n}$$

← Sene come ipotesi che $a_n > 0$

Allora $a_n \rightarrow (l_1)^{l_2}$ TRANNE nei casi

$$\begin{array}{ccc} 0^0 & \infty^0 & 1^\infty \end{array}$$

N.B. 0^∞ non è indeterminata $0^\infty = 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{2^n} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{27}}{n!} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1,01)^n}{\sqrt{n}} = +\infty$$

STRUMENTI :

- * criterio radice
- * criterio rapporto
- * criterio rapporto $\rightarrow$ radice

CRITERIO RADICE Sia $a_n \geq 0$ definitivamente

Supponiamo che $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora

* se $l > 1$ (anche se $l = +\infty$), allora $a_n \rightarrow +\infty$

* se $0 \leq l < 1$, allora $a_n \rightarrow 0$

* se $l = 1$, allora BOH (non si può per ora concludere nulla, bisogna inventarsi altro)

CRITERIO RAPPORTO Sia $a_n > 0$ definitivamente.

Supponiamo che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora

Come sopra

Esempio $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2}{2^n} \right) = a_n \quad \frac{+\infty}{+\infty}$

Applico criterio rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{2n^2}$$

$$= \frac{n^2 + 2n + 1}{2n^2} \rightarrow \frac{1}{2} = l < 1$$

Poichè $l < 1$, si ha che $a_n = \frac{n^2}{2^n} \rightarrow 0$

Esempio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right) = a_n$

Provo a farlo con il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} \rightarrow 1 \Rightarrow \text{BOH}$$

CRITERIO RAPPORTO $\rightarrow$ RADICE Sia $a_n > 0$ defn.

Supponiamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ (stesso l).

Conclusione pessimistica: se facendo il rapporto viene
 che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1$ (dunque BOH) è inutile provare success.
 con la radice, perché si sa già che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

— o — o —

Il contrario (se $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$, allora anche $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l$)
 non vale !!! Può succedere (es: trovare un esempio)
 che $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l \in \mathbb{R}$, ma $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ NON ha limite.

Se ce l'ha, coincidono

MAT 1 TLC

ORA 13

Successioni e sottosuccessioni Sia data una succ. a_n .

$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, \dots$

↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑

Prendiamo una successione n_k di indici

$n_0 = 0, n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 5, n_4 = 7, n_5 = 8, n_6 = 10$

Costruisco ora la successione a_{n_k} : questa successione "pesca" solo gli elementi a_i che ho deciso di prendere con gli indici n_k . a_{n_k} si dice sottosuccessione

2 scuole di pensiero

↗ gli indici n_k devono essere presi in modo strett. crescente

↘ gli indici n_k devono essere presi in modo che $n_k \rightarrow +\infty$ (posso fermarmi e prendere + volte lo stesso elem. e posso anche tornare indietro)

Esempi di sottosucc.

$a_{2n} =$ sottosucc. costituita dai termini di indice pari
 $a_0, a_2, a_4, a_6, a_8, \dots$

$a_{2n+1} =$ sottosucc. dei dispari : $a_1, a_3, a_5, a_7, a_9, \dots$

$a_{3n} : a_0, a_3, a_6, a_9, a_{12}, \dots$

$$a_{n^2} : a_0, a_4, a_9, a_{16}, \dots$$

$$a_{n+8} = \text{tutti i termini con indice } \geq 8 : a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, \dots$$

↑ sottosucc. giusta perché definitivamente prende tutti i termini!
OTTENUTA MEDIANTE SHIFT degli indici

Cosa lega il limite di una succ. al limite delle sottosucc. ?

Teorema Sia a_n una succ., e sia a_{n_k} una s.succ.

Supponiamo che $a_n \rightarrow l \in \bar{\mathbb{R}}$. Allora $a_{n_k} \rightarrow l$
(stesso l).

ACHTUNG! Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ NON esiste, non si può dire nulla sul limite della sottosucc. (a seconda dei casi può esistere o non esistere).

UTILIZZO OPERATIVO DEL TEOREMA. Sia data una succ. a_n .

Supponiamo che esistano 2 sottosuccessioni

$$a_{n_k} \rightarrow l_1 \in \bar{\mathbb{R}}$$

con $l_1 \neq l_2$.

$$a_{m_k} \rightarrow l_2 \in \bar{\mathbb{R}}$$

Allora la succ. a_n
NON ha limite
(cioè tipo ④)

Se $a_n \rightarrow l \in \bar{\mathbb{R}}$, allora tutte le s.succ. dovrebbero $\rightarrow l$
(stesso l)

Esempio 1 Sia $a_n = (-1)^n$ $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$

Considero

$$a_{2n} = \text{succ. pari} = (-1)^{2n} = 1 \rightarrow 1 = l_1$$

$$a_{2n+1} = \text{s.succ. dispari} = (-1)^{2n+1} = -1 \rightarrow -1 = l_2$$

$$l_1 \neq l_2 \Rightarrow \underline{a_n \text{ NON HA LIMITE}}$$

Esempio 2 $a_n = (2 + (-1)^n)^n$ NON ESISTE

$$a_{2n} = (2 + (-1)^{2n})^{2n} = (2 + 1)^{2n} = 3^{2n} \rightarrow +\infty$$

$$a_{2n+1} = (2 + (-1)^{2n+1})^{2n+1} = (2 - 1)^{2n+1} = 1^{2n+1} = 1 \rightarrow 1$$

DIVERGENT

Esempio 3 $a_n = (3 + (-1)^n)^n \rightarrow +\infty$

$$3 + (-1)^n \geq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(3 + (-1)^n)^n \geq 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\downarrow$
 $+\infty$

Esempio 4 $a_n = n^2 + (-1)^n n \rightarrow +\infty$

$$n^2 + (-1)^n n \geq n^2 - n \quad n(n-1)$$

$\downarrow$
 $+\infty$

Esempio 5 $a_n = (-1)^n n^2 + n$ NON ESISTE

$$a_{2n} = (-1)^{2n} (2n)^2 + (2n) = 4n^2 + 2n \rightarrow +\infty$$

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= (-1)^{2n+1} (2n+1)^2 + (2n+1) = -(2n+1)^2 + (2n+1) \\ &= -4n^2 - 4n - 1 + 2n + 1 = -4n^2 - 2n \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

Esempio 6 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$ visto prima.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{2000}}{2^n} \rightarrow a_n$$

Criterio rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{2000}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^{2000}} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^{2000} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} < 1$$

Il limite originario è 0.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^a}{b^n} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{per ogni } a \in \mathbb{R} \\ \text{per ogni } b > 1 \end{array}$$

Gli esponenziali (con base > 1) battono le potenze

Fattoriale vs esponenziale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{20^n}{n!} = 0$$

$\underbrace{\frac{20^n}{n!}}_{a_n}$

Rapporto: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{20^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{20^n}$

$$= \frac{20 \cdot \cancel{20^n}}{(n+1) \cdot \cancel{n!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{20^n}} = \frac{20}{n+1} \rightarrow 0 \quad l < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

FATTORIALE
batte
esponenziale

MAT 1 TLC

ORA 14

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,71827 \dots$$

BISOGNA DIM. CHE ESISTE

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} = a_n \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$$

Rapporto: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n}$

$$= \frac{(n+1) \cdot (n+1)^n}{(n+1) \cdot n!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e = l > 1$$

Esempio

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{2^{n^2}} = a_n = 0$$

Radice

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^n}{2^{n^2}}}$$

Ricorso

$$= \frac{n}{2^n} \rightarrow 0 \text{ perché già in tabellina}$$

$l < 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = a_n$$

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} \quad \infty^0 \text{ indeterminata}$$

RAPPORTO $\rightarrow$ RADICE: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l \in \bar{\mathbb{R}} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \rightarrow \text{stesso } l$ Basta calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \rightarrow 1, \text{ quindi anche } \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n} \rightarrow 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2n^2+27}$$

$$a_n = 2n^2+27$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(n+1)^2+27}{2n^2+27} = \frac{2n^2+\dots}{2n^2+\dots} \rightarrow 1$$

$$\text{quindi anche } \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{2n^2+27} \rightarrow 1$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\text{polinomio in } n} = 1}$$

 ∞^0

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty}$$

$$a_n = n!$$

$$(n!)^{\frac{1}{n}} \quad \infty^0$$

RAPPORTO RADICE

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1)\cancel{n!}}{\cancel{n!}} = n+1 \rightarrow +\infty$$

Esempio $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n]{n^n}} = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$$

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

RAPPORTO $\rightarrow$ RADICE

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} \rightarrow \frac{1}{e} \quad (\text{vedi alcune schermate precedenti})$$

Ma allora $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \rightarrow \frac{1}{e}$

————— 0 ————— 0 ————— $\rightarrow$

Esempio 1 $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \rightarrow 0$

$$a_3 = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2}$$

$$a_5 = \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{10^2}$$

$$a_4 = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2}$$

$$\rightarrow a_4 \leq \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^2} = \frac{5}{4^2}$$

Il teo. algebrico della somma vale quando il numero di addendi $\bar{e}$ FISSO.

In questo caso il numero di addendi cresce di volta in volta. Quindi il teo. non si applica.

$$0 \leq a_n \leq \overbrace{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2}}^{n+1}$$

$\leftarrow$ ho sostituito tutti gli addendi con il + grande

numero addendi

$$0 \leq a_n \leq (n+1) \cdot \frac{1}{n^2}$$

↓ ↓ ↓

0 0 0

Esempio 2

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \rightarrow 0$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0

Nooooo!!!!!!

In questo caso $a_n \rightarrow +\infty$

Sostituisco tutti gli addendi con il + piccolo

$$a_n \geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}}}_{n+1}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $+\infty$ $+\infty$

$$\frac{n+1}{\sqrt{2n}} = \frac{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $+\infty$ $+$

MAT 1 TLC

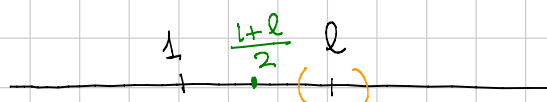
ORA 15

Titolo nota

12/10/2006

Giustificazione criterio radice1° caso

$$\text{Hp } \begin{cases} a_n \geq 0 \\ \sqrt[n]{a_n} \rightarrow l > 1 \end{cases} \quad \text{Terzi } a_n \rightarrow +\infty$$



$$\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l, \text{ ma allora } \sqrt[n]{a_n} \geq \frac{l+1}{2} \text{ definitivamente,}$$

ma allora elevando alla n -esimacongruente
a 2

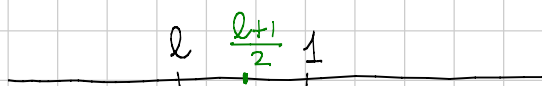
$$a_n \geq \left(\frac{l+1}{2} \right)^n$$

espon.
con base
> 1

$\downarrow$ $\downarrow$
 $+\infty$ $+\infty$

2° caso

$$\text{Hp } \begin{cases} a_n \geq 0 \\ \sqrt[n]{a_n} \rightarrow l < 1 \end{cases} \quad \text{Terzi } a_n \rightarrow 0$$



$$\frac{l+1}{2} < 1$$

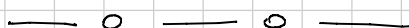
Se $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l < 1$, allora definitivamente.

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{l+1}{2}, \text{ quindi}$$

$$0 \leq a_n \leq \left(\frac{l+1}{2} \right)^n$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0

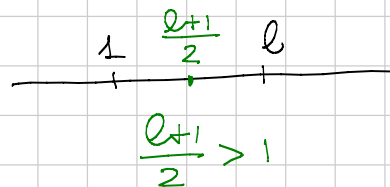
Carab.

esponenz.
con base < 1

"DIM" CRITERIO RAPPORTO

1° caso $H_p \quad a_n > 0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l > 1$$

Tesi: $a_n \rightarrow +\infty$ Se $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l > 1$, allora

definito.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{l+1}{2}$$

← Questa vale solo definit.
Facciamo finta che valga
sempre

$$\frac{a_1}{a_0} \geq \frac{l+1}{2}, \quad a_1 \geq \frac{l+1}{2} a_0$$

$$\frac{a_2}{a_1} \geq \frac{l+1}{2}, \quad a_2 \geq \frac{l+1}{2} a_1 \geq \left(\frac{l+1}{2}\right)^2 a_0$$

$$\frac{a_3}{a_2} \geq \frac{l+1}{2}, \quad a_3 \geq \frac{l+1}{2} a_2 \geq \left(\frac{l+1}{2}\right)^3 a_0$$

In questo modo si dimostra (per induzione: FARLA FORM.)

che

$$a_n \geq \left(\frac{l+1}{2}\right)^n a_0$$

Diagram showing the limit process: $a_n \rightarrow +\infty$ and $+\infty \cdot a_0 > 0 = +\infty$.

Stessa cosa (fare per esercizio) succede nel 2° caso ($l < 1$)Se invece di avere $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{l+1}{2}$ sempre abbiamo cheè vero solo per $n \geq n_0$, allora vorrà dire che l'induzione deve partire da $n = n_0$ e si dim. una disug.

$$a_n \geq \left(\frac{l+1}{2}\right)^{n-n_0} a_{n_0} \quad \forall n \geq n_0$$

SUCCESSIONI MONOTONEUna successione a_n si dice

* DEB. CRESC.	se	$a_{n+1} \geq a_n$	$\forall n \in \mathbb{N}$	$m > n \Rightarrow a_m \geq a_n$
* STRETT. CRESC.	se	$a_{n+1} > a_n$	$\forall n \in \mathbb{N}$	$m > n \Rightarrow a_m > a_n$
* DEB. DECR.	se	$a_{n+1} \leq a_n$	$\forall n \in \mathbb{N}$	$m > n \Rightarrow a_m \leq a_n$
* STRETT. DECR.	se	$a_{n+1} < a_n$	$\forall n \in \mathbb{N}$	$m > n \Rightarrow a_m < a_n$

↔
equivalenti

 a_n si dice limitata superiormente se $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$ " " inferiormente " " $a_n \geq M$ "

" LIMITATA se valgono entrambe oppure (equiv.)

se $\exists A \in \mathbb{R}$ t.c. $|a_n| \leq A \quad \forall n \in \mathbb{N}$ [Teo. succ. MONOTONE]Sia a_n una succ. DEB. CRESC.
(se è STRETT, ancora meglio).

Allora ci sono solo 2 tipi di comportamento possibile

* $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

* $a_n \rightarrow +\infty$

sottoinsieme della retta
costituito dai pti della succ.
(ELENCO)

Inoltre $l = \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Se in aggiunta supponiamo che a_n sia LIMITATA SUPER,allora di sicuro $l \in \mathbb{R}$.

Sia a_n una succ. DEB. DECR. (è STRETT., ancora meglio)

Allora ci sono solo 2 possibili comport.

$$* a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$$

$$* a_n \rightarrow -\infty$$

$$\text{Inoltre } l = \inf \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Se in aggiunta supponiamo a_n LIMITATA INFERIORMENTE,
allora di sicuro $l \in \mathbb{R}$,

Dim. caso CRESCENTE

1° CASO

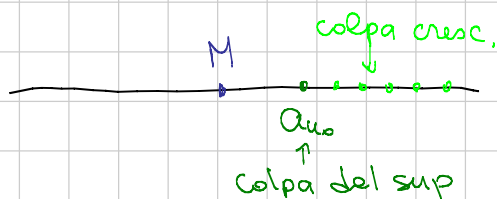
$$\text{Hp: } \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\} = +\infty$$

a_n deb. cresc.

$\forall M \in \mathbb{R}$, esiste un el. della
succ. $\geq M$

cioè esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$a_{n_0} \geq M$$



$$\text{Tesi: } a_n \rightarrow +\infty$$



$$\forall M \in \mathbb{R}, a_n \geq M \text{ definit.}$$

Grazie al fatto che
 a_n è (deb.) cresc.
Se $a_{n_0} \geq M$, allora
 $a_n \geq M \quad \forall n \geq n_0$,
cioè definit.

MAT 1 TLC

ORA 16

LIMITI DI FUNZIONI

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

↑
solo su un
sottoinsieme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) & \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \end{array}$$

Ciascuno di questi può avere 4 possibili comportamenti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \begin{cases} l \in \mathbb{R} \\ +\infty \\ -\infty \\ \text{NON ESISTE} \end{cases}$$

①

②

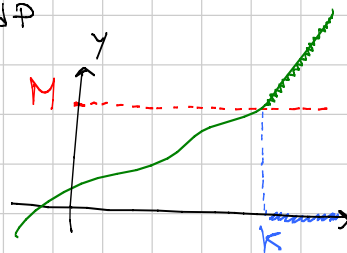
③

④

← NdP

Def. di ② $\forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $\exists k \in \mathbb{R}$

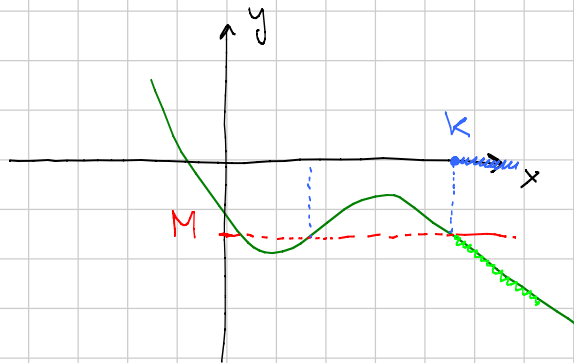
$$f(x) \geq M \quad \forall x \geq k$$



Def. di ③ $\forall M \in \mathbb{R} \exists k \in \mathbb{R}$

$$\text{b.c. } f(x) \leq M$$

$$\forall x \geq k$$



Def. di ① $\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|f(x) - l| \leq \varepsilon \quad \forall x \geq k$$

① bis $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l^+$

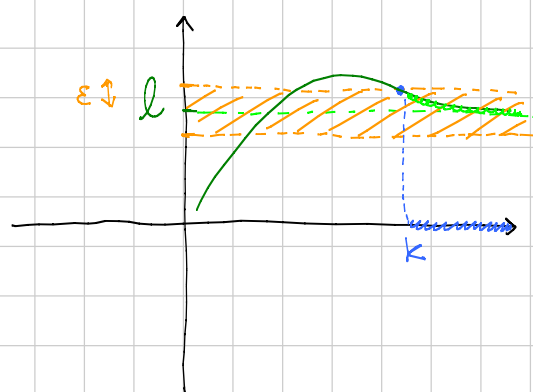
$\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{R}$ t.c.

$$l < f(x) \leq l + \varepsilon \quad \forall x \geq k$$

↑
IMPORTANTE

① ter $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l^-$: $\forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{R}$ t.c.

$$l - \varepsilon \leq f(x) < l \quad \forall x \geq k$$



$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

- $\swarrow$ $l \in \mathbb{R}$ ①
- $\swarrow$ $+\infty$ ②
- $\swarrow$ $-\infty$ ③
- $\swarrow$ NON ESISTE ④ NdP

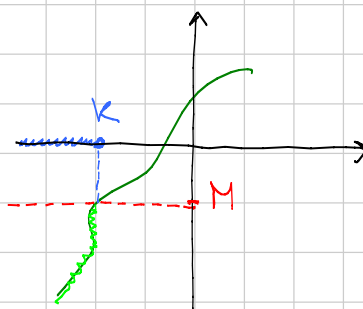
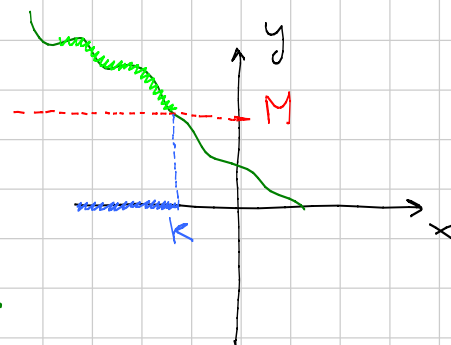
Def. ② $\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme) $\exists k \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x) \geq M \quad \forall x \leq k$$

Def. ③ $\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorm. negat.)

$\exists k \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x) \leq M \quad \forall x \leq k$$



Def. ① $\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a zero)

$\exists k \in \mathbb{R}$ t.c.

$$|f(x) - l| \leq \varepsilon \quad \forall x \leq k$$



Idem per $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l^+, l^-$

Sia ora $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \begin{cases} l \in \mathbb{R} \quad (l^+, l^-) & \textcircled{1} \\ +\infty & \textcircled{2} \\ -\infty & \textcircled{3} \\ \text{NON ESISTE} & \textcircled{4} \quad \text{N.E.P.} \end{cases}$$

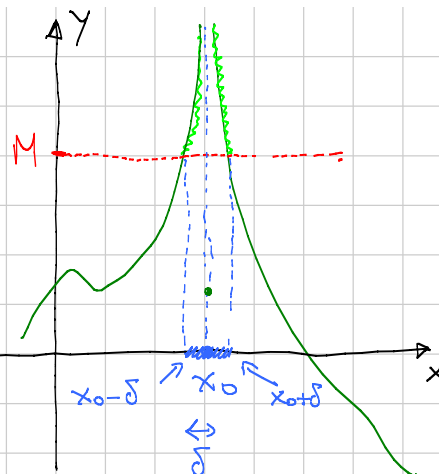
Def. di ② $\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)

$\exists \delta > 0$ b.c.

$$f(x) \geq M$$

$$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$$

intervallo meno il punto x_0



Il limite guarda cosa accade per x vicino ad x_0 e se ne frega di quello che accade in $x = x_0$

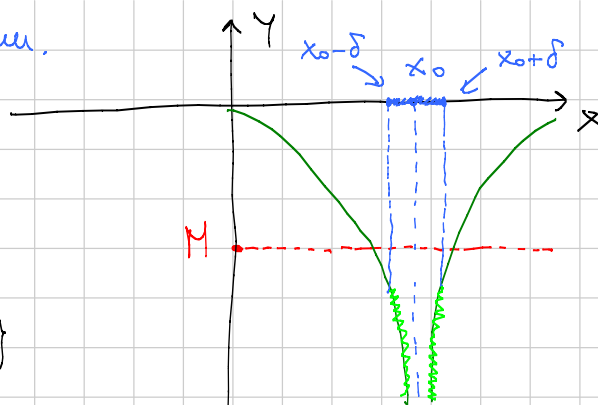
in questo punto f potrebbe anche non essere definita.

Def. di ③ $\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorm. neg.)

$\exists \delta > 0$ b.c.

$$f(x) \leq M$$

$$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$$

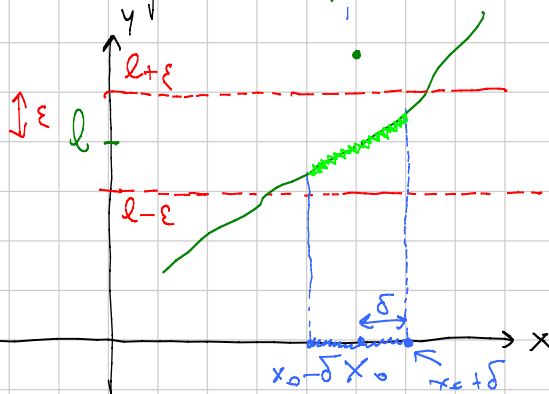


Def di ① $\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a zero)

$\exists \delta > 0$ b.c.

$$|f(x) - l| \leq \varepsilon$$

$$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \dots$$

Le disuguaglianze richieste su $f(x)$ devono valere

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta]$$

↑
esclude il p.to x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \dots$$

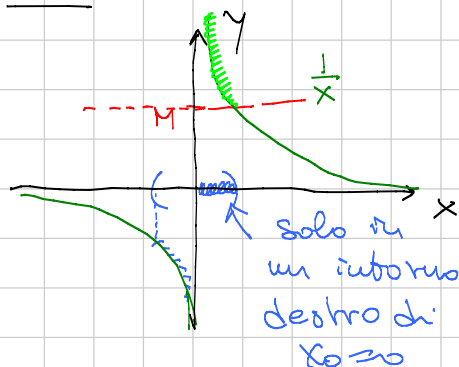
$$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0)$$

— o — o —

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \text{ NON ESISTE}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$



↑
solo in un intorno destro di $x_0 = 0$

DEF. Se succede che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

si dice che $f(x)$ è CONTINUA nel p.to x_0

(cioè il valore in $x=x_0$ è quello che vorrebbe essere guardando gli x vicini a x_0)

TEOREMA Ogni funzione ottenuta a partire dalle funzioni elementari (quelle presentate) usando op. alg. e/o composizioni, è CONTINUA in tutti i punti in cui non presenta problemi burocratici (denomin. $\neq 0$, radici di roba ≤ 0 , log di roba ≤ 0 , ...)

Esempio.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\overbrace{\arctan((x-1)3^x) + x^2 - 6}^{f(x)}}{\sin(x-1) + 2^x} = -\frac{5}{2}$$

Questa funzione NON ha nessun tipo di problema in $x=1$. Quindi è continua, dunque il limite è $f(1)$

MAT 1 TLC

Titolo nota

ORA 17

14/10/2006

Strumenti per limiti di funzioni:

- * confronto a 2 e carabinieri
- * teoremi alg. (somma, prodotto, esponenziale): funziona tutto bene tranne nei casi

$$+\infty - \infty, 0 \cdot (\pm\infty), \frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, 0^0, 1^{\pm\infty}, (\pm\infty)^0$$

Inoltre: attenzione quando c'è 0 al denomin. (0^+ , 0^-)

- * Il rapporto non ha molto senso per i limiti di funz.
- * La radice va bene, ma solo quando $x \rightarrow +\infty$

LIMITI NOTEVOLI

PADRI: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

FIGLI: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$

NIPOTI: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a = \log_e a = \ln a$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

ALTRO FIGLIO $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Cambio di variabili nei limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{Dato per buono}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2}$$

Pongo $x^2 = y$. Quando $x \rightarrow 0$, anche $y \rightarrow 0$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{\sin x}$$

Pongo $y = \sin x$. Quando $x \rightarrow 0$, anche $y \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\cos x)}{\cos x}$$

Pongo $y = \cos x$. Quando $x \rightarrow 0$, si ha che $y \rightarrow 1 = \cos 0$

$$= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\sin y}{y} = \sin 1 \quad \left[\frac{\sin y}{y} \text{ è continua in } y=1 \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}}_{\substack{\downarrow \text{PATTO} \\ \downarrow \text{PRIMA} \\ 1}} \cdot \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\substack{\downarrow \text{PADRE} \\ \downarrow \\ 1}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

$-1 \leq \sin x \leq 1$ Divido per $x > 0$

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

stesso motivo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

$-1 \leq \cos x \leq 1$ Divido per $x < 0$ dunque giro i versi!

$$-\frac{1}{x} \geq \frac{\cos x}{x} \geq \frac{1}{x} \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x} \quad \text{N.E.}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{x} \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{x} \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$$

CRITERIO FUNZIONI $\rightarrow$ SUCC.

Le funzioni aiutano le successioni

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

Pongo $\frac{1}{n} = x$. Quando $n \rightarrow +\infty$,
ho che $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Dico che è 1
quello iniziale

Se il limite di funzioni ottenuto dà un certo $l \in \mathbb{R}$,
allora il limite di succ. iniziale è lo stesso l .

Se il limite di funzioni non esiste, NON SI PUÒ DIRE NULLA
(il limite di succ. potrebbe esistere).

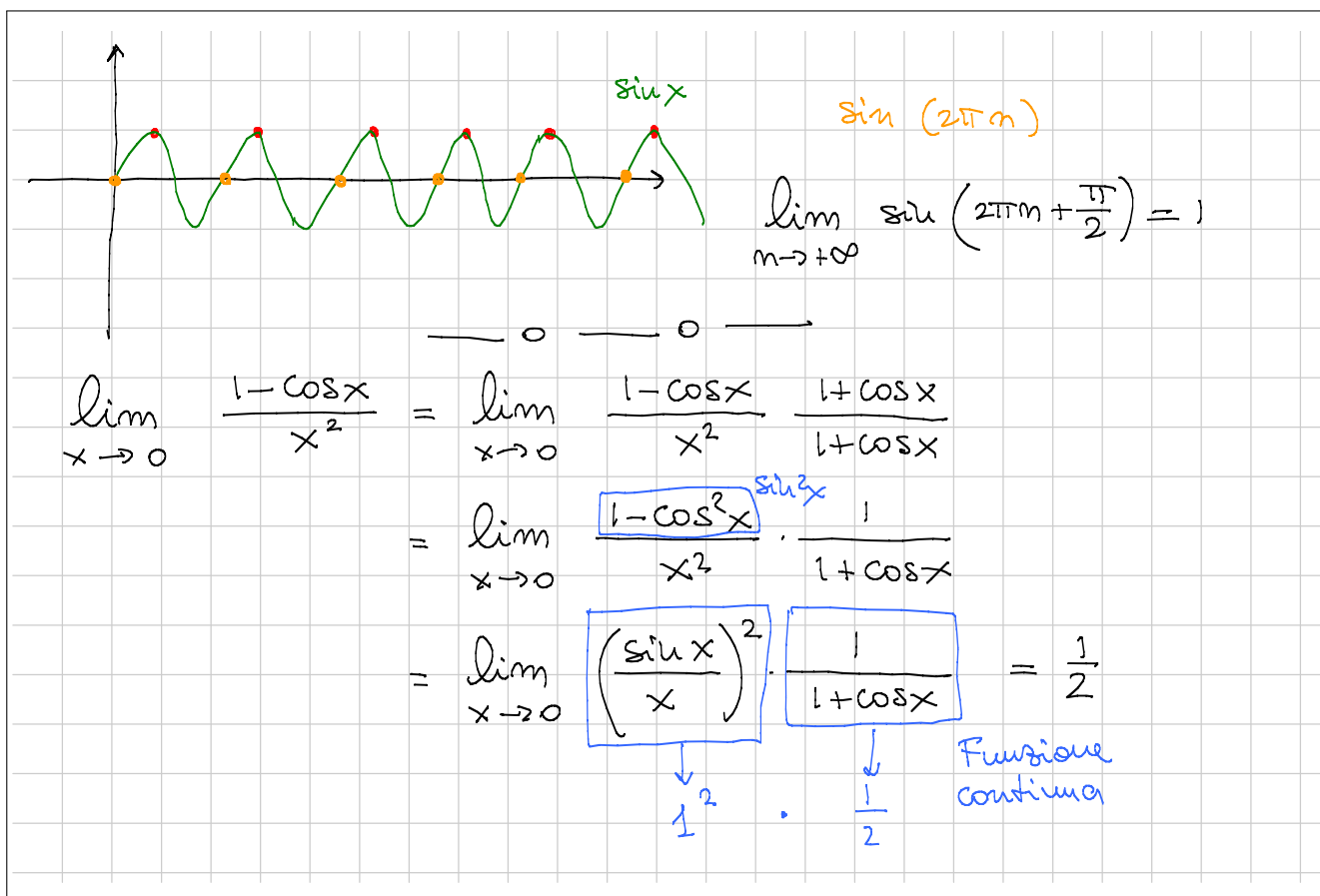
Esempio $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x \quad \text{N.E.}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(2\pi n) =$$

Pongo $x = 2\pi n$. Quando $n \rightarrow +\infty$,
ho che $x \rightarrow +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ $\nexists$ Questo non esiste, dunque
l'uguaglianza non è detta

In fatti $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(2\pi n) = 0$ $\leftarrow$ Tutti i termini della
succ. sono $= 0$



$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cdot \cos x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} =$

Pongo $y = \arctan x$. Quando $x \rightarrow 0$,
 ho che $y \rightarrow 0 = \arctan 0$.

Inoltre $x = \tan y$ (siamo nella zona
 in cui si può fare)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} =$

Pongo $y = \arcsin x$ ----

$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Pongo $y = -x$. Quando $x \rightarrow -\infty$,
ho che $y \rightarrow +\infty$. Inoltre $x = -y$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^y =$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right) = e$$

Posto
 $y-1 = z$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = e$$

Teo.
alg.

1

MAT 1 TLC

ORA 18

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{Quindi} \quad \left[\text{è come se avessi fatto } y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right] = 1 = \log e$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 \quad \text{Pongo } \frac{1}{x} = y. \text{ Quando } x \rightarrow +\infty, \text{ ho che } y \rightarrow 0^+. \text{ Inoltre } x = \frac{1}{y}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y} \log(1+y) = 1$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{y} \log(1+y) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \log \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right] = \log e = 1$$

↓
e anche per
 $x \rightarrow -\infty$

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x}$$

$$\text{Pongo } \log(1+x) = y.$$

$$\text{Quando } x \rightarrow 0, \text{ ho che } y \rightarrow \log 1 = 0.$$

$$\text{Inoltre } 1+x = e^y, \text{ quindi } x = e^y - 1$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1}$$

— 0 — 0 —

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Perché? Non ve lo dico, ma si deduce con passaggi opportuni dall'analogo limite con le succ.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1. \text{ Supponiamo di sapere che}$$

$$\sin x \leq x \leq \tan x \quad \text{per ogni } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Divido per $\sin x$
Guadagno i
versi

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

Quando $x \rightarrow 0^+$,
entra in questa zona.

$$\frac{\tan x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin x}$$

Per $x \rightarrow 0^-$. La funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ è pari.

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x)$$

sin è
DISPARI

Se $f(x)$ è pari, allora $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \text{Pongo } y = -x. \text{ Quando } x \rightarrow 0^-, \text{ ho che } y \rightarrow 0^+$$

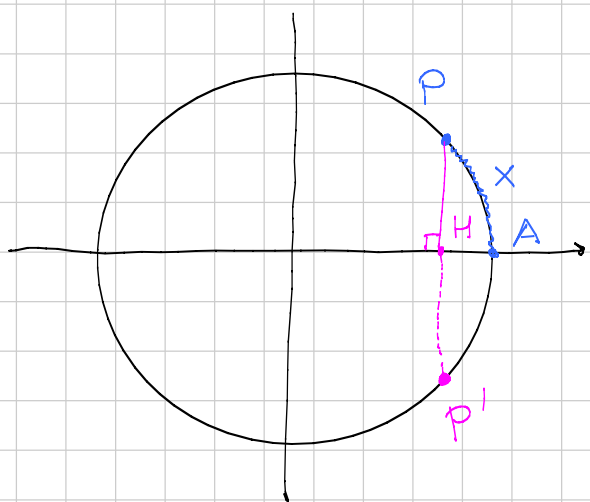
$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} f(-y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} f(y)$$

f è PARI

Es. f dispari $\Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

Resta da dimostrare che $\sin x \leq x \leq \tan x \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$



$x = \text{lunghezza arco AP}$

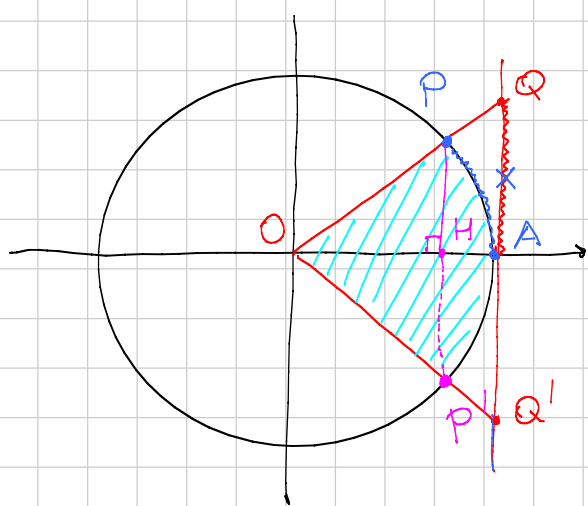
$\sin x = \text{lunghezza di PH}$

$2x = \text{lunghezza arco PP'}$

$2 \sin x = \text{lunghezza segmento PP'}$

$\text{segmento} \leq \text{arco}$

$$2 \sin x \leq 2x$$



$$\begin{aligned} \text{Area } OQQ' &= \frac{1}{2} QQ' \cdot OA \\ &= \frac{1}{2} 2 \tan x \cdot 1 \\ &= \tan x \end{aligned}$$

$$\text{Area Setto} = \frac{\pi \cdot 2x}{2\pi} = x$$

$$\begin{aligned} \text{Area Setto} &\leq \text{Area } OQQ' \\ x &\leq \tan x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Area Settore} : \text{Area Cerchio} &= \text{angolo settore} : 2\pi \\ \text{Area Setto} : \pi &= 2x : 2\pi \end{aligned}$$

Esercizio 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\tan x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \boxed{\frac{e^{\tan x} - 1}{\tan x}} \cdot \boxed{\frac{\tan x}{x}} = 1$$

$\downarrow y = \tan x$
 $y \rightarrow 0$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

$\downarrow 1$

Es. 2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^x}{\sin(\arctan x)} = -1$

$$\frac{\cos x - e^x}{\sin(\arctan x)} \cdot \frac{\arctan x}{\arctan x} \cdot \frac{x}{x}$$

$$\boxed{\frac{\arctan x}{\sin(\arctan x)}} \cdot \boxed{\frac{x}{\arctan x}} \cdot \boxed{\frac{\cos x - e^x}{x}} \rightarrow -1 \rightarrow -1$$

$\downarrow y = \arctan x$
 $y \rightarrow 0$

$\downarrow 1$

$$\frac{\cos x - 1 + 1 - e^x}{x}$$

$\downarrow$

$$\frac{\cos x - 1}{x} + \frac{1 - e^x}{x}$$

$$\boxed{x} \cdot \boxed{\frac{\cos x - 1}{x^2}} + \boxed{\frac{1 - e^x}{x}}$$

$\downarrow 0 \cdot -\frac{1}{2} + -1$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$$

$$\left[\frac{0}{0} \right]$$

Pongo $x - \frac{\pi}{2} = y$

Quando $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$, ho che $y \rightarrow 0$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right)}{y}$$

[Percorso:
archi
associati]

$$x = \frac{\pi}{2} + y$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\sin y}{y} = -1,$$

MAT 1 TLC

Titolo nota

ORA 19

17/10/2006

o piccolo

Def. Siano f e g due funzioni $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Sia $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$. Diciamo che f è o piccolo di g per $x \rightarrow x_0$ (e scriviamo

$$f = o(g) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

se esiste una funzione $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & f(x) = g(x) \cdot w(x) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \\ \text{(ii)} \quad & \lim_{x \rightarrow x_0} w(x) = 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} f = g \cdot \\ \text{funzione} \\ \text{che tende} \\ \text{a zero} \end{array} \right\}$$

Definizione quasi equivalente. Supponiamo di poter dividere per $g(x)$, cioè che $g(x) \neq 0$ almeno per $x \neq x_0$.

Allora

$$\text{(i)} \quad \text{si riscrive come } w(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\text{(ii)} \quad \text{si riscrive come } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Oss. Supponiamo per un momento che f e g tendano a 0 per $x \rightarrow x_0$. Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{sarebbe una forma } \frac{0}{0}.$$

La (ii) ci dice che f "batte g ".

Quindi, detto brutalmente, $f = o(g)$ per $x \rightarrow x_0$ vuol dire
 "f tende a zero $\uparrow$ + velocemente di g per $x \rightarrow x_0$ "

perché in realtà non è detto che f e g tendano a zero, e non è detto che si possa dividere per g.

Esempi [1] $x^3 = o(x)$ per $x \rightarrow 0$ VERA

$\uparrow$
 $f(x)$ $\uparrow$
 $g(x)$

Devo poter scrivere

$$f(x) = g(x) \cdot w(x) \quad \text{con} \quad \lim_{x \rightarrow 0} w(x) = 0$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 $x^3 = x \cdot x^2$ $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

[2] $x^2 = o(\sin x)$ per $x \rightarrow 0$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $f(x)$ $g(x)$

$$f(x) = g(x) \cdot w(x)$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 $x^2 = \sin x \cdot \frac{x^2}{\sin x}$

definita almeno per
 x vicini a 0 e diversi
 da 0

Calcolo

$$\lim_{x \rightarrow 0} w(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \boxed{x} \cdot \boxed{\frac{x}{\sin x}} = 0$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 0 1

[3] $\sin x = o\left(\frac{1}{x}\right)$ per $x \rightarrow 0$? SI, VERA

$$f(x) = g(x) \cdot w(x)$$

$$\sin x = \frac{1}{x} \cdot x \sin x$$

N.B. $g(x)$ non tende a zero per $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} w(x) = 0 \cdot 0$$

Operazioni algebriche su o piccolo.

Supponiamo che $f_1 = o(g)$ per $x \rightarrow x_0$

$f_2 = o(g)$ per $x \rightarrow x_0$

Cosa possiamo dire di $f_1 \pm f_2$, λf_1 , $f_1 \cdot f_2$, $\frac{f_1}{f_2}$, ...

H.p. $f_1(x) = g(x) \cdot \omega_1(x)$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \omega_1(x) = 0$

$f_2(x) = g(x) \cdot \omega_2(x)$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \omega_2(x) = 0$

$$f_1(x) + f_2(x) = g(x) \underbrace{\{\omega_1(x) + \omega_2(x)\}}_{\omega_3(x)} = g(x) \omega_3(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \omega_3(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\omega_1(x) + \omega_2(x)) = 0 + 0 = 0$$

Conclusione $f_1 + f_2 = o(g)$. Allo stesso modo $f_1 - f_2 = o(g)$

$$o(g) + o(g) = o(g)$$

$$o(g) - o(g) = o(g)$$

$$\begin{aligned} f_1(x) \cdot f_2(x) &= g(x) \omega_1(x) \cdot g(x) \cdot \omega_2(x) \\ &= g^2(x) \underbrace{\omega_1(x) \cdot \omega_2(x)}_{\omega_3(x)} = g^2(x) \cdot \omega_3(x) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \omega_3(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\omega_1(x) \cdot \omega_2(x)) = 0 \cdot 0 = 0$$

Conclusione $f_1 \cdot f_2 = o(g^2)$ $o(g) \cdot o(g) = o(g^2)$

Dato un numero $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda f_1(x) = \lambda g(x) \omega_1(x) = g(x) \cdot \underbrace{\lambda \omega_1(x)}_{\omega_3(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \omega_3(x) = \lambda \cdot 0 = 0$$

Conseguenza $\lambda f_1 = o(g)$

$$\lambda o(g) = o(g)$$

Rapporto $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\cancel{g(x)} \omega_1(x)}{\cancel{g(x)} \omega_2(x)} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\omega_1(x)}{\omega_2(x)} \hat{=} \frac{0}{0}$

$$\frac{o(g)}{o(g)} = \text{BOH !!!}$$

e non ci sono elementi per decidere

Supponiamo che $f(x) = o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$.

Posso concludere che $f(x) = o(x)$ per $x \rightarrow 0$? SI

$$\boxed{o(x^3) \Rightarrow o(x)}$$

Hp $f(x) = x^3 \omega(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \omega(x) = 0$$

$$= x \underbrace{(x^2 \omega(x))}_{\omega_3(x)}$$

$$= x \cdot \omega_3(x)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \omega_3(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \omega(x) \\ &= 0 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

SVILUPPINI Limiti notevoli e o piccolo. Tutti per $x \rightarrow 0$

$$\sin x = x + o(x)$$

$$\cos x = 1 + o(x)$$

$$\tan x = x + o(x)$$

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

$$\log(1+x) = x + o(x)$$

$$\arctan x = x + o(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\sin x = x + o(x)$$

$$\underbrace{\sin x - x}_{f(x)} = \underbrace{o(x)}_{g(x)} \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$f(x) = g(x) \cdot \omega(x)$ oppure,
visto che posso dividere per $g(x)$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$e^x = 1 + x + o(x) \quad \text{vuol dire che} \quad e^x - 1 - x = o(x)$$

Dividendo per $g(x) = x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} - 1 \right) = 1 - 1 = 0$$

Per esercizio verificare le altre.

Oss. Supponiamo che $f(x) = o(x)$ per $x \rightarrow 0$.

$$\text{Cosa posso dire di } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} \omega(x)}{\cancel{x}} = 0$$

$$\text{Brutalmente} \quad \frac{o(x)}{x} \rightarrow 0, \quad \frac{o(x^2)}{x^2} \rightarrow 0$$

Esempio

$$\sin x^2 = o(x)$$

VERA

$$f(x) = g(x) \cdot \omega(x)$$

$$\sin x^2 = x \cdot \frac{\sin^4 x^2}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x^2}{x^2} \cdot \boxed{x} \right] = 0$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 1 0

Esempio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + e^x - \cos x + \arctan x^2}{\log(1+3x) - 5x} = -1$$

Per es:

$$o(3x) = o(x)$$

$$= \frac{x + o(x) + \cancel{1} + x + o(x) - \cancel{1} - o(x) + o(x)}{3x + o(3x) - 5x} = \frac{2x + o(x)}{-2x + o(x)}$$

$$= \frac{\cancel{x} \left(2 + \frac{o(x)}{x} \right)}{\cancel{x} \left(-2 + \frac{o(x)}{x} \right)} \rightarrow \frac{2}{-2} = -1$$

MAT 1 TLC

ORA 20

Come dimostrare che un limite di funzioni non esiste

Ci si basa sul criterio FUNZIONI $\rightarrow$ SUCCESSIONI). Supponiamo

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$. Sia a_n una qualunque succ. b.c.
 $a_n \rightarrow x_0$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ (stesso l)
 $\uparrow$
 Pongo $a_n = x$
 Quando $n \rightarrow +\infty$,
 ho che $x \rightarrow x_0$

Supponiamo che esistano 2 successioni $a_n \rightarrow x_0$
 $b_n \rightarrow x_0$

e supponiamo che

$f(a_n) \rightarrow l_1 \in \bar{\mathbb{R}}$ $l_1 \neq l_2$.

$f(b_n) \rightarrow l_2 \in \bar{\mathbb{R}}$

Allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ non esiste (se esistesse e fosse un certo l , dovrei avere $l = l_1 = l_2$).

Esempio $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{x}$ non esiste.

Dim. Devo trovare 2 succ. $a_n \rightarrow 0^+$ b.c.
 $b_n \rightarrow 0^+$

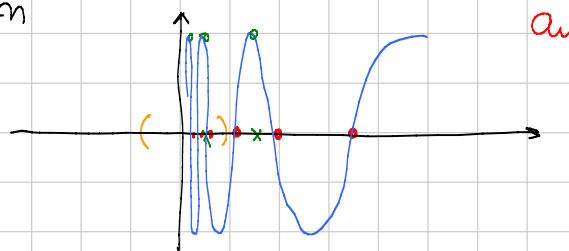
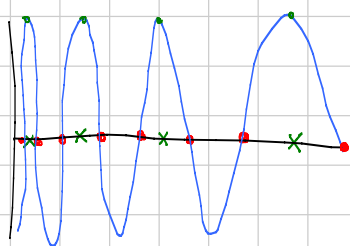
$$\sin \frac{1}{a_n} \rightarrow l_1 \quad \sin \frac{1}{b_n} \rightarrow l_2 \quad l_1 \neq l_2$$

Cerco a_n in modo che sia $\sin \frac{1}{a_n} = 0$, cioè $\frac{1}{a_n} = \pi n$

Quindi $a_n = \frac{1}{\pi n} \rightarrow 0^+$.

Cerco b_n in modo che sia $\sin \frac{1}{b_n} = 1$, cioè $\frac{1}{b_n} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$

quindi $b_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \rightarrow 0^+$



Esercizi misti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+27} - \sqrt{x+25} \quad [\infty - \infty]$$

$$\left(\frac{A}{\sqrt{x+27}} - \frac{B}{\sqrt{x+25}} \right) \frac{\sqrt{x+27} + \sqrt{x+25}}{\sqrt{x+27} + \sqrt{x+25}} = \frac{A^2 - B^2}{\sqrt{x+27} + \sqrt{x+25}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x+27} + \sqrt{x+25}} \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} = 0 \quad (A-B)(A^2+AB+B^2) = A^3-B^3$$

$$\begin{array}{c} \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} \\ A - B \end{array} \quad \frac{\sqrt[3]{\dots} + \sqrt[3]{\dots} + \sqrt[3]{\dots}}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x(x+1)} + \sqrt[3]{x^2}} = \frac{\cancel{x+1} - \cancel{x}}{\sqrt[3]{\dots} + \sqrt[3]{\dots} + \sqrt[3]{\dots}} = \frac{0}{0}$$

$\begin{array}{ccc} A^2 & + & AB & + & B^2 \end{array}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt[3]{x}$$

Raccolgo $\sqrt{x}$

$$\begin{aligned} & \sqrt{x} \left(\frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} \right) \\ &= \sqrt{x} \left(\sqrt{1 + \frac{5}{x}} - \frac{1}{x^{1/6}} \right) \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

$\frac{x^{1/3}}{x^{1/2}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}} = \frac{1}{x^{1/6}}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! \cdot 2^n}{n^n} = a_n$$

Applico criterio radice

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n! \cdot 2^n}{n^n}} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \cdot 2 \rightarrow \frac{2}{e}$$

$\downarrow \frac{1}{e}$

$$\sqrt[n]{a_n} \rightarrow \frac{2}{e} < 1 \Rightarrow a_n \rightarrow 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! \cdot 3^n}{n^n}$$

$$\text{Radice } \sqrt[n]{a_n} \rightarrow \frac{3}{e} > 1 \Rightarrow a_n \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! (2n)!}{(3n)!} = a_n$$

Rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)! (2n+2)!}{(3n+3)!} \cdot \frac{(3n)!}{n! (2n)!} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(n+1)! (2n+2)!}{(3n+3)!} \cdot \frac{(3n)!}{n! (2n)!} \\
 &= \frac{(n+1) \cancel{n!} (2n+2) (2n+1) \cancel{(2n)!}}{(3n+3) (3n+2) (3n+1) \cancel{(3n)!}} \cdot \frac{\cancel{(3n)!}}{\cancel{n!} \cancel{(2n)!}} \xrightarrow{\frac{4n^2}{27n^2}} \frac{4}{27} < 1 \\
 &\Rightarrow a_n \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2n+2)! &= \text{prodotto degli interi pos. fino a } 2n+2 \\
 &= (2n+2)(2n+1) \underbrace{(2n)(2n-1) \cdots (2n-2) \cdots 1}_{(2n)!}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n! (2n)!}{(3n)!}} = \frac{4}{27} \quad a_n$$

RAPPORTO $\rightarrow$ RADICE

$$\text{Se } \frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l, \text{ allora } \sqrt[n]{a_n} \rightarrow l$$

$$\text{Fatto prima } \frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \frac{4}{27} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \rightarrow \frac{4}{27}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{5^n + n^5}{3^n + n^2}} &= \frac{5}{3} \\
 \sqrt[n]{\frac{5^n \left(1 + \frac{n^5}{5^n}\right)}{3^n \left(1 + \frac{n^2}{3^n}\right)}} &= \frac{5}{3} \left(\frac{1 + \frac{\frac{n^5}{5^n}}{5^n}}{1 + \frac{\frac{n^2}{3^n}}{3^n}} \right)^{\frac{1}{n}} \rightarrow \left(\frac{1}{1}\right)^0 = 1
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{x^8} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\log x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(5^x + x^5)}{x}$$

Brutalmente $\frac{\log(5^x)}{x} =$

$$= \frac{\cancel{x} \log 5}{\cancel{x}} = \log 5$$

Rigoroso

$$\frac{\log 5^x \left(1 + \frac{x^5}{5^x}\right)}{x} = \frac{\log 5^x + \log \left(1 + \frac{x^5}{5^x}\right)}{x} = \frac{x \log 5 + \log \left(1 + \frac{x^5}{5^x}\right)}{x}$$

$$= \frac{\cancel{x} \left(\log 5 + \frac{\log \left(1 + \frac{x^5}{5^x}\right)}{x} \right)}{\cancel{x}} \rightarrow \frac{\log 1}{\infty} = \frac{0}{\infty} = 0 \rightarrow \log 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^{200}}$$

$$x^{200} = e^{\boxed{\dots}} = \log x^{(200)} = 200 \log x$$

$$\frac{e^{\sqrt{x}}}{x^{200}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{e^{200 \log x}} = e^{\sqrt{x} - 200 \log x} \rightarrow e^{+\infty} = +\infty$$

Basta fare il limite dell'esponente

$$\sqrt{x} - 200 \log x = \underbrace{\sqrt{x}}_{+\infty} \left(1 - 200 \frac{\log x}{\sqrt{x}} \right) = +\infty - 1 = +\infty$$

MAT 1 TLC

ORA 21

Titolo nota

18/10/2006

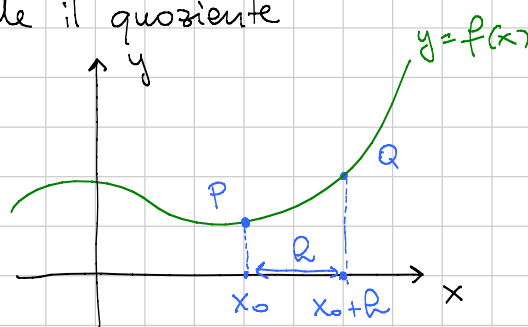
Derivata e differenziale in una variabile

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

Fissiamo $h \neq 0$ (incremento)Def. Si dice rapporto incrementale il quoziente

$$\begin{array}{l} \text{consig.} \\ \text{incremento } y \rightarrow f(x_0+h) - f(x_0) \\ \text{incremento della } x \rightarrow h \end{array} \quad \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$P: (x_0, f(x_0)), \quad Q: (x_0+h, f(x_0+h))$$



Geometricamente il rapporto incrementale è il coeff. angol. della retta passante per P e Q.

Def. f si dice DERIVABILE in x_0 se esiste il limite del rapp. increm. per $h \rightarrow 0$, cioè se esiste ed è $\in \mathbb{R}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Il valore del limite si dice DERIVATA di f in x_0 e si indica in uno dei seguenti modi

$$f'(x_0)$$

$$\frac{df}{dx}(x_0)$$

$$\dot{f}(x_0)$$

Geometricamente, quando $h \rightarrow 0$, il punto Q tende al punto P e la retta PQ tende a diventare la retta tangente al grafico nel punto P.

$$\begin{array}{ccc} \text{Rapporto incrementi} & \longrightarrow & f'(x_0) \\ || & & || \end{array}$$

Coef. ang. retta PQ

Coef. ang. retta tg.

retta PQ $\longrightarrow$ retta tangente in P

— o — o —

Def. f si dice DIFFERENZIABILE in x_0 se esiste un numero $\alpha \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha h + o(h) \quad \text{per } h \rightarrow 0$$

Teorema f è differenziabile in $x_0 \Leftrightarrow f$ è derivabile in x_0 .
Inoltre $\alpha = f'(x_0)$.

Dim che se f è differenziabile, allora f è derivabile

Hp f diff., cioè $f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha h + o(h)$ per $h \rightarrow 0$

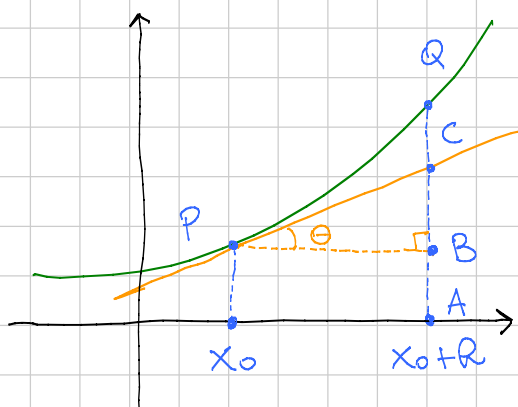
Tesi f deriv., cioè esiste lim. del rapp. increment.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{f(x_0)} + \alpha h + o(h) - \cancel{f(x_0)}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\alpha + \frac{o(h)}{h} \right) = \alpha = f'(x_0)$$

$\downarrow$
 0

L'altra implicazione si dimostra allo stesso modo.



Per trigonometria elementare

$$\frac{CB}{PB} = \tan \theta = \text{coeff. ang. retta tg} = f'(x_0)$$

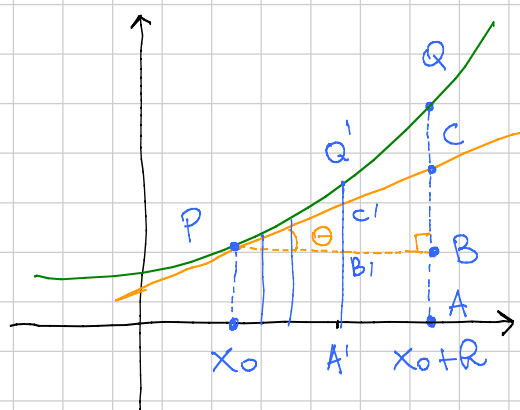
$$CB = f'(x_0) \cdot PB = f'(x_0) \cdot R$$

$$AQ = AB + BC + CQ$$

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + R \cdot f'(x_0) + \boxed{o(R)}$$

???

Facciamo $R \rightarrow 0$, Il pezzo AB non cambia. Il pezzo BC tende a zero in maniera proporzionale ad R (linearmente in R).



Il pezzo CQ tende a zero più velocemente di R, e dunque il terzo pezzo è $o(R)$.

Equazione retta tangente.

È una retta che passa per $P(x_0, f(x_0))$ e ha coeff. ang. $f'(x_0)$

$$y - f(x_0) = f'(x_0) (x - x_0)$$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Se $x - x_0$ lo chiamiamo h : $y = f(x_0) + f'(x_0)h$

↑ ↑
primi 2 pezzi dello
sviluppo precedente

Interpretazione geometrica; la retta tangente è quella retta che approssima il grafico per x vicini ad x_0 con un errore che è $o(x - x_0)$.

Teorema Se f e g sono deriv. in x_0 , allora $(f+g)$ è deriv. in x_0 e

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Dim. Per ipotesi sappiamo

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h) \Leftrightarrow f \text{ deriv.}$$

$$g(x_0+h) = g(x_0) + g'(x_0)h + o(h) \Leftrightarrow g \text{ deriv.}$$

Sommiamo

$$f(x_0+h) + g(x_0+h) = f(x_0) + g(x_0) + (f'(x_0) + g'(x_0))h + o(h)$$

Se chiamo $\Delta(x) = f(x) + g(x)$

$$\Delta(x_0+h) = \Delta(x_0) + \overset{\Delta'(x_0)}{(f'(x_0) + g'(x_0))}h + o(h)$$

Del tutto analogo il caso della differenza e anche del prodotto di una funzione per una costante.

$f(x), g(x)$. Chiamiamo $p(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$\begin{aligned}
 p(x_0 + h) &= f(x_0 + h) \cdot g(x_0 + h) \\
 &= (f(x_0) + h f'(x_0) + o(h)) \cdot (g(x_0) + h g'(x_0) + o(h)) \\
 &= f(x_0) \cdot g(x_0) + \\
 &\quad + h \underbrace{f(x_0) g'(x_0)}_{o(h)} + h \underbrace{f'(x_0) g(x_0)}_{o(h)} \\
 &\quad + \boxed{f(x_0) \cdot o(h)} + \boxed{h^2 f'(x_0) g'(x_0)} + \boxed{h f'(x_0) \cdot o(h)} \\
 &\quad + \dots
 \end{aligned}$$

$$= p(x_0) + h \underbrace{[f(x_0) g'(x_0) + f'(x_0) g(x_0)]}_{p'(x_0)} + o(h)$$

MAT 1 TLC

ORA 22

$$R^2 f'(x_0) g'(x_0) \stackrel{?}{=} o(R)$$

In generale $kR^2 = R \cdot \underbrace{kR}_{w(R)} \quad \lim_{R \rightarrow 0} w(R) = 0$
 $= o(R)$

$$R \cdot o(R) = o(R) \quad \text{per } R \rightarrow 0$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ R \cdot R w(R) = R \underbrace{(R w(R))}_{w_1(R) \rightarrow 0} = R w_1(R) \end{array}$$

Derivate delle funzioni elementari

① $f(x) = x^2 \quad x_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow 0} \frac{f(x_0+R) - f(x_0)}{R} &= \lim_{R \rightarrow 0} \frac{(x_0+R)^2 - x_0^2}{R} \\ &= \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\cancel{x_0^2} + 2x_0R + R^2 - \cancel{x_0^2}}{R} = \lim_{R \rightarrow 0} (2x_0 + R) = 2x_0 \end{aligned}$$

In alternativa:

$$\begin{aligned} f(x_0+R) &= (x_0+R)^2 = x_0^2 + 2x_0 \cdot R + R^2 \\ &= f(x_0) + \boxed{2x_0} \cdot R + o(R) \\ &\quad \quad \quad f'(x_0) \end{aligned}$$

(1.5) $f(x) = x^k$

$f'(x_0) = k x_0^{k-1}$ (si dim. per induzione usando la deriv. del prodotto).

(2) $f(x) = e^x$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} =$$

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^h - e^{x_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{x_0} \left(\frac{e^h - 1}{h} \right) = e^{x_0}$$

↓ limite
1 notevole

$$f(x_0+h) = e^{x_0+h} = e^{x_0} \cdot e^h = \text{[sviluppiamo]}$$

$$= e^{x_0} (1 + h + o(h))$$

$$= e^{x_0} + e^{x_0} \cdot h + e^{x_0} \cdot o(h)$$

$$= f(x_0) + \boxed{e^{x_0}} \cdot h + o(h)$$

$f'(x_0)$

(3) $f(x) = \sin x$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h}$$

1° modo: usare formule
per $\sin \alpha - \sin \beta$ con
 $\alpha = x_0+h$ e $\beta = x_0$

2° modo: usare formule
per $\sin(x_0+h)$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x_0 \cdot \cos h + \cos x_0 \cdot \sin h - \sin x_0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\underbrace{\cos x_0}_{\cos x_0} \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_1 + \underbrace{\sin x_0}_{\sin x_0} \cdot \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\frac{\cos h - 1}{h^2} \cdot h} \right) = \cos x_0$$

$\frac{\cos h - 1}{h^2} \cdot h \rightarrow \frac{\cos h - 1}{h^2} \rightarrow -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
 f(x_0 + h) &= \sin(x_0 + h) = \sin x_0 \cdot \cos h + \cos x_0 \cdot \sin h \\
 &= \sin x_0 (1 + o(h)) + \cos x_0 (h + o(h)) \\
 &= \sin x_0 + \underbrace{\sin x_0 \cdot o(h)}_{f'(x_0)} + \cos x_0 \cdot h + \underbrace{\cos x_0 \cdot o(h)}_{o(h)} \\
 &= f(x_0) + h \cdot \cos x_0 + o(h)
 \end{aligned}$$

[3.5] Da fare : derivata di $\cos x = f(x) \leadsto f'(x_0) = -\sin x_0$

[4] $f(x) = \log x$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x_0 + h) - \log(x_0)}{h} = \left[\log a - \log b = \log \frac{a}{b} \right]$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(\frac{x_0 + h}{x_0}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0} \cdot x_0} = \frac{1}{x_0}$$

se pongo $y = \frac{h}{x_0}$ diventa

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$$

$$\begin{aligned}
 (f \pm g)' &= f' \pm g' & (\lambda f)' &= \lambda f' \\
 \left(\frac{1}{f}\right)' &= -\frac{1}{f^2} \cdot f' & \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g - g'f}{g^2} \\
 \left(\frac{f}{g}\right)' &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' & & \text{poi teorema sul prodotto} \\
 [f(g(x))]' &= f'(g(x)) \cdot g'(x)
 \end{aligned}$$

Esempi di calcolo di derivate

$$\begin{aligned}
 (\sin x)' &= \cos x & (\cos x)' &= -\sin x & (e^x)' &= e^x \\
 (\log x)' &= \frac{1}{x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad f(x) &= \tan x & \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\
 (\tan x)' &= \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
 &= \begin{array}{l} \nearrow 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \\ \searrow \frac{1}{\cos^2 x} \end{array}
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \sin(x^2) \qquad f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = \cos(e^x) \qquad f'(x) = -\sin(e^x) \cdot e^x$$

$$\textcircled{4} \quad f(x) = e^{\cos x} \qquad f'(x) = e^{\cos x} \cdot (-\sin x)$$

$$\textcircled{5} \quad f(x) = e^x \cdot \cos x \quad f'(x) = e^x \cdot \cos x + e^x (-\sin x) \\ = e^x (\cos x - \sin x)$$

$$\textcircled{6} \quad f(x) = \sin^3(x^2) = 3 \sin^2(x^2) \cdot \cos(x^2) \cdot 2x$$

$\uparrow$ + esterna, $\uparrow$ intermedia $\uparrow$ più interna
 cioè il cubo cioè il sin cioè x^2

$$\textcircled{7} \quad f(x) = (\sin x)^x$$

$$\textcircled{8} \quad f(x) = \boxed{5^x} = e^{\log(5^x)} = \boxed{e^{x \log 5}} \quad \text{STESSA COSA}$$

$$f'(x) = e^{x \log 5} \cdot \log 5 = 5^x \cdot \log 5$$

$$\textcircled{7} \quad f(x) = (\sin x)^x = e^{x \log(\sin x)}$$

$$f'(x) = e^{x \log(\sin x)} [x \log(\sin x)]'$$

$$= (\sin x)^x \cdot [x \log(\sin x)]'$$

$$= (\sin x)^x \cdot [\log(\sin x) + x (\log(\sin x))']$$

$$= (\sin x)^x \cdot [\log(\sin x) + x \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x]$$

$$[(\sin x)^x]' = x (\sin x)^{x-1} \cdot \cos x \quad \text{Nooo!!!!}$$

$$\textcircled{9} \quad f(x) = (\sin x)^k \quad f'(x) = k (\sin x)^{k-1} \cdot \cos x$$

$\uparrow$
 $\sin$

EspONENTE FISSO ok , con espONENTE variabile NO.

$$c(x) = f(g(x))$$

Hp $g(x_0+h) = g(x_0) + h g'(x_0) + o(h)$

Posto $y_0 = g(x_0)$, $f(y_0+k) = f(y_0) + k f'(y_0) + o(k)$

$$c(x_0+h) = f(g(x_0+h))$$

$$= f\left(g(x_0) + \underbrace{h g'(x_0) + o(h)}_{k}\right)$$

$$= f(y_0 + k)$$

$$= f(y_0) + \left[h g'(x_0) + o(h)\right] f'(y_0) + o\left[\left[h g'(x_0) + o(h)\right]^k\right]$$

$$= f(g(x_0)) + h \boxed{g'(x_0) f'(g(x_0))} + o(h) + o(h)$$

Resterebbe da fare che

$$o(h g'(x_0) + o(h)) \Rightarrow o(h)$$

MAT 1 TLC

ORA 23

$$o(hg'(x_0) + o(h)) \Rightarrow o(h)$$

$$(hg'(x_0) + o(h)) \omega_1(h) =$$

$$= (hg'(x_0) + h\omega_2(h)) \omega_1(h)$$

$$= h \underbrace{(g'(x_0) + \omega_2(h)) \omega_1(h)}_{\omega_3(h) \rightarrow 0 \text{ per } h \rightarrow 0} = o(h)$$

ESERCIZI

$$(1) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 3x} + x \quad [+\infty - \infty]$$

Pongo $y = -x$. Quando $x \rightarrow -\infty$, ho che $y \rightarrow +\infty$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{y^2 - 3y} - y$$

$$\left(\sqrt{y^2 - 3y} - y \right) \frac{\sqrt{y^2 - 3y} + y}{\sqrt{y^2 - 3y} + y} = \frac{y^2 - 3y - y^2}{\sqrt{y^2 - 3y} + y} =$$

$$= \frac{-3y}{\sqrt{y^2 - 3y} + y} = \frac{-3}{\cancel{y} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{3}{y}\right)} + 1 \right]} \rightarrow -\frac{3}{2}$$

② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \cos x}{x^2} = 1$ $\frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$

$$\frac{\sqrt{1+x^2} - \cos x + 1 - 1}{x^2} = \frac{1 - \cos x}{x^2} + \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2} \rightarrow 1$$

$\downarrow \frac{1}{2}$ $\downarrow \frac{1}{2}$

$$\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} + 1}{\sqrt{1+x^2} + 1} = \frac{\cancel{x^2} - 1}{\cancel{x^2} (\sqrt{1+x^2} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + 1} \rightarrow \frac{1}{2}$$

③ DA TABELLINA

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \log x = [0 \cdot (-\infty)]$$

Pongo $y = \log x$ $\nearrow x = e^y$. Quando $x \rightarrow 0^+$, ho che $y \rightarrow -\infty$

$$= \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y \cdot y$$

Pongo $z = -y$. Quando $y \rightarrow -\infty$, ho che $z \rightarrow +\infty$

$$= \lim_{z \rightarrow +\infty} e^{-z} \cdot (-z) = \lim_{z \rightarrow +\infty} -\frac{z}{e^z} = 0$$

$\uparrow$
potenza / esponente

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \log x = 0$. Non cambia anche se metto $x^a \cdot \log x$ $a > 0$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} \quad [0^0] = e^0 = 1,$$

$$x^{\sin x} = e^{\sin x \cdot \log x}$$

Basta fare il lim. dell'esponente,

$$\sin x \cdot \log x = \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{x \log x}_{\downarrow 0} \rightarrow 0$$

$$\textcircled{5} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\arctan \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\arctan \sqrt{x} \cdot \log x} = e^0 = 1$$

$$\arctan \sqrt{x} \cdot \log x = \underbrace{\frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}}}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{\sqrt{x} \log x}_{\downarrow 0, a=1/2} \rightarrow 0$$

$$\textcircled{6} \lim_{m \rightarrow +\infty} m^2 \arctan \frac{6m}{3m^3+5} = 2 \quad [+\infty \cdot \overset{0}{\arctan(0)}]$$

$$m^2 \arctan \frac{6m}{3m^3+5} = \underbrace{m^2}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{\arctan \frac{6m}{3m^3+5}}{\frac{6m}{3m^3+5}}}_{\downarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{6m}{3m^3+5}}_{\downarrow 0}$$

$$\frac{6m^3}{3m^3+5} \rightarrow 2$$

Pongo $x = \frac{6m}{3m^3+5}$
 $\dots x \rightarrow 0$

⑦ $\lim_{n \rightarrow +\infty} n (\sqrt[n]{37} - 1)$ $+\infty (1-1)$

$$n (\sqrt[n]{37} - 1) = n (37^{\frac{1}{n}} - 1) = n (e^{\frac{1}{n} \log 37} - 1)$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{n} \log 37} - 1}{\frac{1}{n} \log 37} \cdot \boxed{\log 37} = \log 37$$

$x = \frac{\log 37}{n} \rightarrow 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

⑧ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} (\sqrt[n]{n} - 1) = 0$ $[+\infty \cdot (1-1)]$

$$\sqrt{n} (n^{\frac{1}{n}} - 1) = \sqrt{n} (e^{\frac{1}{n} \log n} - 1)$$

$x = \frac{\log n}{n} \rightarrow 0$

$$= \frac{e^{\frac{1}{n} \log n} - 1}{\frac{\log n}{n}} \cdot \boxed{\frac{\log n}{n} \sqrt{n}} \rightarrow 0$$

$\frac{\log n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$

$$\textcircled{9} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} \quad [1^\infty]$$

$$(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2} \log(\cos x)} \rightarrow e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$\frac{\log(\cos x)}{x^2} = \frac{\log(1 + \cos x - 1)}{x^2} =$$

$$= \frac{\cos x - 1}{x^2} \cdot \frac{\log(1 + \cos x - 1)}{\cos x - 1} \rightarrow -\frac{1}{2}$$

$$\downarrow$$

$$-\frac{1}{2}$$

$$\parallel$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$$

Pongo $y = \cos x - 1$.

Quando $x \rightarrow 0$, ho che $y \rightarrow 0$

MAT 1 TLC

ORA 24

Titolo nota

19/10/2006

Derivabilità $\Rightarrow$ continuità
 $\nLeftarrow$

Derivata della funzione inversa (con esempi)
 — o —

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile in un p.to x_0 .
 Allora f è continua in x_0 .

Hp esiste $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ ed è $\in \mathbb{R}$

Tesi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, oppure equivalentemente

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$$

Pongo $x - x_0 = h$. Quando $x \rightarrow x_0$, ho che $h \rightarrow 0$ ($x = x_0 + h$)

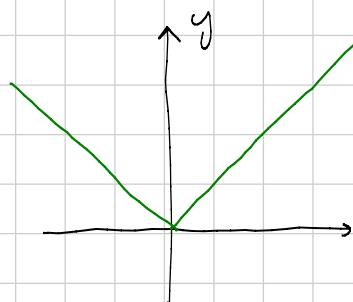
$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0+h) - f(x_0)) &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot h \right) = 0 \end{aligned}$$

$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$
 $f'(x_0) \quad \cdot \quad 0$
 — o — o —

f continua in $x_0 \stackrel{?}{\Rightarrow} f$ è derivabile in x_0
~~NO~~

Esempio $f(x) = |x|$

$x_0 = 0$. Per calcolare $f'(0)$,
 devo calcolare



NON
ESISTE

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h| - |0|}{h} = \boxed{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

Quando $h \rightarrow 0^-$, si ha che $h < 0$,
 dunque $|h| = -h$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Conclusione $f(x) = |x|$ è continua in $x_0 = 0$, ma non
 derivabile in $x_0 = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ \text{N.E.} & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{|x|}{x}$$

Esempio $f(x) = |\sin x^3|$ $x_0 = 0$

Esiste $f'(0)$??

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\sin h^3| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\sin h^3|}{h}$$

$$\frac{|\sin R^3|}{R} \rightarrow 0$$

Fatto generale :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = 0$$

Usando il fatto generale
per dimostrare che

TABELLINA

$$\frac{|\sin R^3|}{R} \rightarrow 0 \quad \text{mi basta dimostrare che} \quad \left| \frac{|\sin R^3|}{R} \right| \rightarrow 0$$

$$\left| \frac{|\sin R^3|}{R} \right| = \left| \frac{\sin R^3}{R} \right| = \left| \frac{\sin R^3}{R^3} \cdot R^2 \right| \rightarrow |0| = 0$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 1 0

Esempio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} \sin \frac{1}{x^2} = 0 \quad \frac{0}{0} \text{ - N.E.}$$

Uso il criterio di prima. Dico che il lim è 0. Per dim.
mi basta far vedere che $\lim | \cdot | = 0$

$$\left| \frac{\cos x - 1}{x} \sin \frac{1}{x^2} \right|$$

"

$$0 \leq \left| \frac{\cos x - 1}{x} \right| \cdot \left| \sin \frac{1}{x^2} \right| \leq \left| \frac{\cos x - 1}{x} \right| = \left| \frac{\cos x - 1}{x^2} \cdot x \right|$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 0 0 0

$\uparrow$ $\uparrow$
 $-\frac{1}{2}$ 0

Derivata Funzione inversa

Sia f una funzione e sia g la sua inversa. Allora

$$g(f(x)) = x$$

$\forall x \in$ insieme di partenza
di f

$$f(g(x)) = x$$

$\forall x \in$ insieme di partenza di g
= insieme di arrivo di f

Prendiamo $x_0 \in \mathbb{R}$ e supponiamo di poter derivare f e g

$$f(g(x)) = x \quad \text{Derivando...} \quad f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1$$

Quindi

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

FORMULA RICAVALTA SUPPONENDO
CHE f e g siano DERIVABILI
e $f'(g(x)) \neq 0$

Applicazioni:

$$\boxed{1} \quad f(x) = \tan x \quad g(x) = \arctan x$$

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x$$

$$g'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(g(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)}$$

Uso
FORMULA
DATA

$$= \frac{1}{1 + x^2}$$

Nessun problema
di annullamento
del den.

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

[2] $f(x) = e^x, f'(x) = e^x$ $g(x) = \log x$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{e^{g(x)}} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}$$

NESSUN PROBLEMA PER $x > 0$ dove $\log$ è definito

[3] $f(x) = \sin x, f'(x) = \cos x$, $g(x) = \arcsin x$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\cos(g(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

↑
vale solo se $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

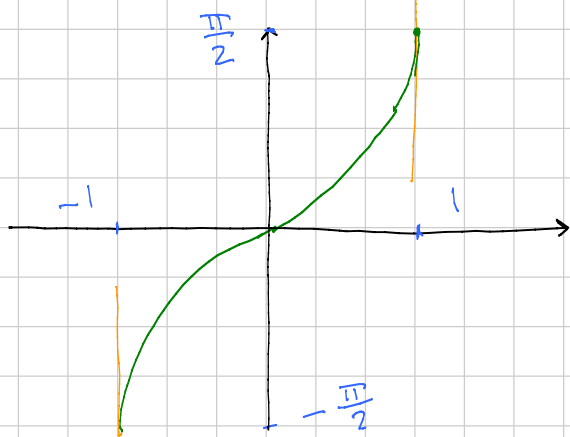
$$\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(g(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Problemi per $x < -1$ e $x > 1$, ma già sappiamo che $x \in [-1, 1]$

Ho usato la formula con $\alpha = g(x) = \arcsin x$ e questo, per definizione, sposta valori in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

I problemi ci sono per $x = \pm 1$. In quei punti $\arcsin x$ è definito e continuo, ma non derivabile.



Geometricamente: la tg. al grafico in $x=1$ e $x=-1$ è verticale.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty$$

Es. Fone
stessa cosa
con $\cos x$
 $\arccos x$

MAT 1 TLC

ORA 25

Derivate successive

$$f'' = (f')'$$
 derivata SECONDA

$$f''' = (f'')'$$
 - -

$$f''$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2}$$

$$\ddot{f}$$

$$f'''$$

$$\frac{d^3 f}{dx^3}$$

FINE
CORSODerivata
127-esima

$$f^{(127)}$$

$$\frac{d^{127} f}{dx^{127}}$$

$$\frac{d^{127} f}{dx^{127}}$$

$$f^{(127)}$$

$$f^{(k)}$$

TEOREMA DI DE L'HÔPITAL

Supponiamo di voler calcolare $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ ($x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$)

Supponiamo che

(i) un po' di burocrazia...

$g(x) \neq 0$ vicino a x_0 (tranne al
+ in x_0)
 $\rightarrow f'(x)$ e $g'(x)$ devono esistere
 $\rightarrow g'(x) \neq 0$ bla bla...

(ii) il limite sia del tipo

$$\frac{0}{0} \quad \text{oppure} \quad \frac{\pm \infty}{\pm \infty}$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \bar{\mathbb{R}} \quad (\text{ESCLUSO QUINDI IL TIPO } \textcircled{4})$$

Allora $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$

Esempio 1

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{x}$$

NO: non è una forma indeterminata

Applico De L'Hôpital

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin x}{1} = 0$$

 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

Infatti $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{x} = +\infty$

NO: il limite è $\frac{\infty}{\infty}$, maEsempio 2

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sin x}{x}$$

lim $\frac{f'}{g'}$ N.E.. Allora BOH.

Applico De L'Hôpital

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \cos x}{1} = \text{N.E.}$$

Non si può

applicare

dunque non esiste il limite iniziale

Infatti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{\sin x}{x} \right) = 2$$

— 0 — 0 —

Hôp

Esempio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \stackrel{\text{Hôp}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

Ho usato che la derivata di $\sin x$ è $\cos x$, ma per dimostrare questo si era usato quello stesso limite.

Esempio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x + x^5}{x^3} \quad \left[\frac{0}{0} \text{ uso H\ddot{o}p.} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + 5x^4}{3x^2} \quad \left[\frac{0}{0} \text{ uso H\ddot{o}p.} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 20x^3}{6x} \quad \left[\frac{0}{0} \text{ uso H\ddot{o}p.} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 60x^2}{6} = \frac{1}{6}$$

Risultando, il limite
originario è $\frac{1}{6}$

Altro
modo:

$$\frac{x - \sin x + x^5}{x^3} = \frac{x \left(1 - \frac{\sin x}{x} + x^4 \right)}{x^3}$$

$$= \frac{\cancel{x} (\cancel{x} - \cancel{x} + x^4)}{x^{\cancel{3}2}} = \frac{x^4}{x^2} = x^2 \rightarrow 0$$

NO!!!!

LIMITE METÀ
PER VOLTA

Utilità pratica di De L'Hôpital
per il calcolo dei limiti:

3%

Esempi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{x} = 0 \quad \left[\frac{0}{+\infty} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) = \infty \cdot 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x}{\frac{1}{x}} \quad \left[\frac{0}{0} : \text{H\^opital} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1$$

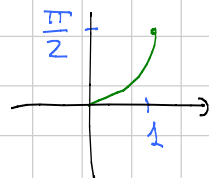
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{\pi}{2} - \arctan n \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)$$

↑
 Applico criterio
 funzioni $\rightarrow$ succ.
 (pongo $x = n$,
 quando $n \rightarrow +\infty$,
 anche $x \rightarrow +\infty$)

|| H\^op
 1

Esempio

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{x-1}$$



$\frac{0}{0} : \text{H\^op}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{\sqrt{1-x}} = \sqrt{2} \quad \left[\frac{0}{0} \Rightarrow \text{H\^op} \right]$$

N.B. Quando $x \rightarrow 1^-$, questo è > 0

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{2\sqrt{1-x}}} =$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{1-x})' &= ((1-x)^{1/2})' \\ &= \frac{1}{2} (1-x)^{-1/2} \cdot (-1) \\ &\quad \uparrow \\ &\text{Der. di } 1-x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 \sqrt{\frac{1-x}{1-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 \sqrt{\frac{1-x}{(1+x)(1-x)}} \\ &= 2 \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{n!} - (n!)^n$$

$$n^{n!} - (n!)^n = \boxed{n^{n!}} \left(1 - \frac{(n!)^n}{n^{n!}} \right) \rightarrow +\infty$$

$\downarrow$ $+\infty$ $\downarrow$ 0 DA DIMOSTRARE

DISUG. UTILE

$$n! \leq n^n$$

$n \cdot (n-1) \cdot \dots$ $n \cdot n \cdot \dots \cdot n$

$$0 \leq \frac{(n!)^n}{n^{n!}} \leq \frac{(n^n)^n}{n^{n!}} = \frac{n^{n^2}}{n^{n!}} = \frac{1}{n^{n! - n^2}} \rightarrow 0$$

MAT 1 TLC

Titolo nota

ORA 26

24/10/2006

Formula di Taylor

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $n \in \mathbb{N}$. Sotto opportune ipotesi su f [esistenza delle prime n derivate] esiste un unico polinomio $P_n(x)$ di grado $\leq n$ tale che

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

ERRORE / RESTO DI PEANO

[Si può approssimare $f(x)$ con un polinomio $P_n(x)$ commettendo un errore che è $o(x^n)$, dunque "piccolo" quando $x \rightarrow 0$]

Il polinomio $P_n(x)$ è dato dalla formula

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Dimm. nel caso $n=3$ $P_3(x)$

Devo dim. che $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + o(x^3)$

il che equivale a dim. che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x - \frac{f''(0)}{2}x^2 - \frac{f'''(0)}{6}x^3}{x^3} = 0$$

Il limite è $\frac{f(0) - f(0)}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{H\ddot{o}p}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0) - f''(0)x - \frac{f'''(0)}{2}x^2}{3x^2} \quad \frac{0}{0} \Rightarrow \text{H\ddot{o}p}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x) - f''(0) - f'''(0)x}{6x} \quad \frac{0}{0} \Rightarrow \text{R6p}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'''(x) - f'''(0)}{6} = \frac{f'''(0) - f'''(0)}{6} = 0$$

— 0 — 0 —

SVILUPPI DI TAYLOR

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

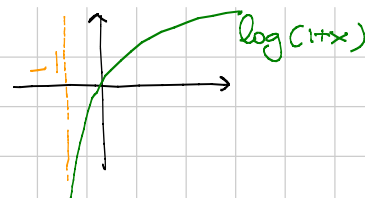
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$\sin R x =$ come $\sin x$ e $\cos x$
 solo con tutti +
 invece che
 con segni
 alternati

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$



$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}{4!} x^4 + \dots$$

Casi particolari

$\frac{dx}{x}$
 [Per esponenti $> \alpha$, il coeff diventa 0]

α intero positivo $\Rightarrow$ solito sviluppo del "binomio di Newton"

$$\boxed{\alpha = -1} \quad (1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$$

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{2}} \quad (1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2}-1)}{2} x^2 + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

Domanda: deb. il pol. di Taylor di ordine 4 ($n=4$) per $f(x) = \sin x$

$x \rightarrow 0$

$$P_4(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

$$P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{VERA (Taylor con } n=3)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \quad \text{VERA (Taylor con } n=4) \\ \text{E MIGLIORE DELLA PRECEDENTE}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^5) \quad \text{FALSA (dovrei aggiungere } + \frac{x^5}{120} = 5!)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^2) \quad \text{VERA MA "INUTILE" (BUFFA)}$$

$= o(x^2)$

Se si mette $o(x^2)$, questo
mangia tutte le potenze con esp. > 2
Anziché è INUTILE SCRIVERE

Esempio

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x + x^5}{x^3} \quad = \text{uso Taylor}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} - \cancel{\sin x} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right) = \frac{1}{6}$$

per def.
di $o(x^3)$

$$\begin{aligned} \frac{x - \sin x + x^5}{x^3} &= \frac{\cancel{x} - \cancel{\sin x} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + o(x^5) + x^5}{x^3} \\ &= \frac{1}{6} - \frac{x^2}{120} + \frac{o(x^5)}{x^3} + \frac{x^2}{1} \rightarrow \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 o o o o o

$$\frac{x - \sin x + x^5}{x^3} \quad \parallel \quad \frac{\cancel{x} - \cancel{x} + o(x^2)}{x^3} = \frac{o(x^2)}{x^3} = \text{boh}$$

mi fermo
con $n=2$

$$\frac{o(x^2)}{x^2} \cdot \frac{1}{x} \rightarrow 0 \cdot \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x) + x^5}{x^3}$$

MAT 1 TLC

ORA 27

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\boxed{1} \quad f(x) = e^x \quad f^{(k)}(x) = e^x \quad f^{(k)}(0) = 1$$

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!} = \text{coeff. di } x^k$$

$$\boxed{2} \quad f(x) = \sin x, \quad f^{(1)}(x) = \cos x, \quad f^{(2)}(x) = -\sin x, \quad f^{(3)}(x) = -\cos x$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x, \quad f^{(5)}(x) = \cos x, \dots \quad \text{si ripete con periodo 4}$$

$$f(0) = 0, \quad f^{(1)}(0) = 1, \quad f^{(2)}(0) = 0, \quad f^{(3)}(0) = -1$$

Quindi otteniamo la successione $0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1,$
quindi 0 sui pari e alternativamente 1 e -1 sui dispari

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \text{coeff. di } x^k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari} \\ \text{alt. } \pm \frac{1}{k!} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$\boxed{3} \quad \cos x \quad \text{stessa cosa sfasata di 1-ordine di derivazione!}$$

$$1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0$$

$$\boxed{4} \quad f(x) = \log(1+x) \quad f^{(1)}(x) = \frac{1}{1+x}; \quad f^{(2)}(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f^{(3)}(x) = 2 \frac{1}{(1+x)^3}; \quad f^{(4)}(x) = -6 \frac{1}{(1+x)^4}$$

$$f^{(5)}(x) = 24 \frac{1}{(1+x)^5}$$

In generale

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{1}{(1+x)^k} (k-1)!$$

DIMOSTRARE RIGOROSAMENTE PER INDUZIONE

$$\begin{aligned} \text{coeff. di } x^k &= \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{k!} (-1)^{k+1} (k-1)! \\ &= (-1)^{k+1} \frac{\cancel{(k-1)!}}{k \cancel{(k-1)!}} = \frac{(-1)^{k+1}}{k} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \dots$$

derivata
DERIVA

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

DERIVA

Esempio 1

$$f(x) = \sin x + e^x \quad \text{voglio calcolare } P_3(x)$$

$$x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$= 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$P_3(x)$

"Lo sviluppo della somma è la somma degli sviluppi"

Quanto vale $f'''(0)$?

$$0 = \text{coeff. di } x^3 = \frac{f'''(0)}{3!}$$

$$\Rightarrow f'''(0) = 0$$

Idem per la $f^{(2)}$, $f^{(1)}$, $f^{(0)}$, ...

Esempio 2 $f(x) = e^x \cdot \cos x$ $P_3(x)$

$$= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)$$

$$= 1 - \cancel{\frac{x^2}{2}} + x - \frac{x^3}{2} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$= \boxed{1 + x - \frac{x^3}{3}} + o(x^3)$$

$P_3(x)$

Lo sviluppo del prodotto è il prodotto degli sviluppi (molti termini vengono inglobati nell' o -piccolo).

Composizioni tranquille

PIACEREBBE

$$\sin(3x) = 3x - \frac{(3x)^3}{6} + o((3x)^3) \stackrel{\downarrow}{=} 3x - \frac{27}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$$

PIAC.

$$\sin(x^3) = x^3 - \frac{(x^3)^3}{6} + o((x^3)^3) \stackrel{\downarrow}{=} x^3 - \frac{x^9}{6} + o(x^9)$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + t^3 \omega(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \omega(t) = 0$$

$$\begin{aligned} \sin(3x) &= 3x - \frac{(3x)^3}{6} + \frac{(3x)^3 \omega(3x)}{27 x^3 \omega(3x)} \\ &= x^3 \underbrace{27 \omega(3x)}_{\omega_2(x)} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \overset{\omega_2(x)}{27 \omega(3x)} = 0$$

$t = 3x \dots$

$$\sin(x^3) = x^3 - \frac{x^9}{6} + o(x^9) \quad \text{VERA}$$

$$= x^3 - \frac{x^9}{6} + o(x^3) \quad \text{VERA MA BUFFA}$$

$$= x^3 - \frac{x^9}{6} + o(x^{10}) \quad \text{VERA}$$

$$= x^3 - \frac{x^9}{6} + o(x^{12}) \quad \text{VERA}$$

$$\boxed{\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^4)}$$

USANDO QUESTA

$$= x^3 - \frac{x^9}{6} + o(x^{14}) \quad \text{VERA}$$

Il termine succ. verrebbe fuori

da $\frac{t^5}{120}$

e quindi sarebbe

$$\frac{C x^3)^5}{120}$$

quindi espon.

(15)

MAT I TLC

ORA28

Titolo nota

24/10/2006

Formula di Taylor $\rightarrow$ composizione di funzioni $\rightarrow$ centro in un p.to $x_0 \neq 0$

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{6} + o((2x)^3) =$$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$o((2x)^3) = (2x)^3 \omega(2x) = x^3 \cdot \underbrace{8\omega(2x)}_{\omega_2(x) \rightarrow 0}$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + o(x^6)$$

$$+ o(x^7)$$

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{(\sin x)^2}{2} + \frac{(\sin x)^3}{6} + o((\sin x)^3)$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$$

$$= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{6} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 + o((\sin x)^3)$$

$$= 1 + x - \cancel{\frac{x^3}{6}} + \frac{1}{2}x^2 + \cancel{\frac{1}{6}x^3} + o((\sin x)^3) + o(x^3)$$

il resto del $(\dots)^2$
se lo è mangiato
 $o(x^3)$

MANGIATO?

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$o((\sin x)^3) \Leftrightarrow o(x^3)$$

STESSA FORZA

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \underline{t^3 \omega(t)}$$

$$\omega(t) \rightarrow 0 \text{ per } t \rightarrow 0$$

$$o((\sin x)^3) = (\sin x)^3 \cdot \omega(\sin x) =$$

$$= x^3 \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x} \right)^3}_{\omega_2(x)} \omega(\sin x)$$

$$\omega_2(x) \rightarrow 1 \cdot 0 = 0$$

$$\cos(\sin x) \approx$$

$$\boxed{n=4}$$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + o(t^4)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(\sin x)^2 + \frac{1}{24}(\sin x)^4 + o((\sin x)^4)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4 + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

$\uparrow$
 $2 \cdot x \cdot \left(-\frac{x^3}{6}\right)$
DOPPIO
PRODOTTO

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)$$

$f(x) = \cos(\sin x)$ è una funzione PARI

$$f(-x) = \cos(\sin(-x)) = \cos(-\sin x) = \cos(\sin x) = f(x)$$

$\uparrow$ $\sin$ $\uparrow$
 DISP. $\cos$ $\uparrow$
 PARI

Essendo f pari, nel suo sviluppo compaiono solo potenze PARI, quindi non c'è il termine in x^5

$$f(x) = \sin(\cos x) = \boxed{m=4}$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^4)$$

$$= \cos x - \frac{(\cos x)^3}{6} + o((\cos x)^4)$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - \frac{1}{6} \left(\right)^3 + \boxed{o(x^4)} \text{ ???}$$

$$o((\cos x)^4) = (\cos x)^4 w(\cos x) = x^4 \left[\left(\frac{\cos x}{x} \right)^4 w(\cos x) \right]$$

$w_2(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} w_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\cos x}{x} \right)^4 \cdot w(\cos x) \right]$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $+\infty$ $\cdot$ $w(1)$

Con $\sin(\cos x)$ non va bene perché la funzione è intera, nel nostro caso $\cos x$, non tende a 0 per $x \rightarrow 0$.

$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^4)$ buona approssimazione per $t \rightarrow 0$
 Se metto $t = \cos x$ e poi faccio $x \rightarrow 0$,
 ho che $t \rightarrow 1$.

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)$$

buona per $t \rightarrow 0$

Se metto $t = \sin x$ e faccio $x \rightarrow 0$ ho che $t \rightarrow 0$, quindi ok.

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \right) - \frac{1}{6} \left(\quad \right)^3 +$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{6} \left(1 + \dots \right) + \frac{1}{5!} \left(\quad \right)^5 + o(x^4)$$

$\downarrow$
 $1 + \dots$

tutte $(\quad)^k$ producono delle costanti, quindi non finì, so mai nemmeno di calcolare il termine noto.

Esempio $x \rightarrow 0$

SVILUPPI DI
ORDINE 1

$$\frac{e^{2x} + \cos(3x) + \sqrt{1+x} - 3}{\arctan x + \arcsin x} \stackrel{\text{SVILUPPI DI ORDINE 1}}{=} \frac{\cancel{1} + 2x + \cancel{1} + \cancel{1} + \frac{x}{2} - \cancel{3} + o(x)}{2x + o(x)}$$

$$e^{2x} = 1 + 2x + o(x)$$

$$\cos(3x) = 1 + o(x)$$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$$

$$\arctan x = x + o(x)$$

$$\arcsin x = x + o(x)$$

$$= \frac{\frac{5}{2}x + o(x)}{2x + o(x)}$$

$$= \frac{\cancel{x} \left(\frac{5}{2} + \frac{o(x)}{x} \right)}{\cancel{x} \left(2 + \frac{o(x)}{x} \right)} \rightarrow \frac{5}{4}$$

$\nearrow 0$
 $\searrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log^4(1+x)}{\cos x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + o(x^4)}{\cancel{1} - \frac{x^4}{2} + o(x^4) - \cancel{1}} = -2$$

$$\log(1+x) = x + o(x) ; [\log(1+x)]^4 = (x + o(x))^4 \\ = x^4 + o(x^4)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$x \rightarrow 0$

$$x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{x\sqrt{x} + \cos x - 1}{\sin x^5 + \sin^5 x + \sqrt{\arctan(2x^3)}} = \\ = \frac{x\sqrt{x} + \cancel{1} + o(x^{3/2}) - \cancel{1}}{\sqrt{2x^3} \quad o(x^{3/2})} \\ = \frac{x\sqrt{x} + o(x^{3/2})}{\sqrt{2}x\sqrt{x} + o(x^{3/2})} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos x = 1 + o(x^{\frac{3}{2}})$$

$$\sin x^5 = o(x^{3/2})$$

$$(84x)^5 = o(x^{3/2})$$

MAT I TLC

ORA 29

$$1 - \cos^2 x^3 = x^6 + o(x^6)$$

$$1 - \cos^3 x^2 = \frac{3}{2} x^4 + o(x^4)$$

$$\cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^2)$$

$$(\cos x^2)^3 = \left(1 - \frac{x^4}{2} + o(x^2)\right)^3$$

$$= 1 - \frac{3}{2} x^4 + o(x^4)$$

↑
TRIPIO PRODOTTO $3 \cdot (1)^2 \left(-\frac{x^4}{2}\right)$

RICEVIMENTO : GIOVEDÌ
da [FINE LEZIONE $\rightarrow +\infty$)
dove si è fatto lezione

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$\cos x^3 = 1 - \frac{x^6}{2} + o(x^3)$$

$$(\cos x^3)^2 = 1 - x^6 + o(x^6)$$

↑
DOPPIO
PRODOTTO

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x^3}{1 - \cos^3 x^2} = \frac{x^6 + o(x^6)}{\frac{3}{2} x^4 + o(x^4)} = \frac{x^6 \left(1 + \frac{o(x^6)}{x^6}\right)}{x^4 \left(\frac{3}{2} + \frac{o(x^4)}{x^4}\right)} \rightarrow 0 \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}} = 0.$$

Sviluppi con centro $x_0 \neq 0$.

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$f(x) = \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

Cambio variabile: $R = x - x_0$ Quando $x \rightarrow x_0$ ho che $R \rightarrow 0$
 $x = x_0 + R$

$f(x) = f(x_0 + R) =$ funzione di R che chiamo $g(R)$

Applico solito Taylor a g . Ottengo

$$g(R) = g(0) + g'(0)R + \frac{g''(0)}{2!}R^2 + \dots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}R^n + o(R^n)$$

Ora torniamo indietro:

$$g(R) = f(x_0 + R), \quad g'(R) = f'(x_0 + R), \quad g''(R) = f''(x_0 + R)$$

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + f'(x_0)R + \frac{f''(x_0)}{2!}R^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}R^n + o(R^n)$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

Quando $x_0 = 0$ tutte le deriv. erano calcolate in 0, ora sono calcolate in x_0 .

Inoltre $x \sim 0$ e nello sviluppo compaiono potenze di x

Ora $x - x_0 \sim 0$ e " " " " Compaiono " " $x - x_0$

$e^{\cos x}$

Non si può fare la sostituzione brutale

$\cos x \rightarrow 1$, quindi mi serve uno sviluppo di e^t
 per $t \sim 1$

$$e^{1+R} = \text{dovrei calcolare la derivata di } e^t \text{ per } t=1$$

$$= e \cdot e^R = e \left(1 + R + \frac{R^2}{2} + \frac{R^3}{6} + o(R^3) \right) \quad \text{per } R \rightarrow 0$$

$$= e + eR + \frac{e}{2} R^2 + \frac{e}{6} R^3 + o(R^3)$$

$$e^{\cos x} = e^{1 + \boxed{\cos x - 1}}$$

$\uparrow$
 $e^{\cos x - 1}$ in $R \rightarrow 0$

$$\cos x - 1 = \cancel{1} - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \quad \cancel{1}$$

$$= e + e(\cos x - 1) + \frac{e}{2} (\cos x - 1)^2 + \frac{e}{6} (\cos x - 1)^3 + o(\quad)$$

$$= e + e\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) + \frac{e}{2} \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^2 + \frac{e}{6} (\quad)^3 + o(\quad)$$

$$= e - \frac{e}{2} x^2 + o(x^3)$$

$$\boxed{e^{\cos x} = e - \frac{e}{2} x^2 + o(x^3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - \cos x - x}{\arctan x \cdot \sin(\sin x)} =$$

$$\arctan x = x + o(x)$$

$$\sin(\sin x) = x + o(x)$$

$$\sin t = t + o(t) ; \quad \sin(\sin x) = \sin x + o(\sin x) \\ = x + o(x)$$

$$\text{Denom.: } (x + o(x)) \cdot (x + o(x)) = x^2 + o(x^2)$$

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3) \quad (\text{FATTO PRIMA})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} - \cancel{1} + \frac{x^2}{2} - \cancel{x} + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x+x^3) - \sin x}{\log(1+\sin^2 x) \tan x} = \frac{5}{6}$$

$$\tan x = x + o(x); \quad \sin x = x + o(x); \quad \sin^2 x = x^2 + o(x^2)$$

$$\tan x \sim x; \quad \sin^2 x \sim x^2; \quad \log(1+\sin^2 x) \sim \log(1+x^2) \sim x^2$$

Denominatore $\sim x^3$. Sviluppo numeratore all'ordine 3

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6}; \quad \arctan(x+x^3) \sim x+x^3$$

$$\arctan t \sim t \quad \arctan(x+x^3) - \sin x \sim \cancel{x} + x^3 - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} = \frac{7}{6}x^3$$

NO
NO
NO
NO
NO
NO

$$\arctan t = t + o(t); \quad \arctan(x+x^3) = x+x^3 + o(x+x^3)$$

$$= x+x^3 + o(x) = x + o(x)$$

$$o(x+x^3) = (x+x^3) \omega(x) = x \underbrace{(1+x^2) \omega(x)}_{\omega_2(x)} \quad \text{NO BUONO}$$

NON POSSO
RACCOGLIERE
 x^3

$$= x^3 \left(\frac{1}{x^2} + x \right) \omega(x)$$

DISASTRO

VA BENE; $\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + o(t^3)$

$$\arctan(x+x^3) = (x+x^3) - \frac{(x+x^3)^3}{3} + o((x+x^3)^3)$$

$$= x+x^3 - \frac{x^3}{3} + o(x^3) = x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$$

Numeratore =

$$\begin{aligned} &= \arctan(x + x^3) - \sin x = \cancel{x} + \frac{2}{3}x^3 - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ &= \frac{5}{6}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

$$\lim = \frac{5}{6}$$

MAT I TLC

ORA 30

Titolo nota

25/10/2006

SERIE

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

a_n è una successione data
Voglio sommare tutti gli
infiniti termini della successione

$$\sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

← SOMMATORIA, cioè una
somma finita.

II)

S_n [somma parziale]

$\{S_n\}$ risulta una successione di numeri, di cui posso provare a fare il limite

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

$$S_0 = a_0$$

$$S_1 = a_0 + a_1$$

$$S_2 = a_0 + a_1 + a_2$$

!

$$S_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

S_n per $n \rightarrow +\infty$

- $S_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \Rightarrow$ La serie converge ad l
- $S_n \rightarrow +\infty \Rightarrow$ La serie diverge a $+\infty$
- $S_n \rightarrow -\infty \Rightarrow$ La serie diverge a $-\infty$
- S_n NON HA LIMITE $\Rightarrow$ La serie è INDETERMINATA

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = l \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = -\infty,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ INDET.}$$

Variante OVVIA

$$\sum_{n=37}^{\infty} a_n$$

$$\Delta_{37} = a_{37}$$

$$\Delta_{38} = a_{37} + a_{38}$$

$$\Delta_{39} = a_{37} + a_{38} + a_{39}$$

⋮

$$\Delta_{m+1} = \Delta_m + a_{m+1}$$

RELAZIONE RICORSIVA
CHE DEFINISCE $\{\Delta_m\}$

Es. ①. $a_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$

$$\Delta_0 = a_0 = 0$$

$$\Delta_1 = a_0 + a_1 = 0 + 0 = 0$$

allo stesso tutti gli $\Delta_m = 0$

$$\Delta_m \rightarrow 0$$

Es. ② $a_n = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum a_n = +\infty$

$$\Delta_0 = a_0 = 1$$

$$\Delta_1 = a_0 + a_1 = 1 + 1 = 2$$

$$\Delta_2 = a_0 + a_1 + a_2 = 1 + 1 + 1 = 3$$

In generale

$$\Delta_m = m + 1 \rightarrow +\infty$$

↑
si dimostra per
induzione a partire
dalla relaz. ricorrente.

Esempio ③ Fissiamo un parametro $a \in \mathbb{R}$. $a_n = a^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots$$

$$\Delta_2 = 1 + a + a^2$$

$$S_n = 1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

Dimostrato
per induzione
(VALE se $a \neq 1$)

$$S_n \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ \frac{1}{1-a} & \text{se } -1 < a < 1 \\ \text{N.E.} & \text{se } a < -1 \\ \text{N.E.} & \text{se } a = -1 \end{cases}$$

[Num $\rightarrow -\infty$
Den. < 0]
[In questo caso
 $a^{n+1} \rightarrow 0$]
[sui pari $\rightarrow +\infty$
sui dispari $\rightarrow -\infty$]
[Den = 2
Num = 2, 0, 2, 0, 2, 0]

RIASSUMENDO

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \begin{cases} \text{Diverge a } +\infty & \text{se } a \geq 1 \\ \text{Converge a } \frac{1}{1-a} & \text{se } -1 < a < 1 \\ \text{Indeterminata} & \text{se } a \leq -1 \end{cases}$$

SERIE GEOMETRICA

— 0 — 0 —

SERIE TELESCOPICHE

Esempio 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots = 1$

$$\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad \left[= \frac{n+1-n}{n(n+1)} \right]$$

Devo calcolare Δ_n e poi fare il $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n$.

$$\Delta_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

RIMANGONO SOLO IL 1° e L'ULTIMO

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\Delta_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Ufficialmente:
INDUZIONE

↓
1

⇒ LA SERIE CONVERGE A 1.

Esempio 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

$$\log \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \log \left(\frac{n+1}{n} \right)$$

$$= \log(n+1) - \log n$$

$$\Delta_n = \log \left(1 + \frac{1}{1} \right) + \log \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \log \left(1 + \frac{1}{3} \right) + \dots + \log \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

$$= (\log 2 - \log 1) + (\log 3 - \log 2) + (\log 4 - \log 3) + (\log 5 - \log 4) + \dots$$

$$+ (\log(n+1) - \log n)$$

INDUZIONE

Conclusione

$$\Delta_n = \log(n+1) \rightarrow +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) = +\infty$$

PROPRIETÀ GENERALI

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = l_1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = l_2$$

$$c_n = (a_n + b_n)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$$

SOMMA PARZIALE
n-esima rel. alla
serie c

$$\boxed{\Delta_n^c}$$

$$= c_0 + c_1 + \dots + c_n$$

$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + \dots + (a_n + b_n)$$

$$= (a_0 + a_1 + \dots + a_n) + (b_0 + b_1 + \dots + b_n)$$

$$= \Delta_n^a \downarrow l_1$$

$$+ \Delta_n^b \downarrow l_2$$

Di conseguenza
 $\Delta_n^c \rightarrow l_1 + l_2$ TRANNE
nei casi $+\infty - \infty$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

TRANNE NEI
CASI $+\infty - \infty$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = l_1 \in \bar{\mathbb{R}} \quad \lambda \neq 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n)$$

$$(\lambda a_0) + (\lambda a_1) + (\lambda a_2) + \dots + (\lambda a_n) = \lambda (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

$$\downarrow \lambda l_1$$

$$\downarrow l_1 \in \bar{\mathbb{R}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cdot b_n)$$

NULLA DI FURBO!! (È falso anche per
somme FINITE)

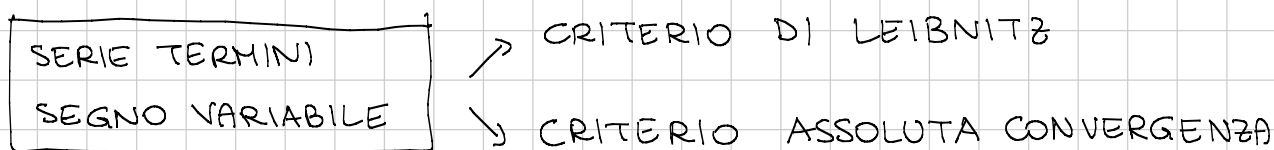
$$a_0 b_0 + a_1 b_1 \neq (a_0 + a_1)(b_0 + b_1)$$

ORA 31

Una formula esplicita
per Δ_n NON SI TROVA

↳ Se converge, i criteri non dicono a cosa converge (non permettono di calcolare)

(Una volta che si sa che converge, ci sono metodi per calcolare in modo approssimato il valore di L)



Se una serie è a termini ≥ 0 , la successione delle somme parziali è DEBOLMENTE CRESCENTE

$$s_{n+1} = s_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \geq s_n$$

Di conseguenza la serie ha solo 2 possibili comportamenti

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \begin{cases} \nearrow \text{CONVERGE ad un certo } l \in \mathbb{R} \\ \searrow \text{DIVERGE a } +\infty \end{cases}$$

CRITERIO DELLA RADICE Sia $a_n \geq 0$. Supponiamo che $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Allora * se $l > 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$

* se $0 \leq l < 1$, $\sum a_n$ converge

* se $l = 1$, allora BOH

CRITERIO RAPPORTO Sia $a_n > 0$. Supponiamo che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Allora come sopra.

CRITERIO CONFRONTO Siano $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$. Supp. che

$$a_n \leq b_n \text{ definitivamente}$$

Allora

$$\sum a_n = +\infty \Rightarrow \sum b_n = +\infty$$

$$\sum b_n = l_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum a_n = l_2 \in \mathbb{R} \quad (\text{con } l_2 \leq l_1)$$

Negli altri casi non si può dire nulla.

— 0 — 0 —

CONDIZIONE NECESSARIA

Sia $\sum a_n$ una serie (nessuna ipotesi sui segni degli a_n).

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $a_n \rightarrow 0$

NON VALE IL VICEVERSA. Se $a_n \rightarrow 0$, la serie può fare quello che gli pare (conv., div., essere indet.)

Operativamente: data una serie, controllo se verifica la cond. nec., cioè faccio il limite di a_n

→ se viene $\neq 0$, oppure che non esiste, di sicuro la serie NON CONVERGE

→ se viene $= 0$, la serie POTREBBE convergere, ma non è obbligata a farlo.

Esempio 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 8}{(n+1)(n+5)} \quad a_n$$

$a_n \geq 0$ sempre

La serie può

→ conv.
→ div. a $+\infty$

NO perché cond. nec. non verificata

Controllo la cond. nec.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$, quindi la serie NON conv.,
quindi diverge a $+\infty$.

Esempio 2 $\sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\frac{n^2}{2^n}} = a_n$ $a_n \geq 0$ sempre

la serie $\rightarrow$ conv.
 $\rightarrow$ div. a $+\infty$

Cond. necessaria: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$

quindi POTREBBE CONVERGERE

Applico RAPPORTO (verrebbe anche con RADICE: provane!)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{\frac{1}{2} < 1}$$

La serie converge.

Esempio 3 $\sum_{n=1}^{\infty} \boxed{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{n^2 + 25}} = a_n$ $a_n > 0$ sempre

RADICE: $\sqrt[n]{a_n} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_e \cdot \underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{n^2 + 25}}}_{\substack{\text{polin.} \\ 1}} \rightarrow e > 1$

$\Rightarrow$ la serie DIVERGE

$a_n \rightarrow +\infty$, quindi COND. NEC. non verificata, quindi NON converge

Abbiamo dim. che $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow e$, ma allora

SERIE ARMONICA GENERALIZZATA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \begin{cases} \nearrow \text{DIVERGE A } +\infty & \text{se } 0 \leq \alpha \leq 1 \\ \searrow \text{CONVERGE} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

SI PUÒ DARE PER BUONA [L'armonica classica è quella con $\alpha=1$]

Esempio... $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 - 8}{n^4 + n^3 + 82} = a_n$

$a_n > 0$ DEFINITIV.

$\sum a_n \begin{cases} \nearrow \text{DIV. A } +\infty \\ \searrow \text{CONV.} \end{cases}$

Cond. nec. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ (può convergere)

$$a_n \leq \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2} \quad \begin{matrix} \text{Num + grande} \\ \text{Den + piccolo} \end{matrix}$$

$$a_n \leq \boxed{\frac{1}{n^2}} = b_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{Converge perché armonica gen. con } \alpha=2$$

$\sum b_n \text{ conv.} \xRightarrow{\text{CONFRONTO}} \sum a_n \text{ conv.}$

Esempio... $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n!)}{n \sqrt{n+4}} = a_n$

$a_n \geq 0$
sempre

$$\frac{\arctan(n!)}{n\sqrt{n+4}} \leq \frac{30}{n\sqrt{n}}$$

$\parallel$ a_n $\parallel$ b_n

← abbondare !!!

$$\sum b_n = 30 \sum \frac{1}{n\sqrt{n}} = 30 \sum \frac{1}{n^{3/2}} \quad \alpha > 1 \text{ converge!}$$

CONFRONTO

$$\sum b_n \text{ conv.} \Rightarrow \sum a_n \text{ conv.}$$

MAT I TLC

ORA 32

FUNZIONI IPERBOLICHE

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

↑
seno iperbolico

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

↑
coseno iperbolico

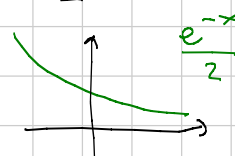
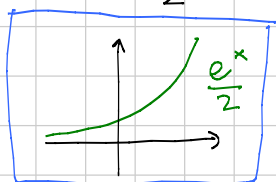
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

SIMMETRIE ?

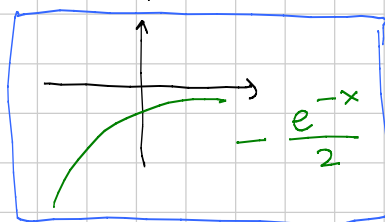
$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x \quad \text{PARI}$$

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\sinh x \quad \text{DISPARI}$$

$\sinh x$ è la somma di $\frac{e^x}{2}$ e $-\frac{e^{-x}}{2}$



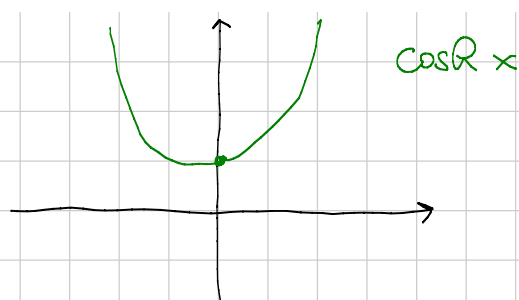
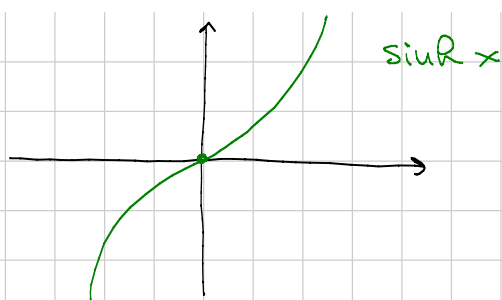
$\sinh x$, essendo somma di 2 funzioni strett. cresc., sarà a sua volta strett. cresc.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = +\infty$$

$$\sinh 0 = \frac{e^0 - e^0}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = +\infty$$



$$\cosh 0 = \frac{e^0 + e^0}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$



$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$\begin{aligned} \sinh(2x) &= \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x})}{2} \\ &= 2 \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

$$\sinh(2x) = 2 \sinh x \cdot \cosh x$$

Per esercizio: trovare formule per $\cosh(2x)$

Sviluppi di Taylor.

$$\cosh x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \cancel{x} + \frac{x^2}{2!} + \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \frac{x^4}{4!} + \cancel{\frac{x^5}{5!}} + \dots \right. \\ \left. + 1 - \cancel{x} + \frac{x^2}{2!} - \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \frac{x^4}{4!} - \cancel{\frac{x^5}{5!}} + \dots \right)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$$

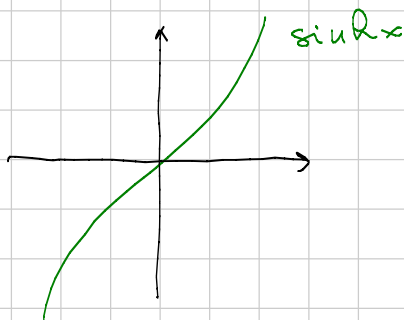
* termini con esp. pari
nello sviluppo di e^x
* stesso sviluppo di $\sinh x$,
solo con tutti +

$\sinh x =$ se ne vanno i pari e restano solo i dispari

$$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

N.B.

$$\sinh x + \cosh x = \frac{e^x - \cancel{e^{-x}}}{2} + \frac{e^x + \cancel{e^{-x}}}{2} = e^x$$

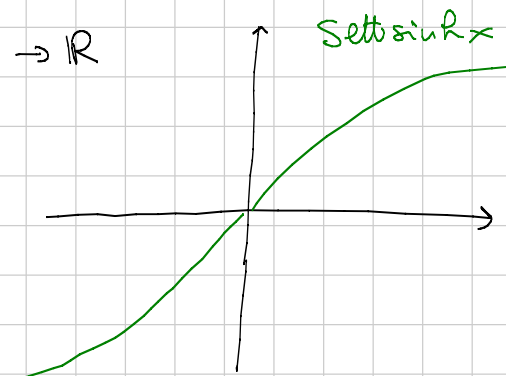


$f(x) = \sinh x$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
è iniettiva e surgettiva, dunque
invertibile.

La sua inversa è una

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

detta $g(x) = \operatorname{Settsinh} x$



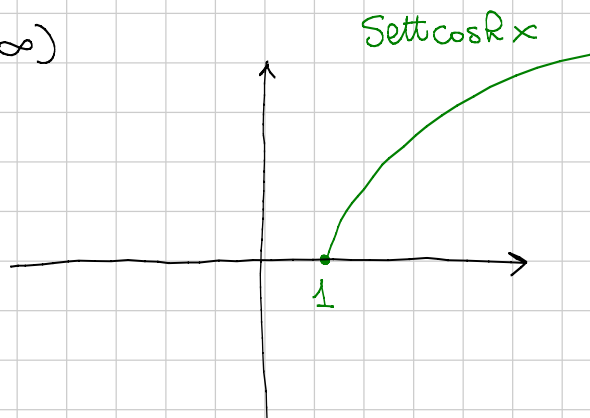
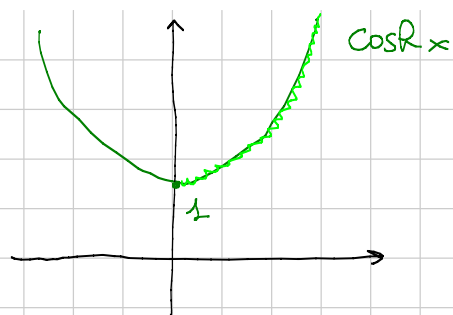
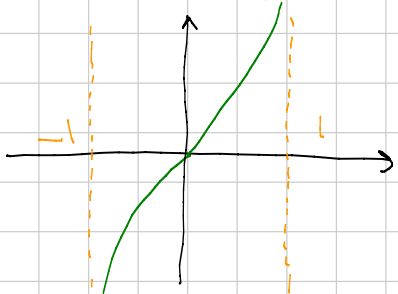
$$f(x) = \cosh x$$

$$f: [0, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$$

La sua inversa, $\text{Sett} \cosh x$,
è una funzione

$$g: [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

$$\text{Sett} \tanh: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$$



Ricaviamo una formula per $\text{Sett} \sinh x$ (per es. $\text{Sett} \cosh x$)

$$\sinh x = y \quad \text{Provo a ricavare } x \text{ in funzione di } y$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \quad ; \quad e^x - e^{-x} = 2y \quad \text{Pongo } z = e^x$$

$$z - \frac{1}{z} = 2y \quad ; \quad z^2 - 1 = 2yz \quad ;$$

$$z^2 - 2yz - 1 = 0$$

Ricavo z (in funzione di y)

$$z_{1,2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1} \quad \begin{matrix} \nearrow y + \sqrt{y^2 + 1} \\ \searrow y - \sqrt{y^2 + 1} \end{matrix}$$

2 possibili
valori per z

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \quad \leadsto \quad x = \log(y + \sqrt{y^2 + 1}) = \text{Sett} \sinh y$$

FORMULA

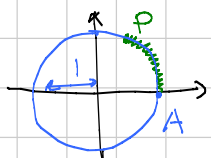
$$e^x = y - \sqrt{y^2 + 1} \rightsquigarrow \text{NULLA}$$

< 0 perché
 $y - \sqrt{y^2 + 1} < 0$

— 0 — 0 —

GEOMETRICAMENTE

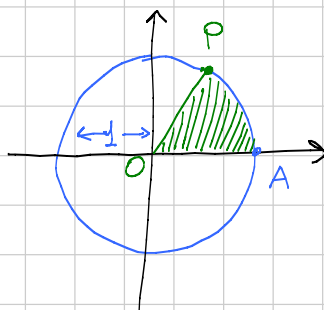
Trigo.
classica



arco lungo x , individuo P

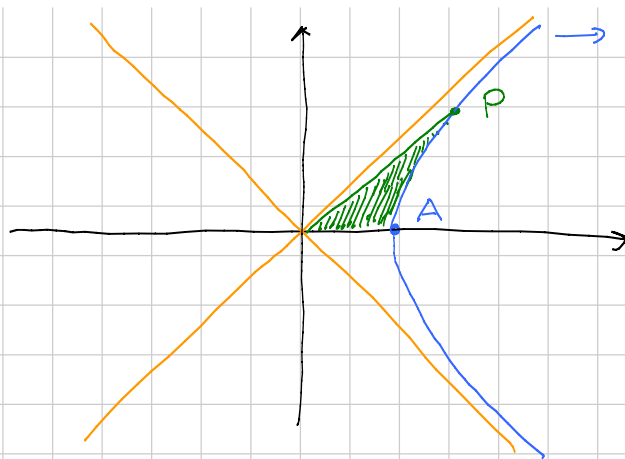
$$P = (\cos x, \sin x)$$

Trigo.
alternativa



Percorro finché l'area del
settone è $x/2$

$$P = (\cos x, \sin x)$$

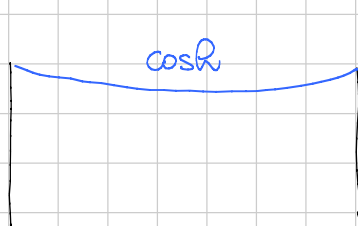


iperbole di equazione

$$x^2 - y^2 = 1$$

Percorro finché l'area
del settone è $\frac{x}{2}$

$$P = (\cosh x, \sinh x)$$



PALI



MAT 1 TLC

ORA 33

Titolo nota

26/10/2006

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

$$S_m = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

$$S_m \rightarrow ?$$

$$S_{m+1} = S_m + a_{m+1}$$

COND. NEC.

$$\sum a_n \text{ converge} \Rightarrow a_n \rightarrow 0$$

Dim.

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

se la serie converge vuol dire che $S_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$0 = l - l$$

CRITERIO

- SERIE CON $a_n \geq 0$ def (segno costante)
- SERIE CON a_n a segno variabile

CRITERIO CONFRONTO

$$0 \leq a_n \leq b_n \text{ definiti.}$$

$$\sum a_n = +\infty \Rightarrow \sum b_n = +\infty$$

$$\sum b_n = l_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum a_n = l_2 \in \mathbb{R} \quad l_2 \leq l_1$$

Dim.

$$S_m^a = a_0 + a_1 + \dots + a_n ; \quad S_m^b = b_0 + b_1 + \dots + b_n$$

Facciamo ipotesi che $a_n \leq b_n$ sempre. Allora

$$S_m^a \leq S_m^b \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}$$

Se $\sum a_n = +\infty$, allora $S_m^a \rightarrow +\infty$, ma allora $S_m^b \rightarrow +\infty$ pure, dunque anche $\sum b_n = +\infty$

Se $\sum b_n = l$, allora $s_n^b \rightarrow l \in \mathbb{R}$, allora di sicuro s_n^a non può tendere a $+\infty$, dunque $\sum a_n$ non può divergere a $+\infty$. Essendo a termini ≥ 0 , non le resta che convergere

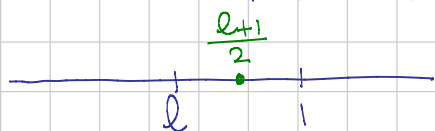
RADICE $a_n \geq 0$, $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$, allora

- $l > 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverge
- $l = 1 \Rightarrow$ BOH
- $0 \leq l < 1 \Rightarrow \sum a_n$ converge

Dim. se $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l > 1$, allora per il criterio radice sui limiti, si ha che $a_n \rightarrow +\infty$, quindi non è verificata la cond. nec., quindi $\sum a_n$ non può conv., quindi div. a $+\infty$.

Se $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l < 1$, allora $a_n \rightarrow 0$, quindi condiz. nec. è verificata, quindi $\sum a_n$ POTREBBE convergere.

FALSA PARTENZA



Se $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow l < 1$, allora definit.
 $\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{l+1}{2}$, quindi

$$a_n \leq \left(\frac{l+1}{2}\right)^n$$

$\sum b_n = \sum \left(\frac{l+1}{2}\right)^n$ è una serie GEOMETRICA, che converge in quanto $\frac{l+1}{2} < 1$.

Poiché $\sum b_n$ conv., anche $\sum a_n$ converge. $\square$

CRITERIO RAPPORTO : analogo per la parte $l > 1$; se $l < 1$ occorre riassorbire la div. fatta per le succ.

SERIE GEOM.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \begin{cases} \nearrow \text{div. a} + \infty & \text{se } a \geq 1 \\ \rightarrow \text{conv. a } \frac{1}{1-a} & \text{se } -1 < a < 1 \\ \searrow \text{indet. se } & a \leq -1 \end{cases}$$

ARMONICA
GENER.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \begin{cases} \nearrow \text{div. a} + \infty & \text{se } \alpha \leq 1 \\ \searrow \text{conv.} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

AMICA ARM.
GEN.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\log n)^{\alpha}} \begin{cases} \nearrow \text{div. a} + \infty & \text{se } \alpha \leq 1 \\ \searrow \text{conv.} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

CRITERIO CONFRONTO ASINTOTICO

Siano $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$ definitivi. Supponiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \neq 0, \neq +\infty \quad [\text{Casi standard}]$$

Allora $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso comportamento, cioè

$$\sum a_n \text{ conv.} \Leftrightarrow \sum b_n \text{ conv.}$$

$$\sum a_n = +\infty \Leftrightarrow \sum b_n = +\infty$$

Esempio 1 $\sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\frac{n^2+6n+5}{n^4-3n^2+28}} = a_n$

Brutale: $a_n \sim \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}$ $\sum \frac{1}{n^2}$ conv perché armonica
con $\alpha > 1$.

Rigoroso: $a_n \geq 0$ definit. Applico confr. asiut. con

$$b_n = \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2+6n+5}{n^4-3n^2+28} \cdot n^2 \rightarrow \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix} \Rightarrow \text{le due serie} \\ \text{hanno lo stesso} \\ \text{Comp.}$$

$\uparrow$ a_n $\uparrow$ DIVISO b_n

Poiché $\sum b_n = \sum \frac{1}{n^2}$ conv., anche $\sum a_n$ conv.

Esempio 2 $\sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\frac{7}{\sqrt{n^2+5}}} = a_n$

Brutale: $a_n \sim \frac{7}{\sqrt{n^2}} = \frac{7}{n}$ $\sum \frac{1}{n} = +\infty$ (ARM. con $\alpha=1$)

Rigoroso: $a_n \geq 0$ def. Confr. asiut. con $b_n = \frac{1}{n}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{7}{\sqrt{n^2+5}}}{\frac{1}{n}} = \frac{7n}{\sqrt{n^2+5}} = \frac{7\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt{1+\frac{5}{n^2}}} \rightarrow 7 \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$$

Poiché $l \neq 0$, $l \neq +\infty$, le 2 serie hanno lo stesso comp.

$$\sum b_n = +\infty \Rightarrow \sum a_n = +\infty.$$

Esempio 3 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

NOTA BENE : $0 < \frac{1}{n} \leq 1$, quindi $\sin \frac{1}{n} > 0$
 perché $\sin x > 0$ quando $0 < x \leq 1$ *in realtà? fino a π .*

Brutale : $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$, quindi $\sum \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \sum \frac{1}{n} = +\infty$

Rigoroso : confr. asint. con $b_n = \frac{1}{n}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \rightarrow \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix} \left[\text{solito } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right]$$

Quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum b_n$, dunque diverge

Esempio 4 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{5} - 1 \right)$
" $a_n > 0$ "

Brutale

$$\sqrt[n]{5} - 1 = e^{\frac{1}{n} \log 5} - 1 \sim \frac{1}{n} \log 5$$

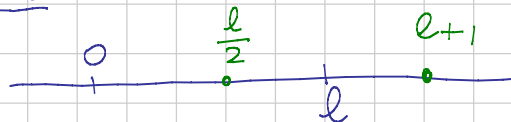
Confronto asint. con $b_n = \frac{1}{n}$:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sqrt[n]{5} - 1}{\frac{1}{n}} = \frac{5^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \frac{e^{\frac{1}{n} \log 5} - 1}{\frac{1}{n} \log 5} \xrightarrow{\log 5 \rightarrow \log 5 \neq 0 \neq +\infty} \text{solito } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

Quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum \frac{1}{n}$, dunque diverge.

MAT 1 TLC

ORA 34

Dim. criterio confronto asintotico

Se $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow l$, allora definitivamente

$$\frac{l}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq l+1$$

[Avevo supposto $b_n > 0$,
posso moltiplicare
conservando i versi]

$$\frac{l}{2} b_n \leq a_n \leq (l+1) b_n$$

Supponiamo che $\sum b_n = +\infty$, allora per la disug. di sinistra avremo che $\sum a_n = +\infty$.

Se invece $\sum b_n$ conv., allora per la disug. di destra anche $\sum a_n$ conv. [In entrambi i casi abbiamo usato il confronto]

CASI LIMITE

Supponiamo che $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$.

[Se $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$, allora defiu. $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$, dunque $a_n \leq b_n$ def., dunque]

$$\sum b_n \text{ conv.} \Rightarrow \sum a_n \text{ conv.}$$

$$\sum b_n = +\infty \Rightarrow \text{BOH}$$

— 0 — 0 —

Supponiamo che $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow +\infty$ [Se $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow +\infty$, allora defiu. $\frac{a_n}{b_n} \geq 1$, dunque $a_n \geq b_n$]

$$\sum b_n \text{ conv.} \Rightarrow \text{BOH}$$

$$\sum b_n = +\infty \Rightarrow \sum a_n = +\infty$$

Esempio 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \boxed{\frac{\log n}{n}} \quad a_n \geq 0$

Confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{\log n}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{\log n}{1} = \log n \rightarrow +\infty \text{ caso limite!}$$

[Se $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow +\infty$, allora $\frac{a_n}{b_n} \geq 1$ def., quindi $a_n \geq b_n$ def.]

Nel nostro caso $\sum b_n = \sum \frac{1}{n} = +\infty \Rightarrow \sum a_n = +\infty$

Esempio 2 $\sum_{n=2}^{\infty} \boxed{\frac{1}{n^2 \log n}} \quad a_n \geq 0$

Confr. asint. con $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{1}{n^2 \log n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\log n} \rightarrow 0 \text{ [CASO LIMITE!]}$$

[$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$, quindi def. $\frac{a_n}{b_n} \leq 1$, dunque $a_n \leq b_n$ def.]

Nel nostro caso $\sum b_n = \sum \frac{1}{n^2} \text{ conv. } (\alpha = 2 > 1)$, quindi

$$\sum a_n \text{ converge.}$$

Esempio 3 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$ $a_n \geq 0$

Confr. asint. con $b_n = \frac{1}{n^2}$. $\frac{a_n}{b_n} = \frac{\log n}{n^2} \cdot n^2 = \log n \rightarrow +\infty$

$\left[\frac{a_n}{b_n} \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \geq 1 \text{ def.} \Rightarrow a_n \geq b_n \text{ def.} \right]$

Nel nostro caso $\sum b_n = \sum \frac{1}{n^2}$ conv. $\Rightarrow$ BOH.

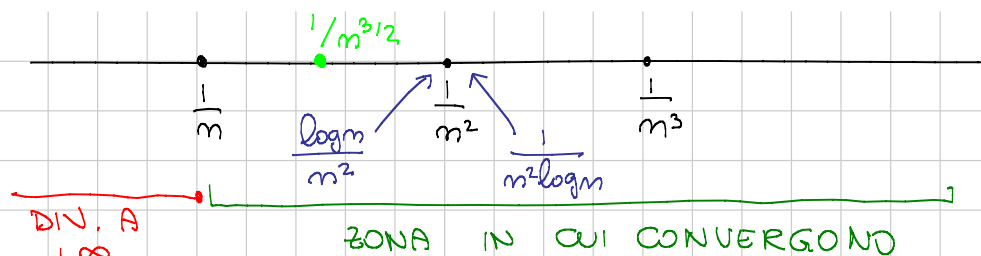
1° TENTATIVO: FALLITO!

Confr. asint. con $b_n = \frac{1}{n}$. $\frac{a_n}{b_n} = \frac{\log n}{n^2} \cdot n = \frac{\log n}{n} \rightarrow 0$

$\left[\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \leq 1 \text{ def.} \Rightarrow a_n \leq b_n \text{ def.} \right]$

Nel nostro caso $\sum b_n = \sum \frac{1}{n} = +\infty \Rightarrow$ BOH

2° TENT.
FALLITO



L'idea brutale è che $\sum \frac{\log n}{n^2}$ converga, ma un po' "meno bene" di $\sum \frac{1}{n^2}$

Confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^{3/2}} = \frac{1}{n\sqrt{n}}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{\log n}{n^2}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} = \frac{\log n}{n^2} \cdot n\sqrt{n} = \frac{\log n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$$

$$\left[\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \leq 1 \text{ def.} \Rightarrow a_n \leq b_n \text{ def.} \right]$$

Nel nostro caso $\sum b_n = \sum \frac{1}{n^{3/2}}$ conv. ($\alpha = \frac{3}{2} > 1$)
 $\Rightarrow \sum a_n$ conv.

3° TENTATIVO : OK!

Esempio 4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 5n}{n^a + 2n + 6}$ $a = \text{parametro}$
 $a_n \geq 0$

Per quali valori di a converge?

Brutale: $a_n \sim \frac{n^2}{n^a} = \frac{1}{n^{a-2}}$ converge $\Leftrightarrow a-2 > 1$
 $\Updownarrow$
 $a > 3$

Un po' più rigoroso: se $a \leq 2$, allora a_n non tende a zero
 $\Rightarrow$ no condiz. nec. $\Rightarrow$ DIV. A $+\infty$

Se $a > 2$, allora faccio confr. asint. con $\frac{1}{n^{a-2}}$:

$$\frac{a_n}{b_n} = \dots \rightarrow \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix} \quad \text{BLA... BLA...}$$

Esempio 5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 5n}{n^a + 2n^4 + 1}$

Idea: al den. c'è comunque n^4 che basta per farla convergere

Rigorosamente: $\frac{n^2 + 5n}{n^a + 2n^4 + 1} \leq \frac{n^2 + 5n}{2n^4}$ Questa conv. per C.A. con $\frac{1}{n^2}$
 Questa conv. per confronto

Esempio 6 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin R \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right)$

Brutale: $\sin R x - \sin x = \cancel{x} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \cancel{x} + \frac{x^3}{6}$
 $= \frac{x^3}{3} + o(x^3) \sim \frac{x^3}{3}$

$$\sin R \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n^3}$$

Quindi la serie data si comporta come $\sum \frac{1}{n^3}$, dunque conv.

Rigoroso: Confr. asint. con $b_n = \frac{1}{n^3}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sin R \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}} \quad \text{si riconduce a} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin R x - \sin x}{x^3}$$

Esempio 7 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n+1}{n^2}$

$$a_n \geq 0 \quad \sin n+1 \geq 0$$

Taylor non si può usare
perché l'argomento di
 $\sin$ tende a $+\infty$

$$\boxed{\frac{\sin n+1}{n^2}} \leq \boxed{\frac{32}{n^2}} \quad \text{converge perché} \\ \text{arm. con } \alpha=2$$

converge
per confronto

MAT 1 TLC

Titolo nota

ORA 35

28/10/2006

SERIE A TERMINI DI SEGNO QUALUNQUE

- CRITERIO LEIBNITZ (serie a segno alterno)
- ASSOLUTA CONVERGENZA

LEIBNITZ Consideriamo $\sum_{n=20}^{\infty} (-1)^n \alpha_n$. Supp. che

(i) $\alpha_n \geq 0$ definit, (cioè a_n ha segno alterno)

(ii) $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ definit, Allora la serie converge.

(iii) $\alpha_n \rightarrow 0$

Esempio 1 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = -\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$

In questo caso $\alpha_n = \frac{1}{n}$. Controllo le Hp:

(i) $\alpha_n \geq 0$ $\frac{1}{n} \geq 0$ sì!

(ii) $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ Ok

(iii) $\alpha_n \rightarrow 0$ $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ sì

$\Rightarrow$ La serie converge.

Esempio 1.1 Stessa vale per le serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$
 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$

Nell'ultimo caso $\alpha_n = \frac{1}{\log n}$

$$(i) \frac{1}{\log n} \geq 0 \quad \text{Sì}$$

$$(iii) \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log n} = 0$$

$$(ii) \alpha_{n+1} \leq \alpha_n; \frac{1}{\log(n+1)} \stackrel{?}{\leq} \frac{1}{\log n} \Leftrightarrow$$

$$\log n \stackrel{?}{\leq} \log(n+1) \quad \text{OK perché } \log x \text{ è crescente}$$

Oss. Se le ipotesi non sono verificate?

Se non sono verificate (i) e/o (ii), allora BOM

Se non è verificata (iii) allora non è verificata la

cond. nec., dunque di sicuro la serie non converge (e quindi può div. a $\pm\infty$, oppure essere INDETERMINATA),

$$(iii) \alpha_n \rightarrow 0 \quad \text{Condiz. nec.}; \quad a_n \rightarrow 0$$

$$a_n = (-1)^n \alpha_n. \quad \text{Se } a_n \rightarrow 0, \text{ allora } |a_n| \rightarrow 0, \\ \text{ma allora} \quad | \quad | \quad | \\ |\alpha_n| \rightarrow 0$$

$$a_n \rightarrow 0 \Rightarrow |a_n| \rightarrow 0 \Rightarrow |\alpha_n| \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha_n \rightarrow 0$$

↑
visto a suo tempo:
una succ. tende a 0
⇕
il suo val. ass. → 0

Esempio $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \boxed{\frac{n+4}{n+7}}_{\alpha_n}$

$\alpha_n \rightarrow 1 \Rightarrow$ ipotesi (iii) non verificata $\Rightarrow$ NO COND. NEC.
 $\Downarrow$
 la serie NON CONVERGE

Cosa fa il limite di $a_n = (-1)^n \alpha_n$?

Non esiste: infatti $a_{2n} \rightarrow 1$ e $a_{2n+1} \rightarrow -1$

ASSOLUTA CONVERGENZA Data la serie $\sum a_n$, studio

$\sum |a_n|$. Allora $\sum |a_n| \text{ conv.} \Rightarrow \sum a_n \text{ conv.}$

È una serie a termini ≥ 0 , dunque ho + criteri a disposizione!

ACHTUNG

$\sum |a_n| = +\infty \Rightarrow$ BOH.

Esempio 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \boxed{\frac{\cos n}{n^2}}_{=a_n}$ a_n segni qualunque

Proviamo con l'assoluta conv., e studiamo $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos n}{n^2} \right|$

$$\left| \frac{\cos n}{n^2} \right| = \frac{|\cos n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

$\sum \frac{1}{n^2} \text{ conv. (arm. con } \alpha=2) \Rightarrow \sum \frac{|\cos n|}{n^2} \text{ conv.}$

$\uparrow$
confronto tra serie a termini ≥ 0

$\Downarrow \swarrow$ ASSOL. CONV.
 $\sum \frac{\cos n}{n^2} \text{ conv.}$

$$\frac{\cos m}{m^2} \leq \frac{1}{m^2}$$

$$\sum \frac{1}{n^2} \text{ conv.} \Rightarrow \sum \frac{\cos m}{m^2} \text{ conv.}$$

↓
No perché il
confronto vale solo
tra serie a termini ≥ 0 .

Esempio 2

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+8-7n}{n^4-25n^3+14} \quad \alpha_n$$

Uso Leibnitz. Verifico ipotesi.

(i) $\alpha_n \geq 0$ def. OK (Num e den $\rightarrow +\infty$, dunque def. sono > 0)

(iii) $\alpha_n \rightarrow 0$ OK (ii) $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ DISEQ. POCO PIACEVOLE

Proviamo con assol. conv.

$$\alpha_n = (-1)^n \alpha_n$$

Studio $\sum |\alpha_n| = \sum \frac{n^2+8-7n}{n^4-25n^3+14}$ → Questa converge PER confr. asint.
 ↑
 Def. hanno gli stessi termini, dunque stesso comp.
 con $b_n = \frac{1}{n^2}$

Infatti:

$$\frac{\frac{n^2+8-7n}{n^4-25n^3+14}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^4+8n^2-7n^3}{n^4-25n^3+14} \rightarrow 1 \neq 0 \neq +\infty$$

Quindi $\sum \frac{n^2+...}{n^4-...}$ si comporta come $\sum \frac{1}{n^2}$, quindi CONV.

Poiché $\sum |\alpha_n|$ conv., anche $\sum \alpha_n$ conv.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \boxed{\frac{n^2+8-7n}{n^2-25n+14}} = \alpha_n$$

$\alpha_n \rightarrow 1$ Non è verificata ipotesi (iii) di LEIBNITZ

No COND. NEC.

Di sicuro non conv.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \boxed{\frac{n^2+8-7n}{n^3-25n+14}} = \alpha_n$$

Ora $\alpha_n \rightarrow 0$ (L-iii)

$\alpha_n \geq 0$ defiu. (L-i)

(L-ii) Terribile

Assol. conv. : studio $\sum |a_n| = \sum \frac{n^2+8-7n}{n^3-25n+14}$

Questa diverge a $+\infty$ per confr. asint.
con $b_n = \frac{1}{n}$

$$\sum |a_n| \text{ div. } \Rightarrow \text{BOH}$$

$$\boxed{\frac{n^2+8-7n}{n^3-25n+14}} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{\cancel{n^3}+8n-7n^2-\cancel{n^3}+25n-14}{n(n^3-25n+14)} + \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{-7n^2+33n-14}{n^4-25n^2+14n}$$

Torno da capo

$$\sum (-1)^n \alpha_n = \sum (-1)^n \left[\alpha_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right]$$

conv. perché somma di 2 serie che convergono.

CONV. PER LEIBNITZ

$$= \sum (-1)^n \left[\frac{1}{n} + \frac{-7n^2+\dots}{n^4+\dots} \right]$$

$$= \sum (-1)^n \frac{1}{n} + \sum (-1)^n \frac{-7n^2+\dots}{n^4+\dots}$$

CONV. PER ASSOLUTA CONVERGENZA

grad. den. 11
↑ grad. num. +2

MAT 1 TLC

ORA 36

Es. 1 $\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{n+7}{n^2-3}\right)$ a_n

Brutale: $\sin x \sim x$
 $\sin\left(\frac{n+7}{n^2-3}\right) \sim \frac{n+7}{n^2-3} \sim \frac{1}{n}$
 $\Rightarrow$ DIVERGE

Rigoroso: TERMINI ≥ 0 def.

Confr. asint. con $b_n = \frac{1}{n}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sin(\quad)}{\frac{1}{n}} = \frac{\sin(\quad)}{(\quad)} \cdot \frac{(\quad)}{\frac{1}{n}} = \frac{\sin(\quad)}{(\quad)} \cdot \frac{n^2+7n}{n^2-3}$$

$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{\sin b}{b} = 1$

$\sum a_n$ si comporta come
 $\sum \frac{1}{n}$, dunque diverge

Es. 2 $\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \cdot \sin(n^3)$

$\downarrow$ > 0 perché $0 < \frac{1}{n^3} \leq 1$

$\downarrow$ segno variabile

Provo assol. conv., quindi studio $\sum \left| \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \cdot \sin(n^3) \right|$
 $= \sum \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \cdot |\sin(n^3)|$

$$\sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \cdot |\sin(n^3)| \leq \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$\sum \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$ converge per confr. asint. con $\sum \frac{1}{n^3}$

$\Downarrow$ confronto tra serie a termini ≥ 0

$$\sum \sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \cdot |\sin(n^3)| \text{ conv.}$$

↓ Assol. conv.

$$\sum \sin \frac{1}{n^3} \cdot \sin(n^3) \text{ conv.}$$

Esempio 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^3$$

$a_n \geq 0$ sempre

$$a_n \rightarrow (1-1)^3 = 0$$

cond. nec. ok

può conv.

Brutale: $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \log n}$

$x = \frac{1}{n} \log n \rightarrow 0$

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

per $x \rightarrow 0$

$$\sim 1 + \frac{\log n}{n}$$

$$(\sqrt[n]{n} - 1)^3 \sim \left(1 + \frac{\log n}{n} - 1\right)^3 = \frac{\log^3 n}{n^3}$$

$$\sum \frac{\log^3 n}{n^3} \text{ converge} \Rightarrow \sum (\sqrt[n]{n} - 1)^3 \text{ converge}$$

Rigoroso: congr. asint. con $b_n = \frac{\log^3 n}{n}$ (FARE PER ESERC.)

ES. 4 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan n\right)$

$a_n \geq 0$ perché $\arctan x \leq \frac{\pi}{2}$ sempre

$a_n \rightarrow 0$ cond. nec. ok

Studioso ricorda che $n \left(\frac{\pi}{2} - \arctan n\right) \rightarrow 1$

cioè

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan n}{\frac{1}{n}} \rightarrow \frac{\neq 0}{\neq +\infty}$$

Fatto a suo tempo come esempio di Hôpital

Quindi $\sum a_n$ si comporta come $\sum \frac{1}{n}$, dunque diverge

Variante: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan n\right)^2$

Come prima faccio il confr. asint. con $b_n = \frac{1}{n^a}$ e ottengo che converge $\Leftrightarrow a > 1$,

Esempio 5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \arctan \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \quad a_n \rightarrow 0$$

Brutale: $\sin x \sim x - \frac{x^3}{6}$; $\arctan x \sim x - \frac{x^3}{3}$

$$\sin x - \arctan x \sim x - \frac{x^3}{6} - x + \frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{6}$$

mettendolo $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ (e va bene perché $\frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$) abbiamo

$$\sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \arctan \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{6} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^3 = \frac{1}{6} \frac{1}{n^{3/2}}$$

$\Rightarrow$ la serie converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \arctan \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^a$$

$$\left(\quad \right)^a \sim \left(\frac{1}{6} \frac{1}{n^{3/2}} \right)^a = \boxed{\frac{1}{6^a}} \frac{1}{n^{3a/2}}$$

costante e non cambia la conv.

$$\text{converge} \Leftrightarrow \frac{3a}{2} > 1 \Leftrightarrow 3a > 2 \Leftrightarrow a > \frac{2}{3}$$

Rigoroso: C.A. con $\frac{1}{n^{3a/2}}$

Esempio (7-1) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+2}{n^2+7}$

Non può convergere perché non è verificata la cond. nec.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{n^2+2}{n^2+7} - 1 + 1 \right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{n^2+2}{n^2+7} - 1 \right] + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

$$= -5 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+7} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

$$\frac{n^2+2}{n^2+7} - 1 = \frac{n^2+2-n^2-7}{n^2+7}$$

Conv. per assol. conv.

ci si riduce a studiare

$$\sum \frac{1}{n^2+7}$$

⇓ La serie data è
involterminata.

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$$

le somme parziali sono

$$1 = 1$$

$$1 - 1 = 0$$

$$1 - 1 + 1 = 1$$

$$1 - 1 + 1 - 1 = 0$$

altern. 0 e 1 ⇒

la serie è INDET.

MAT 1 TLC

ORA 37

Titolo nota

02/11/2006

Serie di potenze - SERIE DI TAYLOR

SERIE DI POTENZE

polinomio di grado ∞ .

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots$$

$\uparrow$ coeff. $\uparrow$ parametro

Domande:

- ① Per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la serie converge?
- ② Quando converge, posso calcolare il valore a cui conv. (in funzione di x ?)

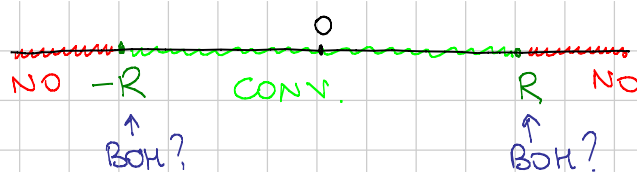
Convergenza delle serie di potenze.

Oss. banale: per $x=0$ la serie converge e la somma fa C_0

TEOREMA 1

(Raggio di convergenza) Data una qualunque serie di potenze, esiste $R \in [0, +\infty]$ $\leftarrow$ può anche valere $+\infty$ con questa proprietà

- per ogni $|x| < R$ ($-R < x < R$) la serie converge
- per ogni $|x| > R$ ($x > R$ oppure $x < -R$) la serie non converge ed anzi non verifica nemmeno la cond. nec.
- per $|x| = R$ ($x = \pm R$) dipende dai casi (i ciascuno dei 2 casi $x = R$ e $x = -R$ può conv. o non conv.)



Oss. Se $R = +\infty$ si intende che la serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$
 Se $R = 0$ allora la serie converge soltanto per $x=0$
 (in $x=0$ converge perché convergono tutte).

TEOREMA 2 (Formula per calcolare il raggio di conv.)

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ una serie di potenze. Supponiamo che esista

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

[È escluso dal
 teo. 2 il caso
 in cui tale
 limite non
 esiste]

Allora

$$R = \frac{1}{L}$$

(si intende che se $L=0$, allora $R=+\infty$
 se $L=+\infty$, allora $R=0$)

Esempio 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

[In questo caso $c_n = \frac{1}{n^2}$]

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} \rightarrow 1 = L \Rightarrow R = \frac{1}{L} = 1$$

Quindi la serie

- converge per $-1 < x < 1$
- non conv. per $|x| > 1$

In $x = \pm 1$ controllo "a mano"

$$x = 1 \leadsto \sum \frac{1}{n^2} \text{ conv. perché arit. gen. con } \alpha = 2$$

$$x = -1 \leadsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{converge per Leibnitz o per assoluta convergenza}$$

Conclusione: la serie converge $\Leftrightarrow x \in [-1, 1]$

Esempio 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ [in questo caso $a_n = \frac{1}{n}$]

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \rightarrow 1 = L \Rightarrow R = \frac{1}{L} = 1$$

Controllo gli estremi $x = \pm 1$.

$$x = 1 \leadsto \sum \frac{1}{n} \quad \text{quindi diverge}$$

$$x = -1 \leadsto \sum \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{converge per Leibnitz}$$

Conclusione: la serie converge

$$\Updownarrow \\ x \in [-1, 1[$$

Esempio 3 $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{2^n + n^2}{3^n + n^3}}_{a_n} x^n$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{2^n + n^2}{3^n + n^3}} = \sqrt[n]{\frac{2^n}{3^n} \frac{1 + \frac{n^2}{2^n}}{1 + \frac{n^3}{3^n}}} = \frac{2}{3} \frac{\sqrt[n]{1 + \frac{n^2}{2^n}}}{\sqrt[n]{1 + \frac{n^3}{3^n}}} \rightarrow \frac{2}{3} \frac{1}{1} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{L} = \frac{3}{2}$$

Controllo "a mano" $x = \pm \frac{3}{2}$

$$x = \frac{3}{2} \leadsto \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{2^n + n^2}{3^n + n^3} \cdot \frac{3^n}{2^n}}_{a_n}$$

$a_n \geq 0$ sempre

$a_n \rightarrow 1 \Rightarrow$ no cond. nec.

$\Downarrow$
diverge a $+\infty$

$$x = -\frac{3}{2} \rightsquigarrow \sum_{n=20}^{\infty} \underbrace{(-1)^n \frac{2^n + n^2}{3^n + n^3} \cdot \frac{3^n}{2^n}}_{a_n} \quad \begin{array}{l} a_{2m} \rightarrow 1 \\ a_{2m+1} \rightarrow -1 \end{array} \Rightarrow \lim a_n \text{ N.E.}$$

No cond. nec.
non conv.

Conclusione: la serie converge $\Leftrightarrow -\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$

Esempio 4

$$\sum_{n=20}^{\infty} \underbrace{\frac{5^n + 7^n}{n^{35} - n!}}_{c_n} x^n$$

c_n definitivamente è NEGATIVO
(il num. è sempre > 0 , al den. $n!$ definitiv. prevale su n^{35} . Den. $\rightarrow -\infty$)

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\frac{5^n + 7^n}{n! - n^{35}}} \rightarrow 0$$

" "
L

almeno defn.

[Brutalmente è]

$$\sim \sqrt[n]{\frac{7^n}{n!}} = \frac{7}{\sqrt[n]{n!}} \rightarrow \frac{7}{+\infty}$$

$\Rightarrow R = +\infty \left(\frac{1}{L}\right)$ Conclusione: la serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$.

Dim. TEO 2

Hp. $\sum_{n=20}^{\infty} c_n x^n \quad \sqrt[n]{|c_n|} \rightarrow L$

Controllo la condiz. nec. $c_n x^n \xrightarrow{?} 0$ il che è equivalente a dire che

$$|c_n x^n| \xrightarrow{?} 0$$

$$|c_n| \cdot |x|^n \xrightarrow{?} 0$$

Provo a fare il limite con criterio radice

$$\sqrt[n]{|c_n| \cdot |x|^n} = |x| \cdot \sqrt[n]{|c_n|} \rightarrow |x| \cdot L$$

Se $|x| \cdot L > 1$, cioè se $|x| > \frac{1}{L}$, allora $|c_n| \cdot |x|^n \rightarrow +\infty$,

dunque non tende a zero, dunque NO condiz. nec., dunque la serie NON converge

Se invece $|x| \cdot L < 1$, cioè se $|x| < \frac{1}{L}$, allora $|c_n| \cdot |x|^n \rightarrow 0$

Non solo. Per il criterio della radice applicato alla serie, si ha che

$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| |x|^n$ converge, ma allora anche

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ converge per assoluta
convergenza.

— o — o —

MAT 1 TLC

ORA 38

Serie di Taylor. Data una funzione $f(x)$ derivabile infinite volte nel p.to $x=0$ posso costruire la sua serie di Taylor

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(n)}(0)}{n!}}_{c_n} x^n$$

è la serie che ha come somme parziali i polinomi di Taylor della funzione $f(x)$

- * Per quali x converge? All'interno del raggio di conv. (+ event. estremità)
- * A cosa converge? Sarebbe bello che convergesse a $f(x)$

$$f(x) \stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Def. La funzione $f(x)$ si dice ANALITICA se vale l'uguaglianza, cioè se $f(x)$ è uguale alla somma della sua serie di Taylor.

Se mi fermo dopo n termini ho un resto "piccolo". Se invece sommo tutti gli infiniti termini (serie) ottengo esattamente $f(x)$.

TEOREMA 3

Tutte le funzioni ottenute a partire da quelle elementari mediante op. alg. e/o comp. sono analitiche se non hanno problemi in $x=0$. In particolare vale l'uguaglianza

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Per gli x per cui la SERIE CONVERGE

Esempio 1 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n!}$ converge (radice, rapporto).
Quanto fa la somma?

Questa serie è il caso particolare $x=7$ della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

↑ Questa è la serie di Taylor di $f(x) = e^x$

Per i valori di x per i quali la serie converge si ha che la somma è **ESATTAMENTE** e^x . Quindi nel nostro caso

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n!} = e^7$$

PORCHÉ IN $x=7$
LA SERIE CONVERGA, cosa
che sappiamo già.

Esempio 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$

Converge per LEIBNITZ

Questa è il caso $x=-1$ della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

Assomiglia a qualche sviluppo noto?

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

Quindi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ è la serie di Taylor di $-\log(1-x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\log(1-x)$$

per tutti i valori di x
per cui la serie
converge, in particolare
per $x = -1$

$$x \rightarrow -1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log 2$$

$$= \log \frac{1}{2}$$

Esempio 3 $2 - \frac{2^3}{3} + \frac{2^5}{5} - \frac{2^7}{7} + \frac{2^9}{9} - \dots = \arctan 2$

N0000000

Caso $x=2$ della serie di potenze

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \arctan x$$

↑ Questa uguaglianza vale
per tutti i valori di x
per cui la serie converge

In $x=2$ la serie non converge.

$$2 - \frac{2^3}{3} + \frac{2^5}{5} - \frac{2^7}{7} = \sum (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{2n+1}$$

a_n

$a_{2n} \rightarrow +\infty$
 $a_{2n+1} \rightarrow -\infty$ $\Rightarrow a_n$ non ha limite $\Rightarrow$ No condiz. nec.

↓
la serie NON
converge

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Per quali x
converge?

$$= x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}$$

Se chiamo $y = x^2$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^n}{2n+1}$$

Questa in y è una serie di potenze con $c_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{2n+1}} \rightarrow l = L \Rightarrow R = \frac{1}{L} = 1$$

Quindi la serie in y converge di sicuro per $|y| < 1$,
 quindi quella in x converge di sicuro per $|x^2| < 1$
 $\Downarrow$
 $x \in (-1, 1) \Leftrightarrow x^2 < 1$

Il raggio di convergenza della serie con l'ordian è 1.

Cosa succede in $x=1$? $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ Questa converge per Leibnitz

Ma allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

$$= \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

Esempio 3±1 $5 + \frac{5^3}{3!} + \frac{5^5}{5!} + \frac{5^7}{7!} + \frac{5^9}{9!} + \dots$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sinh 5 = \frac{e^5 - e^{-5}}{2}$$

Caso $x=5$ di

$$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots = \sinh x$$

Per quali x si ha uguaglianza? Per tutti gli x per cui la serie converge

$$\sum \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{Converge } \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{Fare criterio rapporto})$$

MAT 1 TLC

Titolo nota

ORA 39

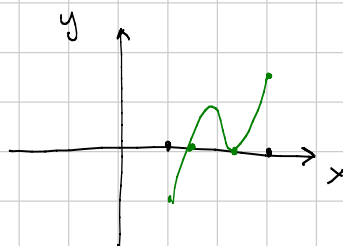
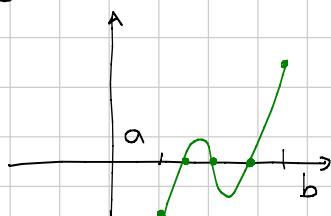
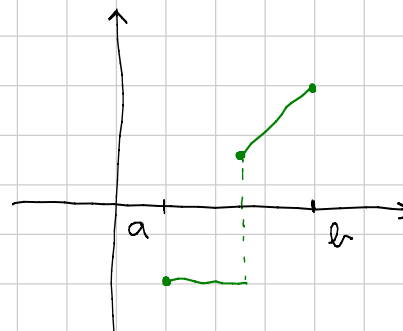
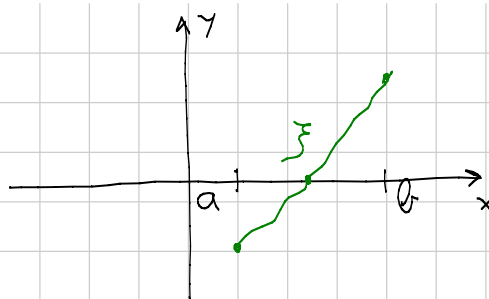
04/11/2006

Teo. esistenza degli zeri e questioni collegate

Teo. WEIERSTRASS

— o — o —

TEO. ESISTENZA DEGLI ZERI

Sia data $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo* f continua* $f(a) \cdot f(b) < 0$ $\rightarrow$ cioè $f(a)$ e $f(b)$ hanno segno DIVERSO
valori agli estremiAllora $\exists \xi \in]a, b[$ tale che $f(\xi) = 0$ Oss. ξ non è detto che sia unicoÈ fondamentale che f sia continua

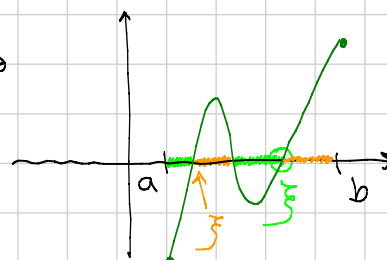
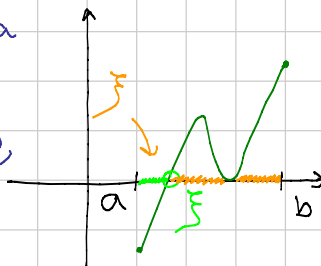
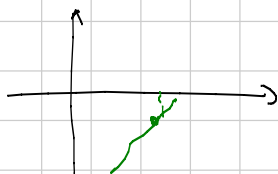
"Dim. (idea)" si usano pesantemente le propr. dei reali nel senso che si usano inf o sup

Supponiamo $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$

$$\xi = \sup \{ x \in [a, b] : f(x) < 0 \}$$

$f(\xi) < 0$, ma allora
un po' dopo ξ f
sarebbe ancora < 0 ,
dunque ξ non
sarebbe il sup

$f(\xi)$



$f(\xi) > 0$, ma allora già
un po' prima di ξ f sarebbe
stata > 0 , e quindi non
potrebbe essere il sup.



Resta solo la possibilità $f(\xi) = 0$

Oss. Si può definire ξ usando l'inf

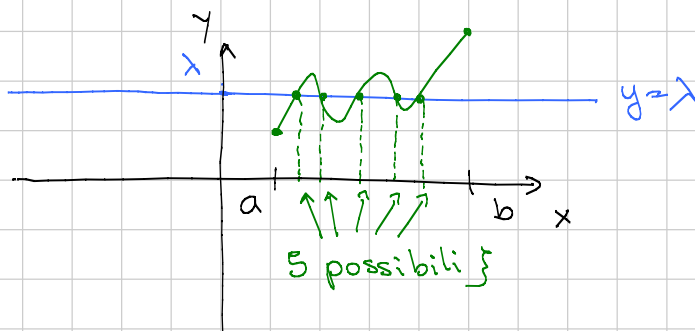
$$\xi = \inf \{ x \in [a, b] : f(x) > 0 \}$$

Può essere diverso dal precedente, ma va bene lo stesso

Prima generalizzazione. Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $f(a) < \lambda < f(b)$.

Allora $\exists \xi \in]a, b[$ tale che $f(\xi) = \lambda$.



Esercizio 1 Dimostrare che l'eq $x^7 - x = 7777$ ha almeno una soluzione reale,

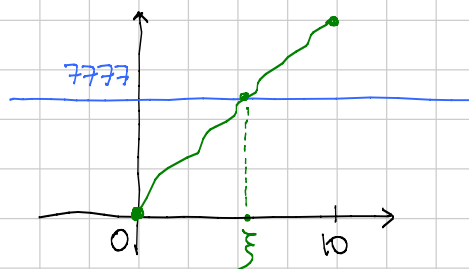
Prendo $f(x) = x^7 - x$, $f(0) = 0 < 7777$

$f(10) = 10.000.000 - 10 > 7777$

f continua

$\Rightarrow$ esiste almeno un p.to

$\xi \in (0, 10)$ t.c. $f(\xi) = 7777$



Esercizio 2 Dire se esistono soluzioni dell'eq

$$x^{44} + \sin x^{88} + x^{20} \arctan x^3 + \log(1+x^2) = 2006$$

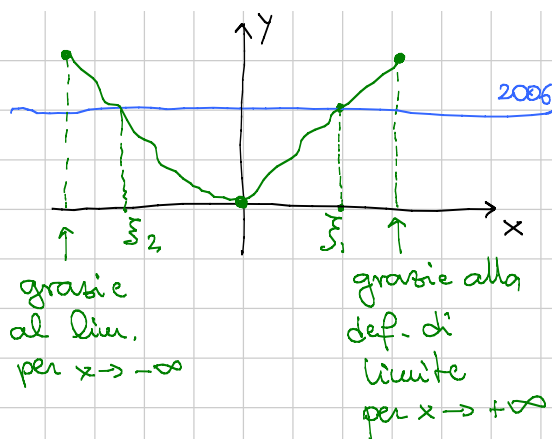
Dimostriamo che ci sono almeno 2 soluzioni. Chiamo $f(x)$ la funzione a sinistra. $f(x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$.

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow$$

per x abbastanza grandi
 $f(x) > 2006$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$



Esercizio 3 Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = x^7 - x^5 \sin x + \arctan x^{12}$$

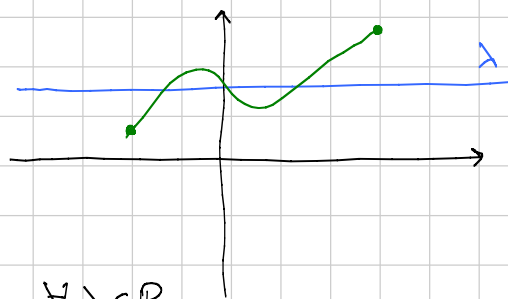
f è surgettiva? [Surgettiva $\Leftrightarrow$ il grafico incontra ogni // asse x in almeno 1 p.to]

E' equivalente a chiedersi se per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ l'eq.

$$f(x) = \lambda \text{ ha almeno 1 soluz.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$



segue che $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
 esiste almeno un p.to
 x_1 in cui $f(x_1) > \lambda$ e
 almeno un p.to x_2 in
 cui $f(x_2) < \lambda$

f è SURGETTIVA.

Esempio 4 $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \log x - x^{30} + x^4 \arctan e^x$$

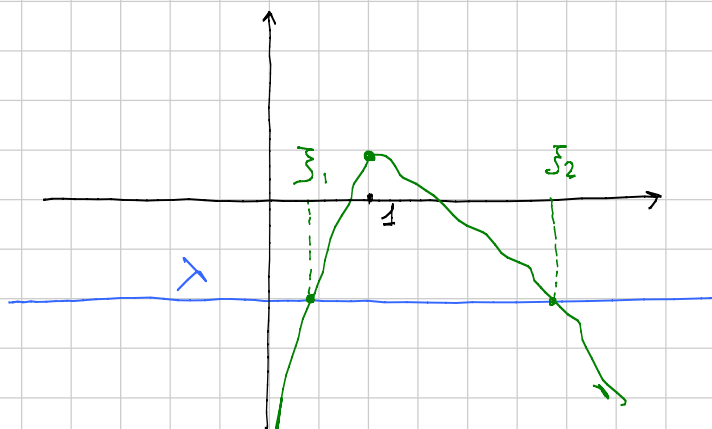
È iniettiva? No!

f continua,

$$f(1) = -1 + \arctan e$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$



Preso un qualunque $\lambda < f(1)$ esistono
2 pti ξ_1 e ξ_2 in cui $f = \lambda$
 $\downarrow$ $\downarrow$
 $\in (0, 1)$ > 1

MAT 1 TLC

ORA 40

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Def. Dico che $M \in \mathbb{R}$ è il max di f in A , e scrivo

$$M = \max \{ f(x) : x \in A \} \leftarrow \text{Massima quota raggiunta dalla funzione in } A$$

se

$$(i) \quad f(x) \leq M \quad \forall x \in A$$

$$(ii) \quad \text{esiste } x \in A \text{ b.c. } f(x) = M$$

Tutti i punti x in cui $f(x) = M$ si dicono

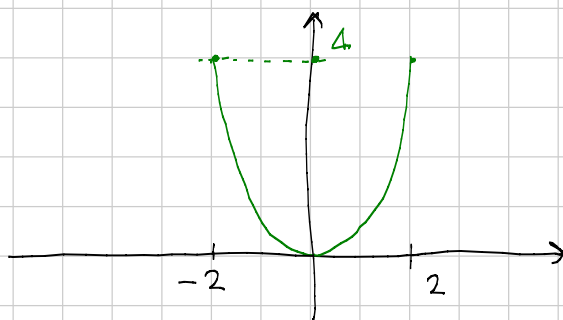
PUNTI DI MASSIMO

IDEM per minimo e p.ti di minimo

Esempio 1

$$\max \{ x^2 : x \in [-2, 2] \} = 4$$

p.ti di max: $x=2$ e $x=-2$



$$\min \{ x^2 : x \in [-2, 2] \} = 0$$

p.to di min: $x=0$

Oss. max e min NON sono obbligati ad esistere

Esempio $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \arctan x$

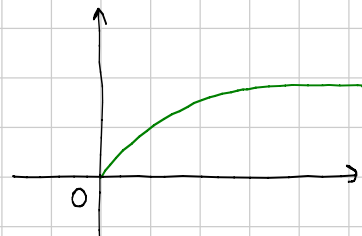
$$\max \{ \arctan x : x \in [0, +\infty) \} \text{ N.E.}$$

$$\sup \{ \quad \quad \quad \} = \pi/2$$

$$\min \{ \arctan x : x \in [0, +\infty) \} = 0$$

$$\inf \{ \quad \quad \quad \} = 0$$

p.to di min: $x = 0$

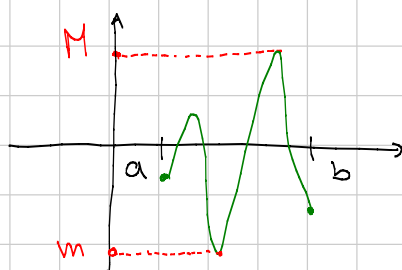


intervallo compresi gli estremi

TEOREMA WEIERSTRASS

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua

Allora $\max \{ f(x) : x \in [a, b] \}$ esistono
 $\min \{ f(x) : x \in [a, b] \}$ PER FORZA.



NB Max e min sono per forza unici (quando esistono)

I pti di max e min possono essere + di uno.

Oss.1 È importante che l'intervallo contenga entrambe gli estremi.

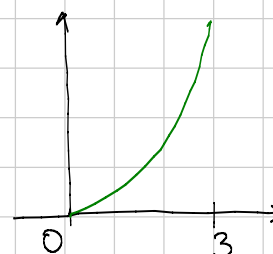
Es.

$$\max \{ x^2 : x \in [0, 3) \} \text{ N.E.}$$

$$\sup \{ \quad \quad \quad \} = 9$$

$$\min \{ \quad \quad \quad \} = 0$$

$$\inf \{ \quad \quad \quad \} = 0$$



p.to di min $x=0$

Oss. 2 È importante che l'intervallo sia limitato

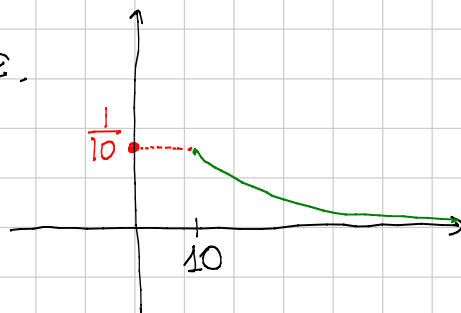
Es. $\min \left\{ \frac{1}{x} : x \geq 10 \right\}$ N.E.

$$\inf \{ \} = 0$$

$$\max \{ \} = \frac{1}{10}$$

$$\sup \{ \} = \frac{1}{10}$$

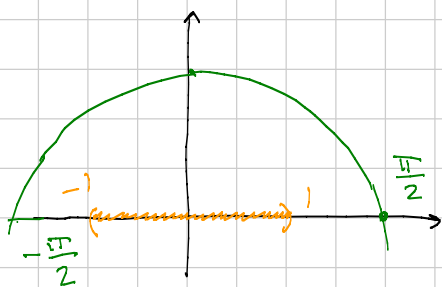
p.to di max: $x = 10$



Esempio 1 Domanda: esiste $\max \{ \underbrace{e^{\sin x} - x^8}_{f(x)} : x \in [0, 12] \}$?

SI ; $f(x)$ continua
intervallo con estremi $\Rightarrow$ ESISTE

Esempio 2 Esiste $\max \{ \cos x : x \in (-1, 1) \}$? SI !



↑
senza estremi

↓
Hp W non verificate

↓
BOH

$\max = 1$, p.to di max: $x = 0$

Prima estensione Esiste

$$\max \{ \underbrace{e^{\sin x} + \sin^8(3x) + \log(5 + \cos x)}_{f(x)} : x \in \mathbb{R} \}$$

Hp W NO

$f(x)$ PERIODICA
CONTINUA

$$f(x + 2\pi) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Consideriamo $\max \{ f(x) : x \in [0, 2\pi] \} = M$
 $\uparrow$
 esiste per W

Dico che $\max \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \} = M$ (stesso M)

perché ogni valore che $f(x)$ assume al variare di $x \in \mathbb{R}$ lo assume già al variare di $x \in [0, 2\pi]$.

Seconda estensione

$$\max \min \left\{ x^{22} - \arctan x^{19} + x^3 \cos x : x \in \mathbb{R} \right\}$$

max N.E. $\sup = +\infty$ (basta fare $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$)

Dico che min ESISTE

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

W ESTESO Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua

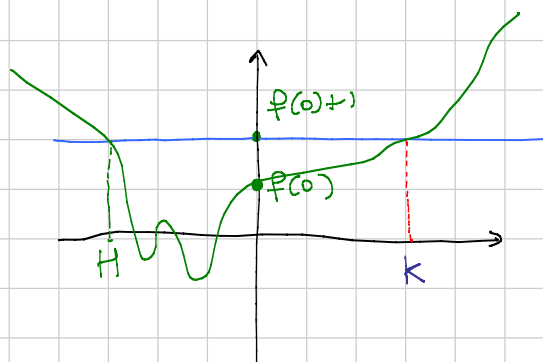
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

Allora $\min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$
 esiste PER FORZA.

Dim. W esteso Prendo $f(0)$

$$f(x) \geq f(0) + 1 \quad \text{per ogni } x \geq K$$

$$f(x) \geq f(0) + 1 \quad \text{" " } x \leq H$$

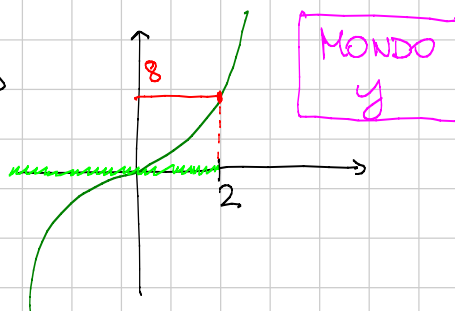


Quindi il minimo viene deciso tra $[H, K]$ e qui vale W .

$$\max \{ x \in \mathbb{R}; x^3 \leq 2 \} = \sqrt[3]{2}$$

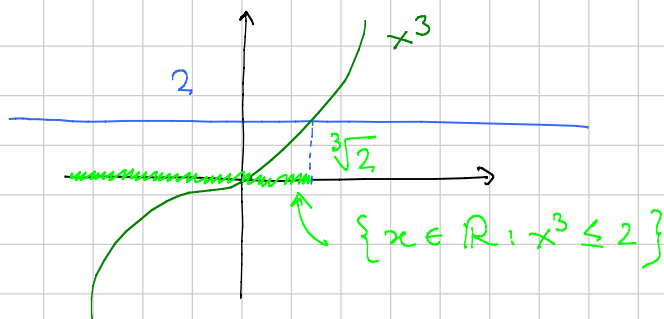
$$\max \{ x^3; x \leq 2 \} = 8 \rightarrow$$

Trovare il max di $f(x) = x^3$ al variare di $x \leq 2$.



→ Trovare il max degli x il cui cubo è ≤ 2 .

= Risolvi la diseq $x^3 \leq 2$, trovi $x \leq \sqrt[3]{2}$ e prendi il max dell'insieme



MAT 1 TLC

ORA 41

Titolo nota

07/11/2016

Teo WEIERSTRASS $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua

Allora

$$\max_{\min} \{f(x) : x \in [a, b]\}$$
 esistono per FORZA

max/min valore assunto da $f(x)$
 quando x varia in $[a, b]$ "sono delle y ".

Poichè max esiste sarà il valore assunto da $f(x)$ in determinati p.ti $\in [a, b]$, detti p.ti di max ("delle x ").

RICERCA DEI PUNTI DI MAX e DI MIN.

Teorema Supponiamo che $x_0 \in (a, b)$ sia p.to di max
 e supponiamo che $f'(x_0)$ esista.

x_0 è interno
all'intervallo

Allora $f'(x_0) = 0$.

Dim. Se $f'(x_0)$ non fosse 0, allora può essere > 0 oppure < 0 .
 Supponiamo che sia > 0 . Ma allora

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0$. Allora per permanenza del segno

$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} > 0$ per h abbastanza vicini a 0,
 cioè per ogni $h \in (-\delta, \delta)$
 poi di prendere δ piccolo

Se la frazione è positiva vuol dire che num. e den. hanno lo stesso segno. Quindi

per $h \in (0, \delta)$ si ha $f(x_0+h) - f(x_0) > 0$, cioè

$$f(x_0+h) > f(x_0)$$

Questo dice che "un po' a destra di x_0 " la funzione vale più che in $x_0 \Rightarrow x_0$ non è p.to di max.

Analogamente

per $h \in (-\delta, 0)$ si ha $f(x_0+h) - f(x_0) < 0$ cioè

$$f(x_0+h) < f(x_0)$$
 "un po' a sinistra di x_0 "
 la funzione vale meno che in x_0

Supponiamo ora che sia $f'(x_0) < 0$. Allora per $h \in (-\delta, \delta)$ si ha che

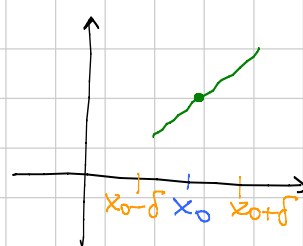
$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} < 0. \text{ Quindi}$$

- "un po' a destra di x_0 " ($h \in (0, \delta)$) si ha $f(x_0+h) - f(x_0) < 0$, quindi $f(x_0+h) < f(x_0)$ "f vale meno"
- "un po' a sinistra di x_0 " ($h \in (-\delta, 0)$) si ha $f(x_0+h) - f(x_0) > 0$ quindi $f(x_0+h) > f(x_0)$ "f vale più", quindi non può essere un p.to di max.

Non potendo essere $f'(x_0) > 0$, né $f'(x_0) < 0$ sarà per forza $f'(x_0) = 0$.

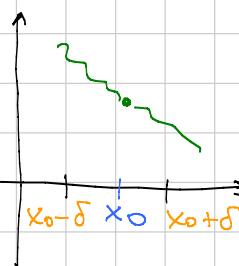
MONOTONIA 1 Se $f'(x_0) > 0$, allora

$$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$$


Se $f'(x_0) < 0$, allora

$$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$$

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$$


"Quanto è grande δ dipende dal punto"

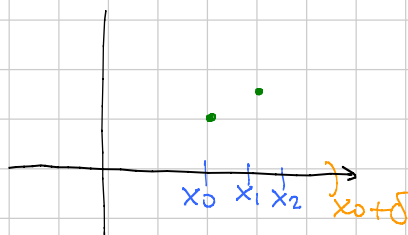
CONSEGUENZA Se $x_0 \in (a, b)$ è un p.to di max / min, allora

$$f'(x_0) \begin{cases} < \\ = 0 \\ \text{N.E.} \end{cases}$$

OSSERVAZIONE Monotonia 1 non dice che

se $f'(x_0) > 0$, allora $f(x)$ è deb. cresc. in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Monotonia 1 dice che $f(x_1) > f(x_0)$
e dice che $f(x_2) > f(x_0)$



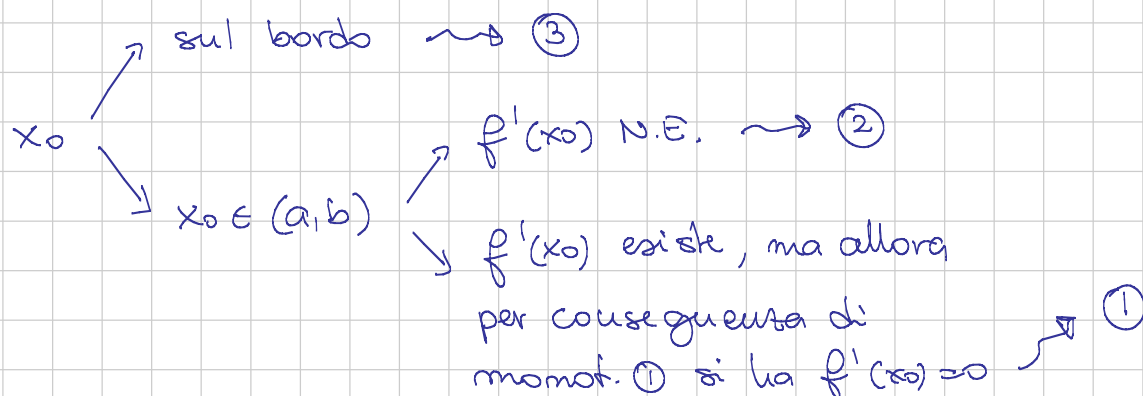
Monotonia 1 non dice nulla sul
+ grande tra $f(x_1)$ e $f(x_2)$

CONSEGUENZA Dove cercare i p.ti di max min?

In 3 categorie di punti

- ① Punti $x_0 \in (a,b)$ in cui $f'(x_0) = 0$ STAZIONARI INTERNI
- ② Punti $x_0 \in (a,b)$ in cui $f'(x_0)$ N.E. SINGOLARI INTERNI
- ③ Sul bordo (quindi $x=a$ oppure $x=b$) BORDO

Perché? Sia x_0 p.to di max (IDEM se x_0 p.to di min.)



Esempio 1

$$\max \min \{ |x| : x \in [-2, 1] \}$$



Max = 2, p.to di max: $x = -2$

min = 0, p.to di min: $x = 0$

BORDO

SINGOLARE
INTERNO

Non ci sono p.ti stazionari

Esempio 2

$$\max \min \{ x^3 - x : x \in [0, 1] \}$$

Esistono per Weierstrass. Cerco i candidati al eserepti di max / min

② Sing. interni : $\emptyset$ (la derivata esiste ovunque)

① Stat. interni : $f'(x)=0$, $3x^2-1=0$, $x^2=\frac{1}{3}$
 $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ Solo $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ è interno a $(0,1)$

③ Bordo : $x=0$ e $x=1$.

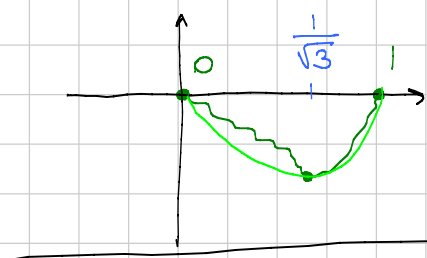
Quindi ho 3 candidati ad essere pti di max /min

$$x=0 \quad f(0)=0$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$x=1 \quad f(1)=0$$

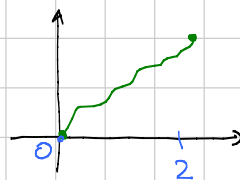
Conclusione : max = 0 , p.ti di max : $x=0$ e $x=1$
 min = $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$, p.to di min : $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$



Esempio 3

$$\max_{\min} \{ x e^x : x \in [0, 2] \}$$

Esistono per W.



② Sing. interni : $\emptyset$

③ $x=0$ e $x=2$

① stat. int. $f'(x)=0$; $e^x + x e^x = (x+1)e^x = 0 \Leftrightarrow x=-1$
 $x=-1$ non è interno $\Rightarrow \emptyset$

$x=0$; $f(0) = 0$
 p.to min min

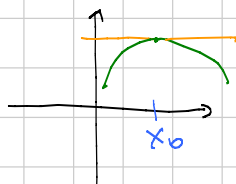
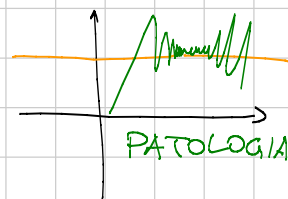
$x=2$; $f(2) = 2e^2$
 p.to max Max

MAT 1 TLC

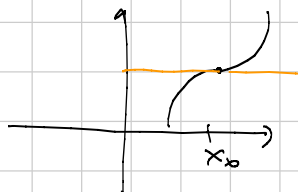
ORA 42

Studio LOCALE DI FUNZIONI

Cosa accade vicino ad un pto stazionario?
 Supponiamo $f'(x_0) = 0$.



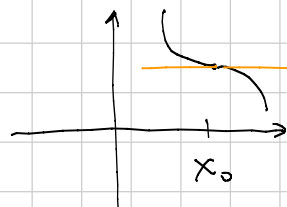
x_0 p.to di
max loc.



x_0 p.to di flesso
a tg. orizzontale
crescente



x_0 p.to di
min loc.



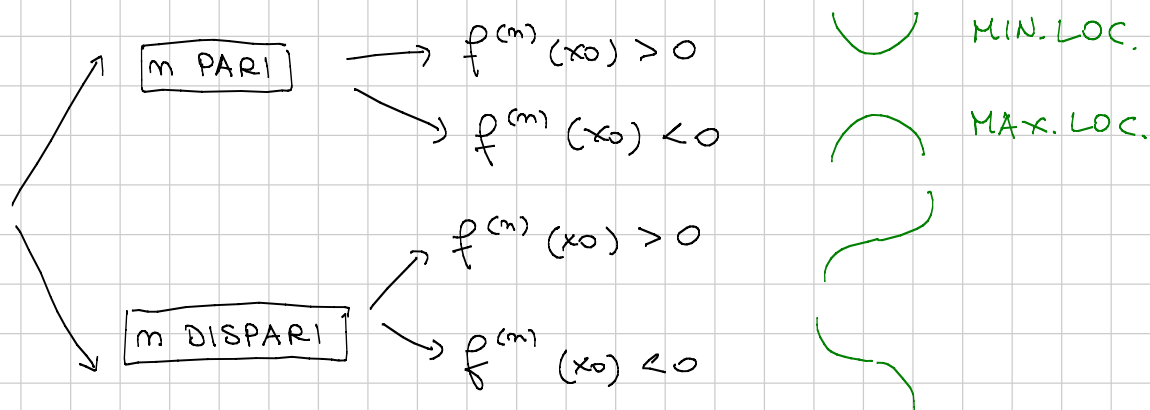
x_0 p.to di
flesso a tg.
orizz. decresc.

CRITERIO DELLE DERIVATE SUCCESSIVE

Supponiamo che $f'(x_0) = 0$. Calcolo le derivate succ. in x_0
 fino a quando ne trovo una $\neq 0$.

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(m-1)}(x_0) = 0$$

$$f^{(m)}(x_0) \neq 0$$



Dimostrazione di qualche caso particolare.

$$x_0 = 0, \quad m = 6, \quad f^{(6)}(0) = \alpha > 0$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(6)}(0)}{6!} x^6 + o(x^6)$$

$$= f(0) + \frac{\alpha}{6!} x^6 + o(x^6)$$

↑ i termini in mezzo non ci sono perché
 $f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(5)}(0) = 0$

Di conseguenza $f(x) - f(0) = \frac{\alpha}{6!} x^6 + o(x^6)$

Divido per x^6 : $\frac{f(x) - f(0)}{x^6} = \frac{\alpha}{6!} + \boxed{\frac{o(x^6)}{x^6}} \rightarrow 0$ defn. di $o(x^6)$

Faccio lim per $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x^6} = \frac{\alpha}{6!} > 0$$

Di conseguenza la frazione è > 0 per ogni $x \in (-\delta, \delta)$
 con δ suff. piccolo $x \neq 0$

Il den. è sempre > 0 , quindi anche il num. sarà > 0 per $x \in (-\delta, \delta)$
 $x \neq 0$

Quindi $f(x) - f(0) > 0$ per $x \in (-\delta, \delta), x \neq 0$

cioè $f(x) > f(0) \quad \forall x \in (-\delta, \delta), x \neq 0$.

Quindi "vicino a 0" f vale di + che in 0 $\Rightarrow$ min. loc.

Stesso discorso per tutte le potenze pari (Den sempre > 0).

Vediamo ora il caso $x_0=0$, $m=7$, $f^{(7)}(0) = \alpha > 0$

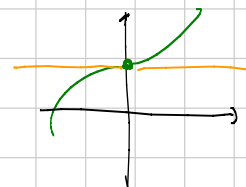
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x^7} = \frac{\alpha}{7!} > 0$$

Quindi la frazione è $> 0 \quad \forall x \in (-\delta, \delta)$, $x \neq 0$

Per $x \in (0, \delta)$ Den $> 0 \Rightarrow$ Num $> 0 \Rightarrow f(x) > f(0)$

Per $x \in (-\delta, 0)$ Den $< 0 \Rightarrow$ Num $< 0 \Rightarrow f(x) < f(0)$

$f(x)$ vale di + un po' a destra di $x=0$
vale di - un po' a sinistra di $x=0$



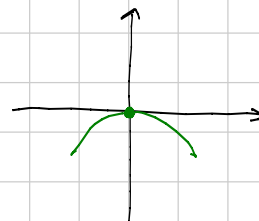
Altro modo di dire la stessa cosa: una funzione si comporta vicino ad $x=0$ come il primo termine non nullo (e non costante) del suo sviluppo di Taylor.

Esempio 1 $f(x) = x^4 - \sin x^2 \quad f(0) = 0$

$$f(x) = -x^2 + o(x^2)$$

primo termine
non nullo e non
costante

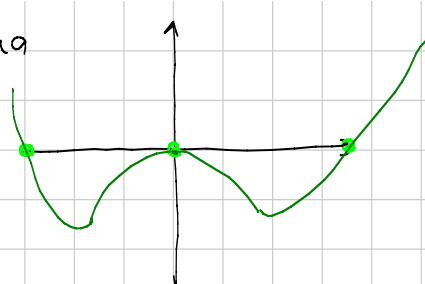
$f(x)$ per x
vicini a zero si
comporta come $-x^2$



Esempio 2 Dim. che l'eq. $x^4 - \sin x^2 = 0$ ha almeno 3 soluzioni reali.
Una soluzione è $x=0$

Studio loc. $\Rightarrow f(x) < 0$ un po' prima
e un po' dopo $x=0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$



Questo fa guadagnare una soluz. > 0
e una soluz. < 0
— 0 —

Esempio 3

$$\sin^2 x - \sin x^2$$

$x=0$ non può essere p.to
di flesso (f è PARI)

Cerco 1° termine non nullo in Taylor

DOPPIO PRODOTTO

$$f(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 - x^2 + o(x^4) = \cancel{x^2} - \frac{x^4}{3} - \cancel{x^2} + o(x^4)$$

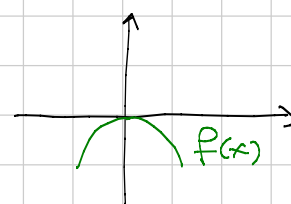
$$= -\frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

Quindi vicino a $x=0$ $f(x)$ si comporta come $-\frac{x^4}{3}$,
dunque $x=0$ è un p.to di max. loc.

TERMINOLOGIA

max
min locale / relativo

max
min globale / assoluto



N.B.

assoluto $\Rightarrow$ relativo

$f(x) = x^4$ ha un p.to di min. loc. per $x=0$ VERA
" " " " " glob. per $x=0$ VERA

Esempio 4

$$\boxed{\log(1+x^{100})} + \boxed{(\sin x^2)^{60}} - \boxed{\arctan x^{110}} = f(x)$$

$\overset{11}{x^{100}} + \dots$
 $\overset{11}{x^{120}} + \dots$
 $\overset{11}{x^{110}} + \dots$

$$f(x) = x^{100} + o(x^{100}) \Rightarrow \text{min loc. nell'origine}$$

Ripasso $f(x) = \log(1+x^{100}) + \sin x^{120} - \arctan x^{110}$

Delle prime 500 derivate di $f(x)$, quante NON si annullano per $x=0$?

$$f(x) = x^{100} - \frac{x^{200}}{2} + \frac{x^{300}}{3} - \frac{x^{400}}{4} + \frac{x^{500}}{5} +$$

$$+ x^{120} - \frac{x^{360}}{6} - x^{110} + \frac{x^{330}}{3} + o(x^{500})$$

Questo vuol dire che gli unici termini con coeff. $\neq 0$ (fino al 500-esimo) sono quelli scritti.

Quindi sono solo 3.

Esempio Il coeff. di x^{350} sarebbe $\frac{f^{(350)}(0)}{350!}$

Il coeff. $\bar{e} = 0 \Rightarrow f^{(350)}(0) = 0$

Il coeff. di x^{330} sarebbe $\frac{f^{(330)}(0)}{330!} = \frac{1}{3}$

Quindi $f^{(330)}(0) = \frac{330!}{3}$

MAT I TLC

Titolo nota

ORA 43

08/11/2006

Teoremi sulle funzioni derivabili

$$W \Rightarrow R \Rightarrow C \Rightarrow L$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$H \quad M$$

$$\downarrow$$

$$T$$

W : WEIERSTRASS

R : ROLLE

C : CAUCHY

L : LAGRANGE

H : DE L'HÔPITAL

T : TAYLOR

M : monotonia

W: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora max e min di f in $[a, b]$ esistono

TEO. DI ROLLE Sia data $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Ipotesi:

(i) f continua in $[a, b]$

(ii) f derivabile in (a, b) [se è derivabile in $[a, b]$ ancora meglio]

(iii) $f(a) = f(b)$

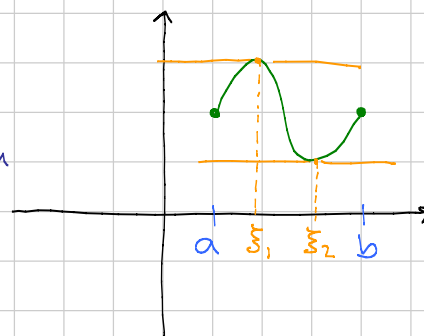
tesi: $\exists \xi \in (a, b)$ tale che $f'(\xi) = 0$.

Oss. ξ non è obbligato ad essere unico

Dim.: per Weierstrass $f(x)$ ha max e min in $[a, b]$.

Sia x_0 un p.to di max o di min.

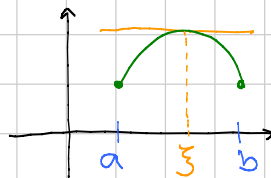
Abbiamo visto prec. che x_0 può essere



- stazionario interno : se è così abbiamo trovato un punto $x_0 \in (a,b)$ t.c. $f'(x_0) = 0$
- singolare interno : per $\mathcal{Q}'$ Hp (ii) questi non ci sono
- sul bordo e sarebbe un guai.

Se almeno uno tra i pti di max e di min è interno, allora Ok

Se invece i pti di max e min sono tutti sul bordo vuol dire che la funzione è costante, ma in questo caso $f'(x) = 0$ in tutti i punti $x \in (a,b)$ (e in realtà tutto $\mathcal{Q}'$ intervallo è fatto da punti di max e di min).



TEO. DI CAUCHY Siano $f, g : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$

Ipotesi: (i) f e g continue in $[a,b]$
 (ii) f e g derivabili in (a,b)

Tesi : esiste $\xi \in (a,b)$ t.c.

$$[f(b) - f(a)] g'(\xi) = [g(b) - g(a)] f'(\xi)$$

Se inoltre

(iii) $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a,b)$

allora $g(b) \neq g(a)$ e dividendo
 ottengo

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Dim. Considero la seguente funzione

$$\varphi(x) = \underbrace{[f(b) - f(a)]}_{\text{numero}} g(x) - \underbrace{[g(b) - g(a)]}_{\text{numero}} f(x)$$

Proprietà di $\varphi(x)$: (i) φ è continua in $[a, b]$

(ii) φ è derivabile in (a, b)

(iii) $\varphi(a) = \varphi(b) \leftarrow \text{VERIFICA DA FARE}$

$$[f(b) - f(a)] g(a) - [g(b) - g(a)] f(a) \stackrel{?}{=} [f(b) - f(a)] g(b) - [g(b) - g(a)] f(b)$$

φ verifica le Hp di Rolle, quindi $\exists \xi \in (a, b)$ t.c. $\varphi'(\xi) = 0$

$$\varphi'(\xi) = [f(b) - f(a)] g'(\xi) - [g(b) - g(a)] f'(\xi) = 0 \quad \text{e questa è la prima tesi}$$

Se in + supponiamo che $g'(x) \neq 0$ in (a, b) intanto possiamo dividere per $g'(\xi)$.

Per concludere mi serve solo dir. che $g(b) \neq g(a)$

Se in fatti fosse $g(a) = g(b)$ potrei applicare Rolle a $g(x)$ e ottenere che $g'(x)$ si annulla da qualche parte, ma per Hp questo non accade.

— o — o —

TEO. LAGRANGE Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Ipotesi: (i) f continua in $[a, b]$

(ii) f derivabile in (a, b)

Tesi: $\exists \xi \in (a, b)$ t.c.

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

Dim. riscriviamo la tesi nella forma $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(\xi)}{1}$

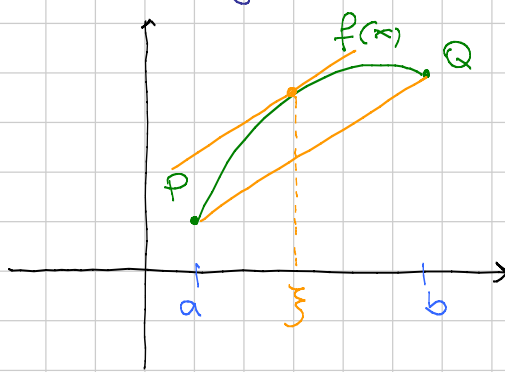
Questo ricorda il teo. di Cauchy con $g(x) = x$. Infatti $g(b) - g(a) = b - a$, $\boxed{g'(x) = 1} \Rightarrow g'(\xi) = 1$ $g' \neq 0$ sempre

Quindi Lagrange è una conseguenza di Cauchy.

Interpretazione geometrica

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \text{coeff. ang. retta } PQ$$

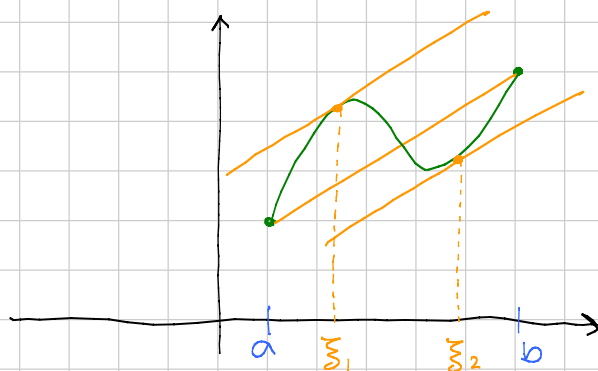
$$f'(\xi) = \text{coeff. ang. retta tg nel p.to del grafico corr. a } \xi$$



Lagrange geom.: c'è almeno un p.to $\xi \in (a, b)$ t.c., la tangente al grafico in $(\xi, f(\xi))$ è parallela alla retta PQ.

Dal punto di vista geom. Lagrange generalizza Rolle

Oss. Caso in cui ξ non è unico:



Dim. di un caso particolare di de L'Hôpital a partire da Cauchy

Caso particolare : $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ della forma $\frac{0}{0}$
 $\uparrow$
 reale

Barando un po', posso far finta che sia $f(x_0) = g(x_0) = 0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$

$\uparrow$
 Ho tolto
 0 sopra
 e sotto

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi_x \rightarrow x_0^+} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$

$$\begin{array}{c} x_0 \quad \xi_x \quad x \\ | \quad \cdot \quad | \\ \hline \end{array}$$

Ovviamente per x diversi
 trovo ξ diversi

Quando $x \rightarrow x_0^+$,
 $\xi_x \rightarrow x_0^+$ per i
 carabinieri

MAT I TLC

ORA 44

Monotonia 1

↑
Ipotesi: segno
di f' in un
punto

$f'(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$ un po' a dx di x_0
 $f(x) < f(x_0)$ un po' a sx di x_0

$f'(x_0) < 0 \Rightarrow \dots$

Monotonia 2

↑
Ipotesi: segno
di f' in un
intervallo

NO!
È FALSA

Sia $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ continua e derivabile.

① $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ strett. cresc. in (a,b)

② $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ deb. cresc. in (a,b)

③ f deb. cresc. in $(a,b) \Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

④ f strett. cresc. in $(a,b) \Rightarrow f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$

Esempio $(a,b) = (-1,1)$, $f(x) = x^3$

$f(x)$ è strett. crescente

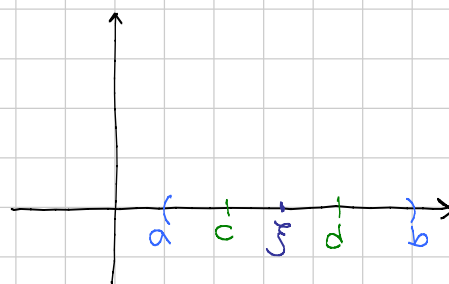
$f'(x) = 3x^2$ si annulla per $x=0$,
quindi $f'(x)$ non è strett. positiva



Dim. di ① e ②

Considero $a < c < d < b$

$$f(d) - f(c) = \underbrace{(d-c)}_{>0} \underbrace{f'(\xi)}_{\substack{>0 \text{ (caso ①)} \\ \geq 0 \text{ (caso ②)}}}$$



Nel caso ① ottengo $f(d) - f(c) > 0$, cioè $f(d) > f(c)$

$\Rightarrow f$ strett. cresc.

Nel caso ② ottengo $f(d) - f(c) \geq 0$, cioè $f(d) \geq f(c)$
 $\Rightarrow f$ deb. cresc.

Dim. di ③ Hp. f deb. crescente. Tesi $f'(x) \geq 0$ ovunque in (a,b)

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

In ogni caso la frazione è ≥ 0
 ed il limite di roba ≥ 0 è
 ancora ≥ 0

$\rightarrow$ per $h > 0$ abbiamo
 denom. > 0 e num. ≥ 0
 perché f è deb. cresc.
 per $h < 0$ abbiamo
 denom. < 0 e num. ≤ 0
 perché f è deb. cresc.

Se provassi a dim. ④ in questo modo appena usato, avrei
 che la frazione è sempre > 0 , ma il limite di roba > 0
 può anche venire $= 0$ (le DISUGUAGLIANZE STRETTE NON
 passano al limite)

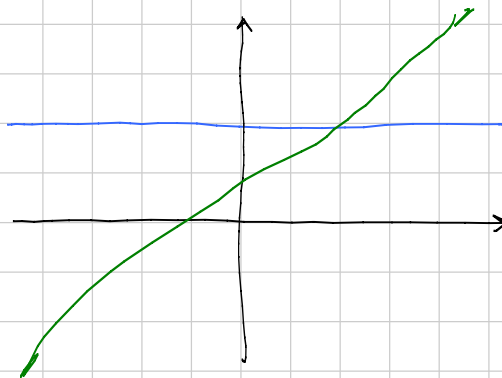
Esempio 1 Dimostrare che l'eq. $x + e^x = 2006$ ha esatta-
 mente una soluzione reale $f(x)$

Dim. intuitiva che ha almeno 1 solus.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$\Rightarrow$ basta per concludere che $f(x)$
 è SURGETTIVA



Per l'unicità calcoliamo $f'(x) = 1 + e^x > 0$.

Per monotonia 2, $f(x)$ è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$,
 dunque iniettiva, quindi al max 1 soluz.

In realtà abbiamo dimostrato che $f(x)$ vista come $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è
 INIETTIVA e SURGETTIVA, dunque

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ l'eq. $f(x) = \lambda$ ha un'unica sol. reale

Esempio 2

$$\boxed{3x + \cos x} = 2006$$

$f(x)$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è surgettiva: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

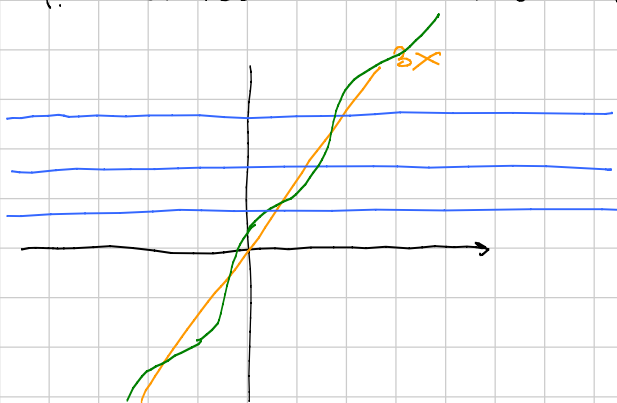
f continua + teo. esistenza degli zeri

Per l'iniettività calcoliamo $f'(x)$

$$f'(x) = 3 - \sin x \geq 2 > 0$$

$\Rightarrow$ per monotonia 2, $f(x)$ è strett. cresc. in $\mathbb{R}$, dunque
 iniettiva.

Quindi per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, l'eq. $3x + \cos x = \lambda$ ha esattamente una soluz. reale.



Esempio 3 $f(x) = x + \sin x$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

f è surgettiva per il solito motivo (limiti per $x \rightarrow \pm\infty$)

$$f'(x) = 1 + \cos x \geq 0 \quad (\text{ma può annullarsi})$$

Monotonia ② $\Rightarrow f$ è DEBOLMENTE crescente, ma questo non basta per l'iettività.

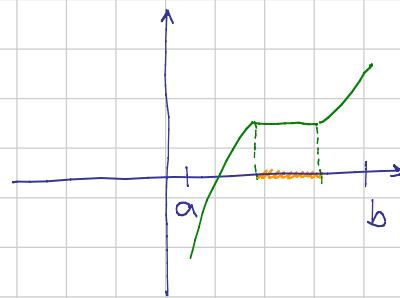
MONOTONIA ③ Sia $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ continua e derivabile.

Supponiamo che $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$ e che non esista nessun intervallo contenuto in (a,b) in cui $f'(x)$ vale sempre.

Allora $f(x)$ è STRETT. CRESCENTE

$f'(x)$ si annulla
SPORADICAMENTE

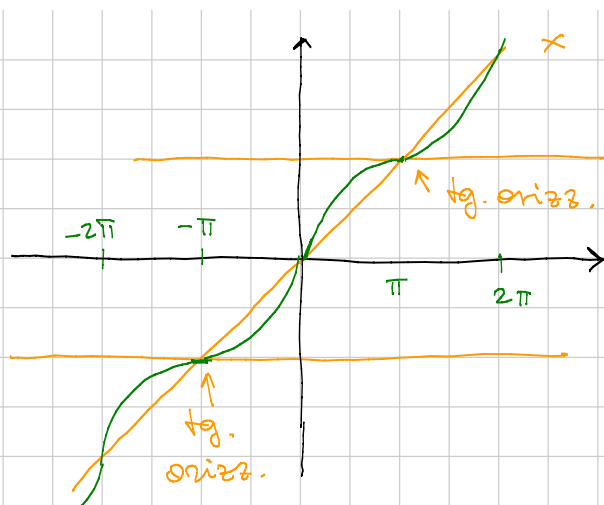
Dim. Per Monotonia ② già sappiamo che $f(x)$ è DEB. cresc.
Supponiamo per assurdo che f non sia strett. cresc.
Ma allora f avrebbe dei tratti piatti
Ma allora ci sarebbe un intero
intervallo in cui $f'(x)$ si annulla,
cosa che abbiamo escluso per
ipotesi



Tornando all'esempio 3 abbiamo che

$$f'(x) = 1 + \cos x \geq 0 \text{ sempre e } f'(x) = 0 \text{ sporadicamente} \\ (\text{solo per } x = \pi + 2k\pi)$$

Per monotonia 3 segue che f è
STRETT. CRESCENTE, dunque INIETTIVA



MAT I TLC

ORA 45

STUDIO GLOBALE DI FUNZIONI

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

① SIMMETRIE : f è dispari

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x}{x^2 - 1} = -f(x)$$

② Per quali x ha senso (burocrazia) $x \neq \pm 1$ ③ Per quali x è continua : per ogni $x \neq \pm 1$

④ Limiti agli estremi della zona di definizione



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

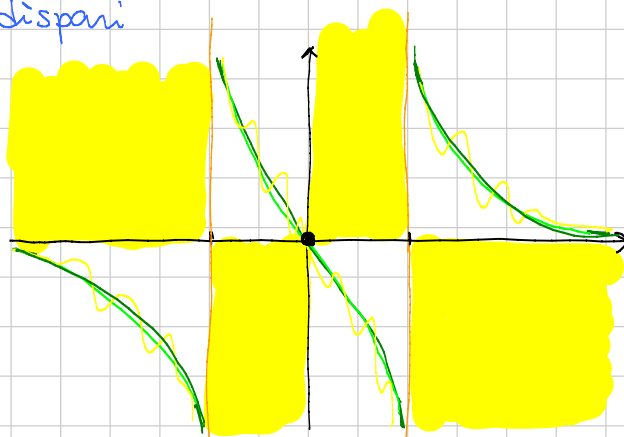
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$$

Quella a
dx sono
quelli a sx
cambiati
di segno
perché f è dispari

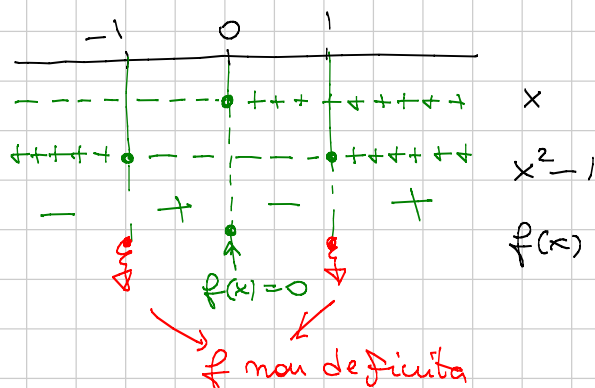
⑤ Zeri e segno Risolvere

l'eq. $f(x) = 0$ e lediseq. $f(x) > 0$ $f(x) < 0$ 

$$\frac{x}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow x=0 \quad (\text{si annulla solo per } x=0)$$

$$\frac{x}{x^2-1} > 0$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 0) \text{ oppure } x > 1$$



⑥ Per quali x è derivabile: per ogni $x \neq \pm 1$

$$f'(x) = \frac{x^2-1-2x-x}{(x^2-1)^2} = \frac{-1-x^2}{(x^2-1)^2} = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$$

⑦ Zeri e segno di $f'(x)$: risolvere l'eq. $f'(x)=0$ e la diseq. $f'(x) > 0$

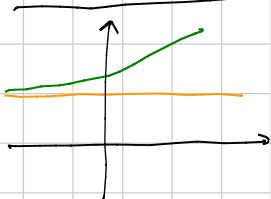
Nel nostro caso $f'(x)=0$ MAI e $f'(x) < 0 \quad \forall x \neq \pm 1$

$\Rightarrow f(x)$ è strett. decrescente in ciascuno dei tratti dell'insieme di definizione

⑧ Punti di max/min locali e globali: NESSUNO

⑨ Asintoti $\rightarrow$ ORIZZ. $y=0$
 $\rightarrow$ VERT. $x=1$ e $x=-1$
 $\rightarrow$ OBLIQUI nessuno

ASINTOTI ORIZZ.



La retta $y = \alpha$ è asiut. orizz. di $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ se

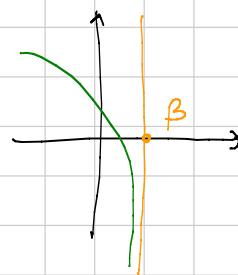
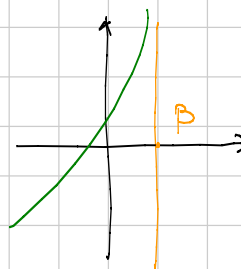
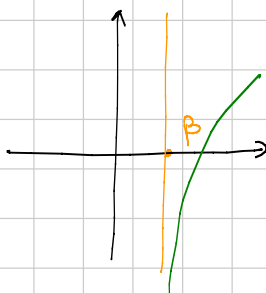
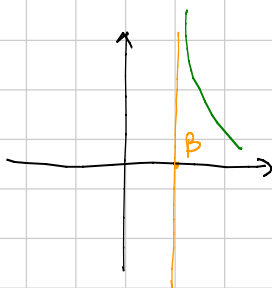
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \alpha$$



ASINTOTI VERTICALI

La retta $x = \beta$ è asint. vert. di $f(x)$ se si ha almeno uno dei seguenti 4 limiti

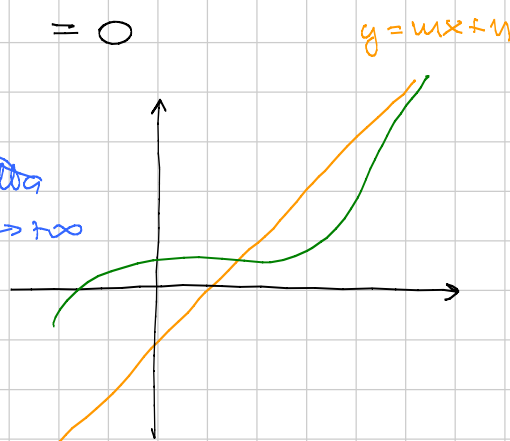
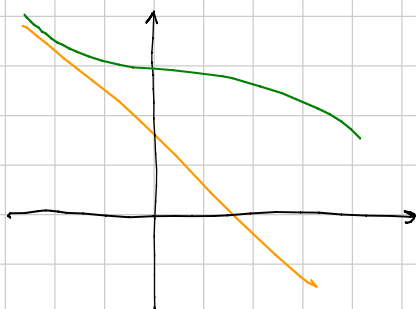
$$\lim_{x \rightarrow \beta^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \beta^+} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = -\infty$$

ASINTOTI OBLIQUI

Una retta $y = mx + n$ si dice asintoto obliquo di $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ se

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ [x \rightarrow -\infty]}} [f(x) - mx - n] = 0$$

La differenza tra la funzione e la retta tende a zero per $x \rightarrow +\infty$



Criteri. $y = mx + n$ è asint. obliquo di $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ 

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} ; m = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx]$$

se questo è del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, con l'Hôpital mi riduco a calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ [occhio: potrebbe esistere il primo, ma non il 2°]

Dim criteri: supponiamo che $y = mx + n$ sia asintoto, cioè che $f(x) - mx - n \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$

Allora
$$\frac{f(x)}{x} = \underbrace{\frac{f(x) - mx - n}{x}}_{\frac{0}{\infty} = 0} + \underbrace{\frac{mx + n}{x}}_m \rightarrow m$$

Analogamente

$$f(x) - mx = \underbrace{f(x) - mx - n}_{0} + n \rightarrow n$$

Viceversa: supponiamo che $\frac{f(x)}{x} \rightarrow m$; $f(x) - mx \rightarrow n$

Cosa posso dire del $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx - n]$?

$$f(x) - mx - n = \underbrace{[f(x) - mx]}_m - n \rightarrow 0$$

Esempio 1

$$f(x) = \frac{x^2 + 7}{2x + 1}$$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 7}{2x^2 + x} = \frac{1}{2}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 + 7}{2x + 1} - \frac{1}{2}x \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{2x^2} + 14 - \cancel{2x^2} - x}{2(2x + 1)} = -\frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$ La retta $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$
e anche per $x \rightarrow -\infty$

Esempio 2

$$f(x) = \log x + x$$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x + x}{x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\log x + \cancel{x} - \cancel{x}] = +\infty$$

$\Rightarrow$ NO ASINTOTO OBLIQUO

MAT I TLC

ORA 46

Titolo nota

09/11/2006

Esempio $f(x) = 3x + \sin x$ Ha asintoti obliqui?

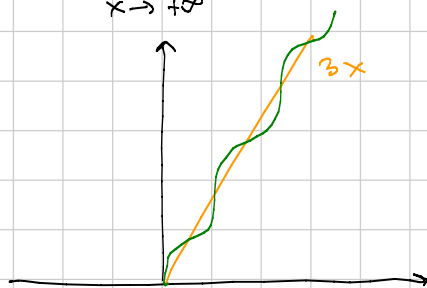
$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \sin x}{x} = 3$$

[N.B. Questo limite con l'Hôpital non viene]

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [3x + \sin x - 3x] \quad \text{N.E.}$$

↓

NO ASINT
OBLIQUO



CONVESSITÀ

LIPSCHITZIANITÀ

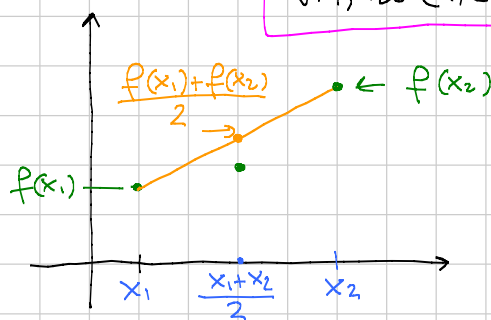
Def. Una funzione $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ si dice CONVESSA se
 ↓
 funziona anche se l'insieme di
 partenza è tutto $\mathbb{R}$, un intervallo
 chiuso o una semiretta

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b)$$

Caso particolare $\lambda = \frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$



Cosa succede quando λ varia fra 0 e 1. Il punto

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \quad \lambda = \frac{1}{2} \rightsquigarrow \frac{x_1+x_2}{2}$$

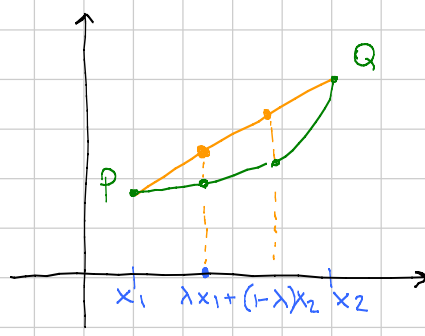
Quando λ va da 0 a 1,
il punto percorre il
segmento x_1, x_2 partendo
da x_2 verso x_1 .

$$\lambda = 0 \rightsquigarrow x_2$$

$$\lambda = 1 \rightsquigarrow x_1$$

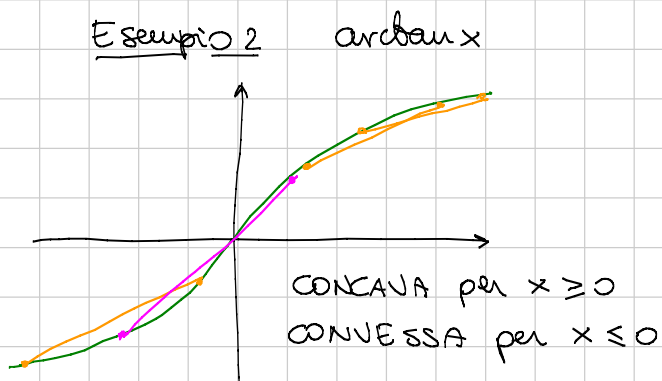
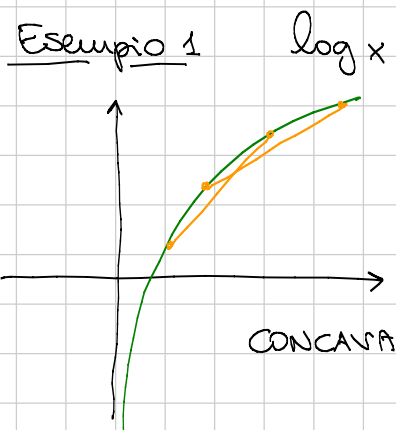
L'espressione $\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$ rappresenta
la coord y del punto del segmento
PA che sta sopra $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$

Funzione convessa $\Leftrightarrow$ il valore nel
punto $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ sta sotto il
segmento



Più geometricamente: una funzione è convessa $\Leftrightarrow$ presi 2
qualunque punti P e Q sul grafico si ha che il segmento
PA sta tutto sopra il grafico.

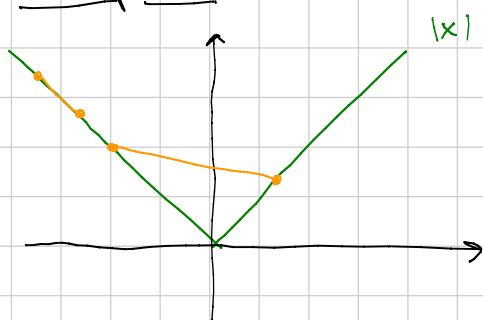
Una funzione si dice concava se il segmento sta tutto sotto
il grafico.



Quali sono le funzioni contemporaneamente concave e convessa?
 Solo le rette. (N.B. nella def. di funzione convessa c'è
 il $\geq$, quindi il segmento può anche stare sul grafico)

Def. Si definiscono STRETT. CONVESSE le funzioni in cui
 il segmento PQ sta strett. sopra il grafico della funzione,
 tranne ovviamente agli estremi

Esempio 3



$|x|$ è una funzione CONVESSA
 su tutto $\mathbb{R}$.
 Non è strett. convessa.

N.B. il fatto che una funzione f
 sia convessa non garantisce
 l'esistenza di f' , f'' , ...

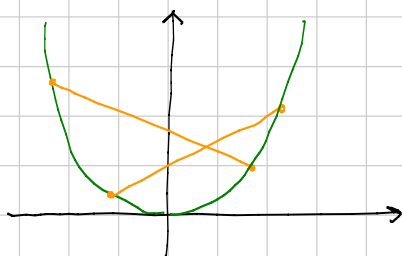
Rapporto tra convessità e derivata II

Supponiamo che $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ abbia la derivata seconda.
 Allora

$$f \text{ convessa in } (a,b) \Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b).$$

$$f \text{ strett. conv. in } (a,b) \Leftrightarrow f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$$

Esempio $f(x) = x^4$. Strettamente convessa su tutto $\mathbb{R}$



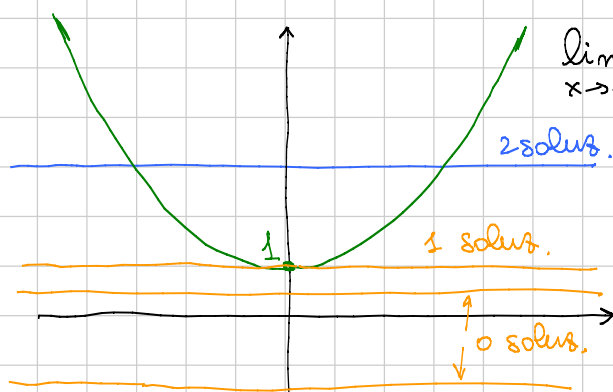
$$f'(x) = 4x^3, \quad f''(x) = 12x^2 \geq 0 \text{ sempre}$$

ma si annulla in $x=0$

Esempio $f(x) = e^x - x$ è convessa,

$$f'(x) = e^x - 1; \quad f''(x) = e^x > 0 \Rightarrow \text{strett. conv. su tutto } \mathbb{R}.$$

Quante solus. ha l'eq. $f(x) = 2006$?



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$\Rightarrow$ almeno 2 soluzioni, una > 0 e una < 0 .

$$f'(x) = e^x - 1 \begin{cases} > 0 \text{ per } x > 0 \\ = 0 \text{ per } x = 0 \\ < 0 \text{ per } x < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x=0$ è p.to di min. glob.

Più in generale, l'eq. $e^x - x = \lambda$ ha

0 solus. se $\lambda < 1$

1 solus. se $\lambda = 1$

2 solus. se $\lambda > 1$

Esempio $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ convessa per $x > 0$

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}; \quad f''(x) = 2 + \frac{2}{x^3} > 0 \text{ per } x > 0$$

PUNTI DI FLESSO

Punti in cui f passa da concava a convessa (o viceversa)



MAT I TLC

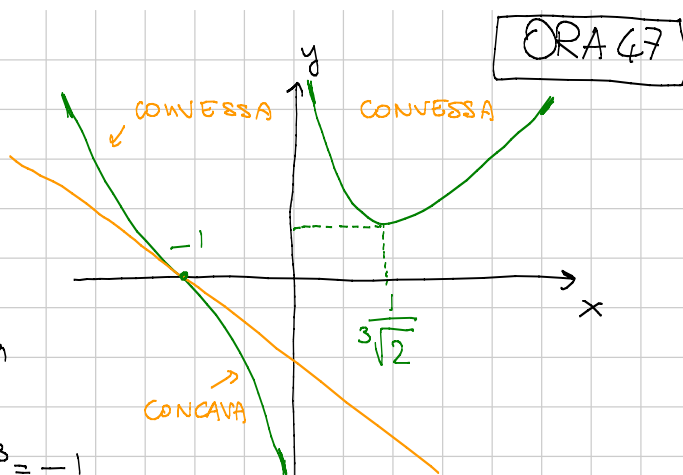
$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$$

Definita per $x \neq 0$
 $f(x) = 0$ mi aspetto un'unica
soluz. < 0

$$x^2 + \frac{1}{x} = 0 \quad ; \quad x^2 = -\frac{1}{x} \quad ; \quad x^3 = -1$$

$$\Downarrow$$

$$x = -1$$

L'eq. $f'(x) = 0$ ci aspettiamo che abbia un'unica soluz. > 0

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

Ci aspettiamo $f''(x) = 0$ abbia un'unica soluz. < 0

$$f''(x) = 2 + \frac{2}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x^3 = -1 \Leftrightarrow x = -1$$

$$2 + \frac{2}{x^3} > 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x^3} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} > -1 \Leftrightarrow$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{x^3 + 1}{x^3} > 0$$

NOO!!!

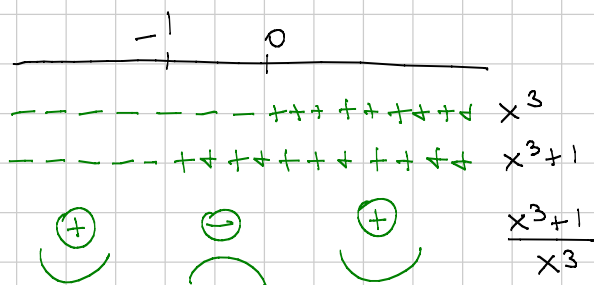
$$1 > -x^3$$

 $\Updownarrow$

$$x^3 > -1$$

 $\Updownarrow$

$$x > -1$$



Def. Una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice LIPSCHITZIANA

↑
vale anche se è definita
in un intervallo o
semiretta

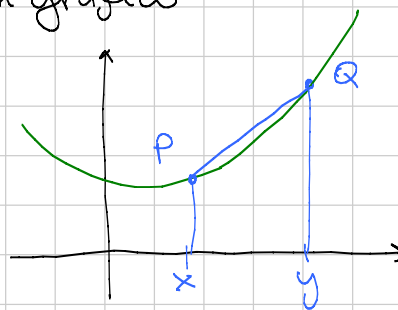
se esiste una costante $L \in \mathbb{R}$, detta cost. di LIPSCHITZ, tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq L |x - y| \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$$

Interpretazione geom. in termini di grafico

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq L$$

↓
coeff. angolare
della retta PQ

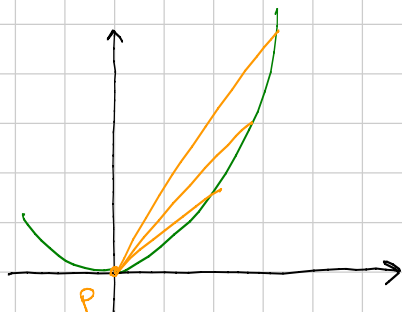


Brutalmente: f Lipschitziana $\Leftrightarrow$ le rette PQ non sono troppo pendenti

$\Leftrightarrow$

il grafico di f non è troppo pendente.

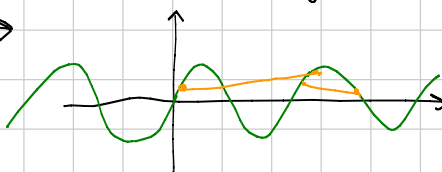
Esempio 1 $f(x) = x^2$ è lip. su $\mathbb{R}$? NO



Non c'è un valore L che sia maggiore di tutti i coeff. angolari

Esempio 2 $f(x) = \sin x$ è lip. su $\mathbb{R}$

Sì, è lip. !!!



Legame tra lipschitzianità e derivata prima

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile.

Allora f è lipschitziana in $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ esiste una costante L b.c.
 $|f'(x)| \leq L$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

Idem su un intervallo. Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile. Allora

f lipschitziana in $[a, b] \Leftrightarrow$ esiste una costante L b.c.
 $|f'(x)| \leq L$ per ogni $x \in [a, b]$.

Dim. della freccia $\Leftarrow$ Hp: $|f'(x)| \leq L \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 Tex: f lip. in $\mathbb{R}$

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y) \quad \text{LAGRANGE}$$

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y| \leq L |x - y|$$

il che è equivalente a dire che f è lip.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\cos x) - \arctan(\cos 2x)}{x^2} = -\frac{1}{2} \left[\frac{0}{0} \right]$$

Non posso usare gli sviluppi classici perché l'argomento di $\arctan$ non tende a zero.

Lo vedo come
$$\frac{f(\cos x) - f(\cos 2x)}{x^2} = \frac{f'(\xi)}{x^2} (\cos x - \cos 2x)$$

$\downarrow$ $f'(1) = \frac{1}{2}$ $\uparrow$ $\frac{1}{2}$
 lo posso fare con Taylor

$$\frac{\cos x - \cos h x}{x^2} = \frac{\cancel{1} - \frac{x^2}{2} - \cancel{1} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \frac{-x^2 + o(x^2)}{x^2} \rightarrow -1$$

ξ è un illustre sconosciuto che sta tra $\cos x$ e $\cos h x$.
Quando $x \rightarrow 0$, $\cos x \rightarrow 1$ e $\cos h x \rightarrow 1$, quindi anche $\xi \rightarrow 1$

$$f(x) = \arctan x ; f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$$

Disuguaglianze classiche

$$\sin x \leq x \quad \forall x \geq 0$$

$$\arctan x \leq x \quad \forall x \geq 0$$

$$e^x \geq 1+x \quad \forall x \geq 0$$

$$\log(1+x) \leq x \quad \forall x \geq 0$$

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \quad \forall x \geq 0$$

$$\sin x \leq x \quad \forall x \geq 0$$

Considero la funzione

$$f(x) = x - \sin x$$

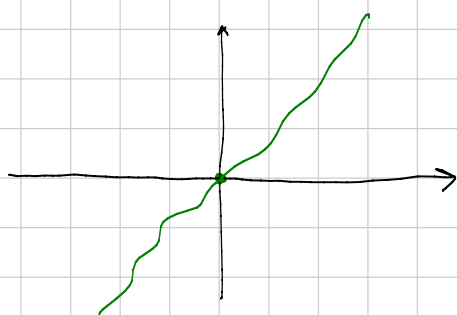
La disug. data è equivalente a dim. che $f(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$.

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0 \text{ sempre e inoltre}$$

$$f'(x) = 0 \text{ solo quando } \cos x = 1, \text{ cioè sporadic.}$$

Monotonia $\Rightarrow f(x)$ è strett. crescente su tutto $\mathbb{R}$



$$\Rightarrow f(x) > 0 \text{ per } x > 0 \quad x > \sin x$$

$$f(0) = 0$$

$$f(x) < 0 \text{ per } x < 0 \quad x < \sin x$$

$\arctan x \leq x \quad \forall x \geq 0$ Considero la funzione

$$f(x) = x - \arctan x$$

$$f(0) = 0, \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0$$

$$\text{Inoltre } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Monotonia 3 $\Rightarrow$ f strett. cresc. (come sopra)

$$f(x) > 0 \quad \text{per } x > 0$$

$$\arctan x < x \quad \text{per } x > 0$$

$$f(x) < 0 \quad \text{per } x < 0$$

$$\arctan x > x \quad \text{per } x < 0$$



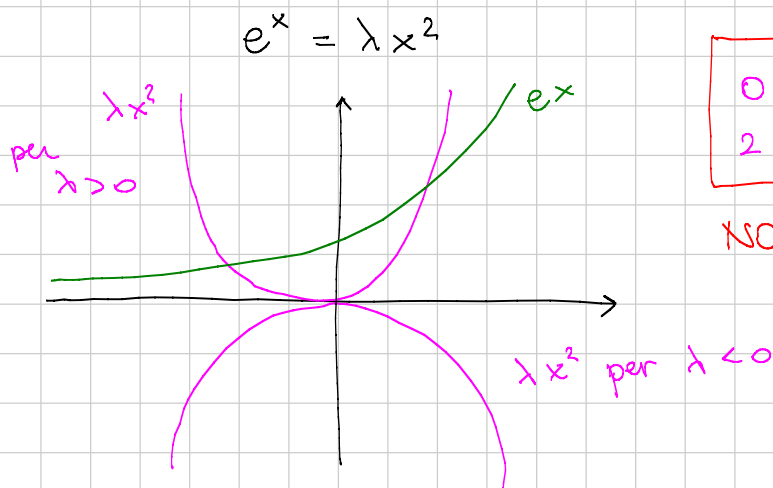
MAT I TLC

ORA 48

Titolo nota

11/11/2006

Dire al variare del param. $\lambda \in \mathbb{R}$ quante sono le solus. dell' eq.



0 solus. per $\lambda \leq 0$
2 solus. per $\lambda > 0$

NO!!!! mai fidarsi a
soprapporre 2
grafici

$$\boxed{\frac{e^x}{x^2}} = \lambda$$

$\frac{e^x}{x^2}$

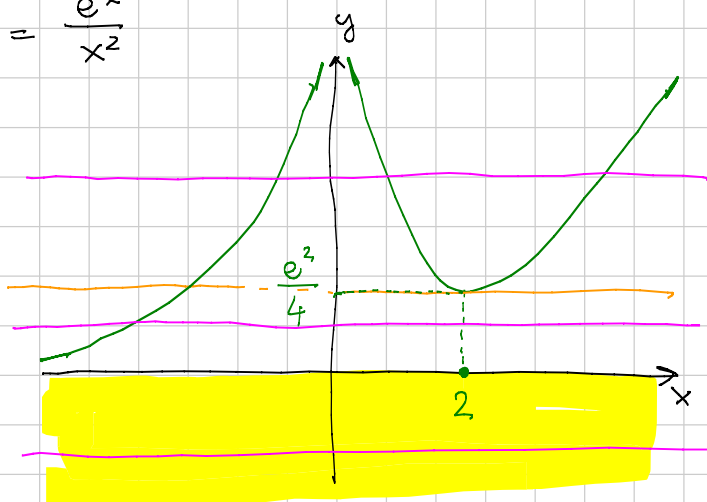
$$f(x) = \frac{e^x}{x^2}$$

Definita per
 $x \neq 0$

$$f'(x) = \frac{e^x x^2 - 2x e^x}{x^4}$$

$$= \frac{x e^x (x-2)}{x^4}$$

$$= \frac{e^x (x-2)}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x = 2$$



[Per esercizio dimostrare che
 $f'(x) > 0$ per $x < 0$ e $x > 2$
 $f'(x) < 0$ per $0 < x < 2$]

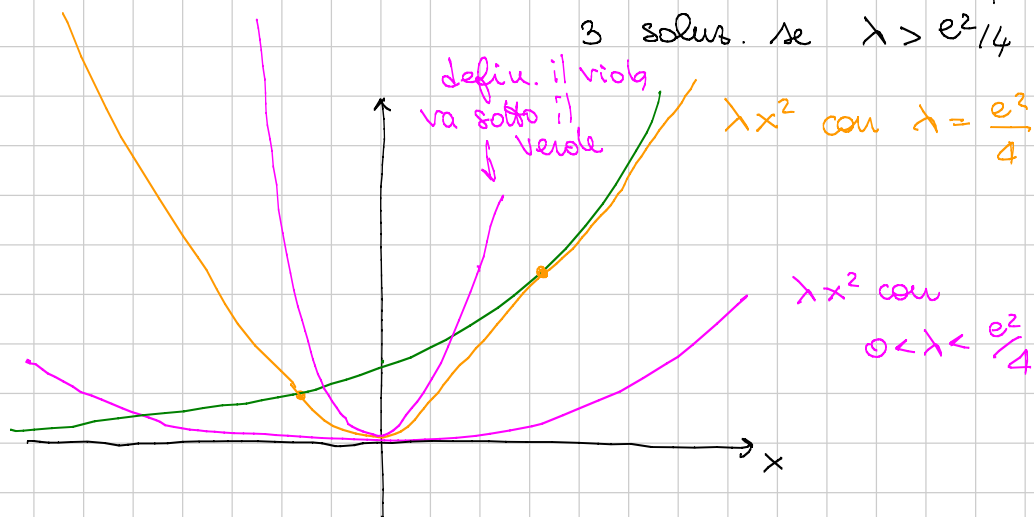
Quindi $f(x) = \lambda$ ha

0 solus. se $\lambda \leq 0$

1 solus. se $0 < \lambda < \frac{e^2}{4}$

2 solus. se $\lambda = \frac{e^2}{4}$

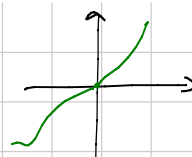
3 solus. se $\lambda > \frac{e^2}{4}$



Risolvere la diseq.

$$\boxed{2x - \sin x} \geq 0$$

$f(x)$



$$f'(x) = 2 - \cos x \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ strett. monot. cresc.}$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} f(x) > 0 \text{ per ogni } x > 0 \\ f(x) < 0 \text{ per ogni } x < 0 \end{array}$$

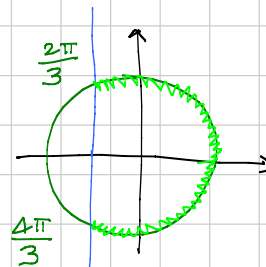
Risolvere la diseq.

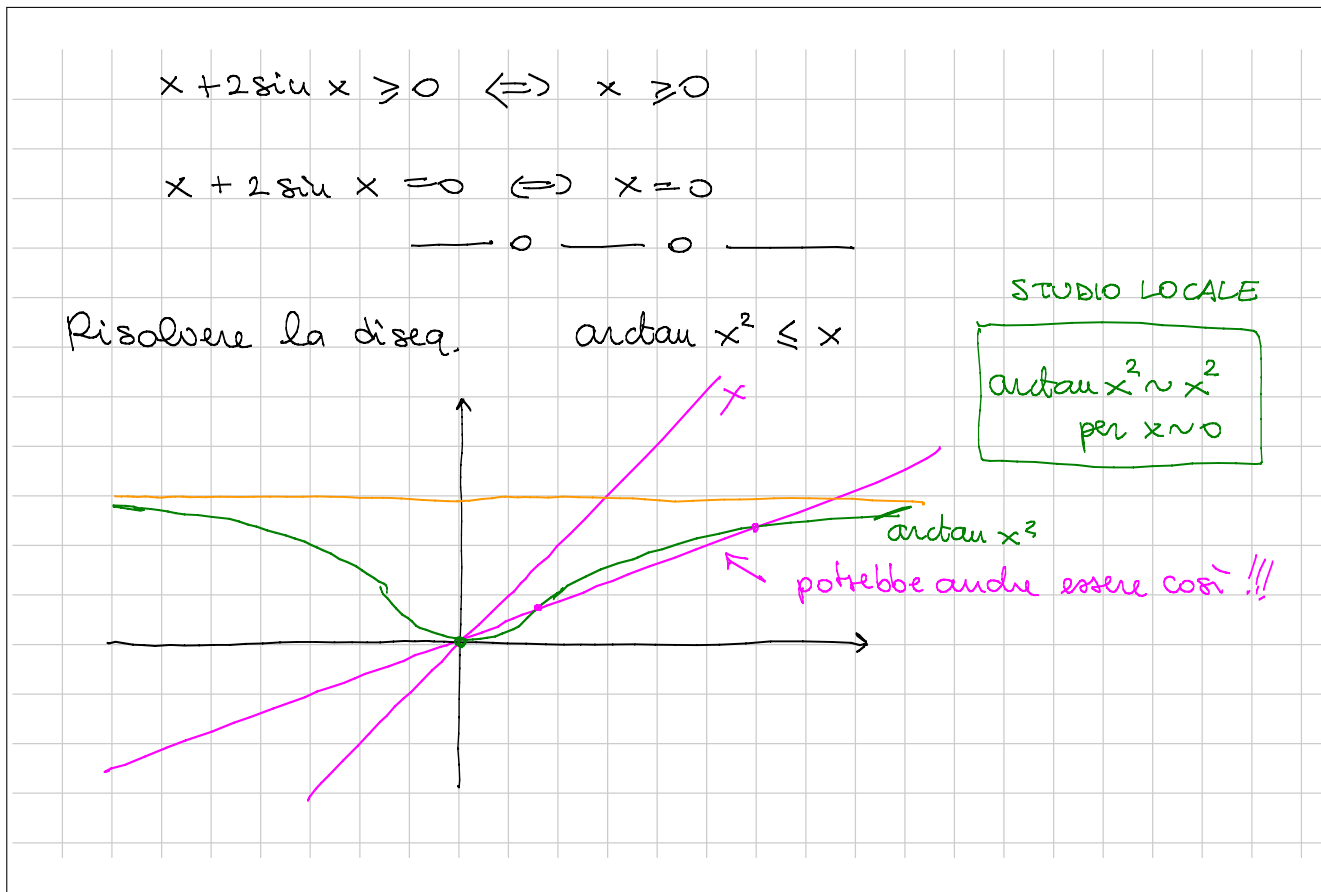
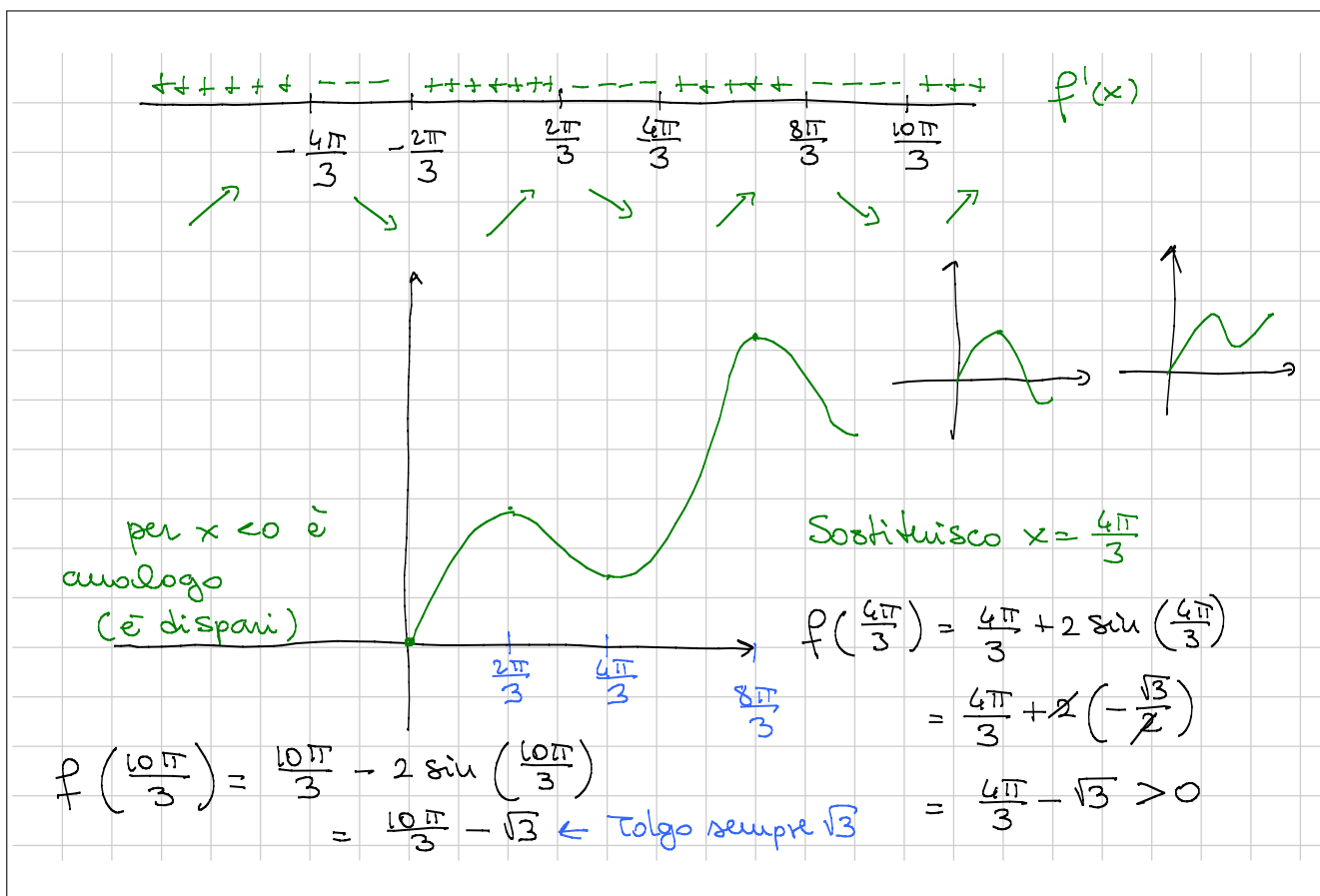
$$\boxed{x + 2\sin x} \geq 0$$

$f(x)$

$$f'(x) = 1 + 2\cos x \quad \text{studio il segno}$$

$$1 + 2\cos x \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq -\frac{1}{2}$$

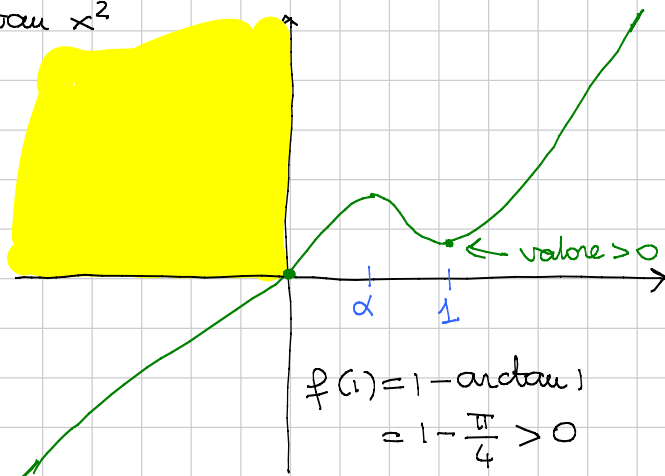




Studio $f(x) = x - \arctan x^2$

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^4}$$

$$= \frac{1+x^4-2x}{1+x^4}$$



$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{x^4 - 2x + 1 \geq 0} \quad \text{per } x \leq 0 \quad \begin{matrix} x^4 \geq 0 \\ -2x \geq 0 \end{matrix} \Rightarrow \text{monotona crescente}$$

$g(x)$

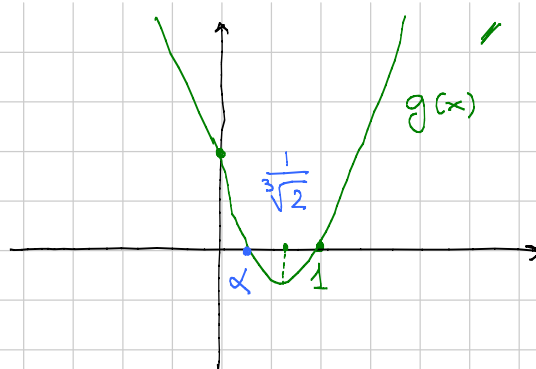
Studio $g(x) = x^4 - 2x + 1$

$$g'(x) = 4x^3 - 2$$

$$g'(1) = 2$$

$$g''(x) = 12x^2 \geq 0 \text{ sempre}$$

↓
Convessa

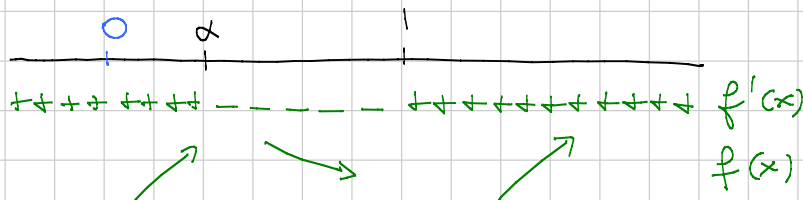


$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^3 \geq 1 \Leftrightarrow x^3 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

Cosa posso dire del segno di $g(x)$?

$g(x) > 0$	per $x > 1$ e per $x < \alpha$ (sodà $\alpha \in (0, \sqrt[3]{\frac{1}{2}})$)
$g(x) < 0$	per $\alpha < x < 1$
$g(x) = 0$	per $x = \alpha$ e $x = 1$

Ora so che $f'(x)$ è così



Conclusione $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ e quindi

$$x \geq \arctan x^2 \Leftrightarrow x \geq 0$$

$$\max \{x \in \mathbb{R} : x e^{-x} \leq 0\} = 0$$

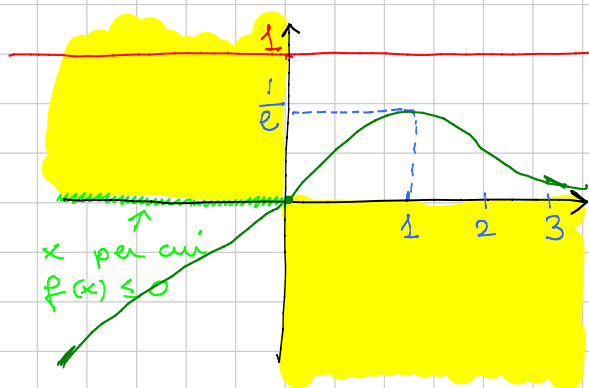
MONDO x

RISOLVI la DISEQUAZIONE
e prendi il max degli
x ottenibili

$$\max \{x e^{-x} : x \in \mathbb{R}\} = \frac{1}{e}$$

MONDO y

TROVA il max (valore) della
funzione al variare di $x \in \mathbb{R}$



$$f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} \\ = e^{-x} (1-x) = 0 \Leftrightarrow x=1$$

[Controllare il segno
di $f'(x)$]

$$\max \{x e^{-x} : x \in [2, 3]\} = f(2) = \frac{2}{e^2}$$

MONDO y

La sol. della diseq. è
↑ tutto $\mathbb{R}$, quindi

$$\sup \{x \in \mathbb{R} : x e^{-x} < 1\} = +\infty$$

$$\min \{x e^{-x} : x \in [2, 3]\} = f(3) = \frac{3}{e^3}$$

MONDO x Risolvi la diseq.
 $f(x) < 1$ e prendi il sup delle
insieme soluz.

MAT I TLC

ORA 49

Formula di Taylor con resto di LAGRANGE

Data $f(x)$, dato n intero ≥ 0 esiste un unico $P_n(x)$ di grado $\leq n$ tale che

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

resto di PEANO

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

resto che si vorrebbe piccolo

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Esempio
 $x^2 + 1000x^4 = x^2 + o(x^3)$

ξ è un punto (che non si conosce) compreso tra 0 e x

Idea della dim. nel caso $n=2$

Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - P_2(x)}{x^3} &= \frac{f(x) - P_2(x) - [f(0) - P_2(0)]}{x^3 - 0} \stackrel{=0}{=} \\ &= \frac{f'(\xi) - P_2'(\xi)}{3\xi^3} = \frac{f'(\xi) - P_2'(\xi) - [f'(0) - P_2'(0)]}{3\xi^3 - 0} \\ &= \frac{f''(\xi_1) - P_2''(\xi_1)}{6\xi_1} = \dots = \frac{f^{(n+1)}(\xi_2) - P_2^{(n+1)}(\xi_2)}{(n+1)!} \end{aligned}$$

$P_2''' = 0$ perché derivata terza di un pol. di grado 2.

1ª applicazione Approssimazione di Funzioni

$$\sin \frac{1}{10} = \frac{1}{10} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{10^3} + \frac{1}{120} \cdot \frac{1}{10^5} + \frac{f^{(7)}(\xi)}{5040} \frac{1}{10^7} = (\star)$$

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6) \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{f^{(7)}(\xi)}{7!} x^7 \end{aligned}$$

$$f(x) = \sin x \\ \xi \in (0, x)$$

$$(\star) = \left[\frac{1}{10} - \frac{1}{6000} + \frac{1}{12.000.000} \right] + \frac{f^{(7)}(\xi)}{5040 \cdot 10^7}$$

se dico che $\sin \frac{1}{10} \approx$
commetto un errore
che è

$$= \frac{1.200.000 - 2.000 + 1}{12.000.000} = \frac{1.198.001}{12.000.000} = 0,099833416$$

$$\begin{aligned} |\text{errore}| &= \frac{|f^{(7)}(\xi)|}{5.040 \cdot 10^7} \leq \frac{1}{5.000 \cdot 10^7} \\ &\leq \frac{1}{5 \cdot 10^{10}} \end{aligned}$$

$$\left| \frac{f^{(7)}(\xi)}{7!} \right| = \left| \frac{\pm \sin}{\pm \cos} \right| \leq 1$$

$$\sin \frac{1}{10} = 0,099833416$$

Per esercizio: fermarsi all'ordine 3 e vedere quante cifre
esatte si trovano

2ª applicazione Dimostrare che

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} \quad \text{per ogni } x > 0$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{f'''(\xi)}{3!} x^3$$

$P_2(x)$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \boxed{\frac{e^\xi}{3!} x^3} > 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

> 0 se $x > 0$

N.B. sarebbe il contrario per $x < 0$

MAT I TLC

ORA 50

Titolo nota

14/11/2006

SUCCESIONI PER RICORRENZA

$$a_{n+1} = 2a_n - 1 \quad a_0 = 2$$

$$a_1 = 2a_0 - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3, \quad a_2 = 2a_1 - 1 = 5, \quad a_3 = 2a_2 - 1 = 9, \dots$$

Per calcolare a_{2006} occorre calcolare tutti i termini precedenti.

In generale possiamo pensare a succ. definite da

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

legge RICORSIVA
(RICORSIONE)

$$a_0 = \alpha$$

Valore iniziale
SUCC. AUTONOMA / PRIMO ORDINE
(dipende solo dal prec.)

$$a_{n+1} = 2a_n + 6a_{n-1}$$

In questo caso servono 2 valori
per partire

SECONDO ORDINE!

dipendenza dai 2 termini
precedenti

$$a_0 = \alpha, \quad a_1 = \beta$$

A questo punto si parte $a_2 = 2a_1 + 6a_0 = 2\beta + 6\alpha, \quad a_3 = \dots$

$$a_{n+1} = 2a_n - n$$

$$a_0 = 2$$

NON AUTONOMA

In questo la legge di passaggio
da a_n ad a_{n+1} cambia di
volta in volta

$$a_1 = 2a_0 - 0 = 4, \quad a_2 = 2a_1 - 1 = 7, \quad a_3 = 2a_2 - 2 = 12$$

↑
USO RICORRENZA
con $n=0$

↑
 $n=1$

↑
 $n=2$

Autonoma: a_{n+1} dipende solo da a_n

Non autonoma: a_{n+1} dipende da a_n e da n

Ci limiteremo a succ. per ric. del 1° ordine, autonome e non autonome.

Esempio 1 $a_{n+1} = a_n^2$, $a_0 = \frac{1}{2}$ Qual è il limite di a_n ?

[In questo caso non è difficile trovare una formula **ESPLICITA** per a_n , ma noi studiamo il problema **senza RICAVARLA**]

PIANO

(i) $0 \leq a_n \leq \frac{1}{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \leq a_n$ " " "

(iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

(iv) $l = 0$

Dim (iii)

Grazie ai punti (i) e (ii) sappiamo che a_n è deb. decr. e limitata inf. $\Rightarrow$ esiste il limite ed $l \in \mathbb{R}$

(teo succ. monotone)

Dim (iv)

$$a_{n+1} = a_n^2$$

Dal pto (iii) so che $a_n \rightarrow l$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$l = l^2$$

$$l = l^2; l^2 - l = 0, l(l-1) = 0$$

$$l = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \leftarrow \text{UNICA POSSIBILITÀ}$$

1 incompatibile con il punto (i)

Dim (i)

$a_n \geq 0$ ovvia perché faccio sempre quadrati
 $a_n \leq \frac{1}{2}$ Induzione

m=0 $a_0 \leq \frac{1}{2}$ O.K.; **P.I.** Hp $a_n \leq \frac{1}{2}$ Tesi $a_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

se $0 \leq a_n \leq \frac{1}{2}$, allora

$$0 \leq a_n^2 \leq \frac{1}{4}$$

$$0 \leq a_{n+1} \leq \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$$

Dim (ii) Devo dim. che $a_{n+1} \leq a_n$, cioè che

$$a_n^2 \leq a_n, \quad a_n^2 - a_n \leq 0, \quad a_n(a_n - 1) \leq 0$$

Vera $\Leftrightarrow 0 \leq a_n \leq 1$, ma questo segue dal punto (i)

Esempio 2 $a_{n+1} = a_n^2, \quad a_0 = 3$

PIANO (i) $a_n \geq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(iv) $l = +\infty$

Dim (iv) Teo. succ. monotone

Dim (iv) Supponiamo per assurdo che sia $l \in \mathbb{R}$. Allora

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & a_n^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ l & = & l^2 \end{array}$$

$$l = l^2 \Rightarrow l = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{entrambi} \\ \text{incompatibili} \\ \text{con (i)} \end{array} \right\}$$

L'unica possibilità è che sia $l = +\infty$

Dim (i) Induzione

Dim (ii) Devo dim. che $a_{n+1} \geq a_n$, $a_n^2 \geq a_n, \dots$

$a_n(a_n - 1) \geq 0$ vera se $\boxed{a_n \geq 1}$ oppure $a_n \leq 0$
 $\uparrow$
 grazie al punto (i)
 questa è verificata

Dimostrazione alternativa dei punti (i) e (ii).
Consideriamo la funzione $f(x) = x^2$. È una funzione (deb.) crescente per $x \geq 0$

Dim (i) per indus. $a_0 \geq 3$ ok.

P.I. Hp: $a_n \geq 3$ applico $f(x)$

$$\begin{aligned} f(a_n) &\geq f(3) \\ \text{"} &\quad \text{"} \\ a_{n+1} &\geq 3 \geq 3 \leftarrow \text{Tesi} \end{aligned}$$

Dim (ii) per indus. $a_2 \geq a_1$ vera? $3 \geq 3$ ok.

$$\begin{aligned} \text{Hp.} \quad a_{n+1} &\geq a_n \text{ applico } f(x) \\ f(a_{n+1}) &\geq f(a_n) \\ \text{"} &\quad \text{"} \\ a_{n+2} &\geq a_{n+1} \leftarrow \text{Tesi.} \end{aligned}$$

Esempio 3 $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$ $a_0 = 0$

- PIANO**
- (i) $0 \leq a_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 - (ii) $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 - (iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \leftarrow \text{(i) + (ii) + teo. succ. monod.}$
 - (iv) $l = 3$

Dim (iv)

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sqrt{2a_n + 3} \\ \downarrow &\quad \quad \downarrow \\ l &= \sqrt{2l + 3} \end{aligned}$$

$$l = \sqrt{2l + 3}; \quad l^2 = 2l + 3; \quad l^2 - 2l - 3 = 0; \quad (l - 3)(l + 1) = 0$$

$$l = \begin{cases} 3 & \leftarrow \text{LIMITE} \\ -1 & \text{incomp. con (i)} \end{cases}$$

NON ACCETTABILE
come solus.
dell'eq.

Per i punti (i) e (ii) considero la funzione $f(x) = \sqrt{2x+3}$.

Questa funzione è crescente (almeno per $x \geq 0$) e $f(3) = 3$

Hp $\rightarrow 0 \leq a_n \leq 3$ applico $f(x)$

$$f(0) \leq f(a_n) \leq f(3)$$

Tesi $\rightarrow 0 \leq \sqrt{3} \leq a_{n+1} \leq 3$ e questo dimostra (i)

Punto (ii) $a_1 \geq a_0$ $\sqrt{3} \geq 0$ OK.

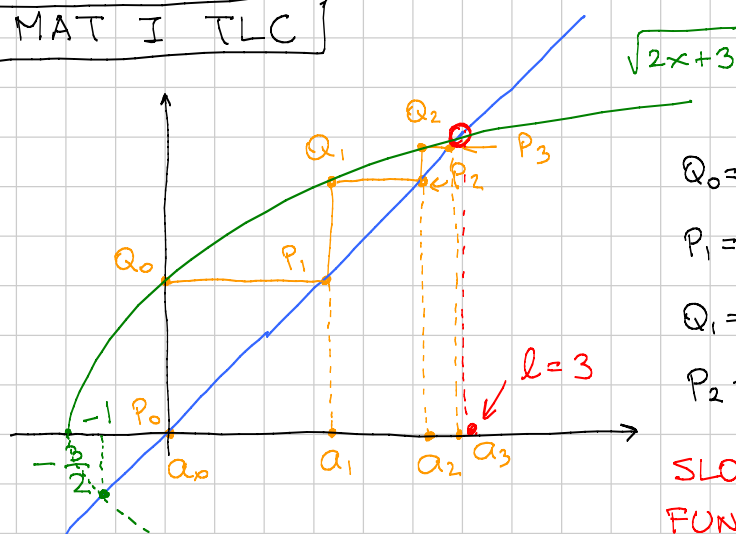
Hp $\rightarrow a_{n+1} \geq a_n$ applico $f(x)$

$$f(a_{n+1}) \geq f(a_n)$$

$$a_{n+2} \geq a_{n+1} \leftarrow \text{Tesi}$$

MAT I TLC

ORA 51



$$Q_0 = (a_0, f(a_0)) = (a_0, a_1)$$

$$P_1 = (a_1, a_1)$$

$$Q_1 = (a_1, f(a_1)) = (a_1, a_2)$$

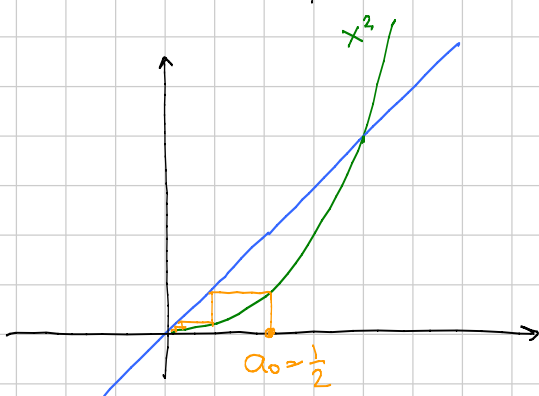
$$P_2 = (a_2, a_2)$$

SLOGAN: VERTICALE ALLA
FUNZIONE, ORIZZONTALE
ALLA BISETTRICE

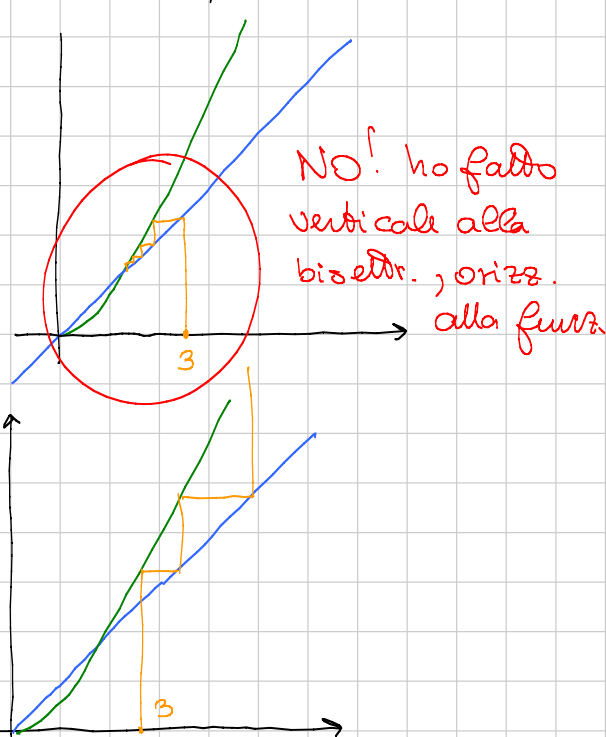
Per calcolare il punto di intersezione devo risolvere l'eq.

$$f(x) = x, \quad \text{cioè} \quad \sqrt{2x+3} = x$$

$$a_{n+1} = a_n^2, \quad a_0 = \frac{1}{2}$$

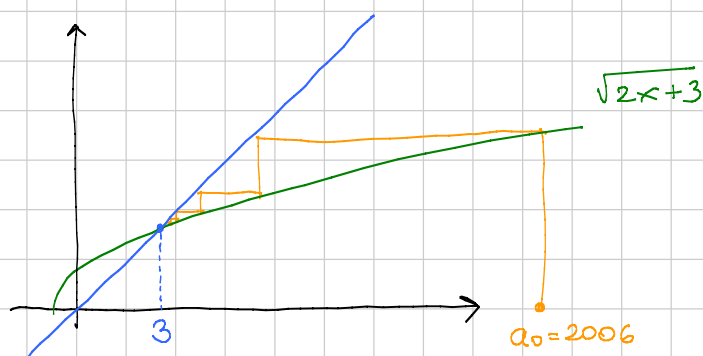


$$a_{n+1} = a_n^2, \quad a_0 = 3$$



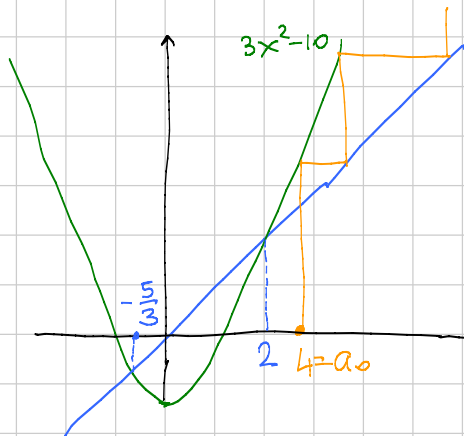
NO! ho fatto
verticale alla
bisettr., orizz.
alla funz.

Esempio 4 $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$ $a_0 = 2006$



- PIANO**
- (i) $a_n \geq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 - (ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 - (iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ [(i) + (ii) + teo. succ. monotone]
 - (iv) $l = 3$ [--- $l = \sqrt{2l+3}$ ---]
- per induzione usando la monotonia della $f(x) = \sqrt{2x+3}$

Esempio 5 $a_{n+1} = 3a_n^2 - 10$, $a_0 = 4$



$$f(x) = 3x^2 - 10, \quad f(4) = 3 \cdot 16 - 10 = 38 > 4$$

PIANO

- (i) $a_n \geq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (ii) $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- (iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
- (iv) $l = +\infty$

(i): induzione

(ii): induzione + monotonia di $f(x)$ per $x \geq 0$

$$\boxed{n=0} \quad a_1 \geq a_0 \quad 38 \geq 4 \quad \text{O.K.}$$

$$\boxed{\text{P.I.}} \quad \text{Hp: } a_{n+1} \geq a_n (\geq 4) \quad \text{Applico } f(x)$$

$$f(a_{n+1}) \geq f(a_n)$$

$$\begin{matrix} \text{"} & & \text{"} \\ a_{n+2} & \geq & a_{n+1} \end{matrix} \leftarrow \text{Terzi del P.I.}$$

(iii) Teo. succ. monotone

(iv) Supponiamo per assurdo $l \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 3a_n^2 - 10 \\ \downarrow & \quad \downarrow \\ l &= 3l^2 - 10 \end{aligned}$$

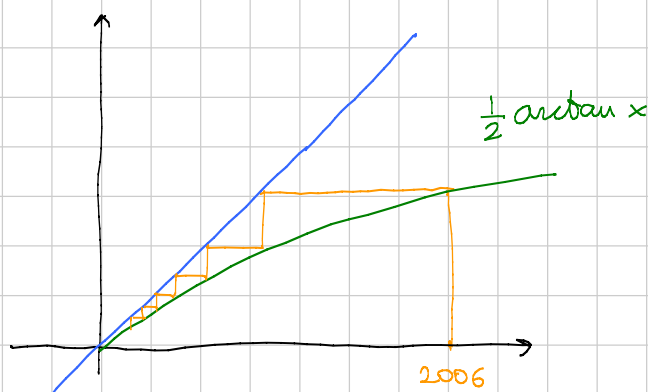
$$\begin{aligned} 3l^2 - l - 10 &= 0 \\ l_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{1+120}}{6} = \frac{1 \pm 11}{6} \end{aligned}$$

$$l = \begin{cases} 2 \\ -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3} \end{cases} \quad \text{incompatibili con (i)}$$

Esempio 6

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \arctan a_n$$

$$a_0 = 2006$$



Quando si vanno a disegnare x e $f(x)$ ci si pone il problema

di dove si intersecano

$$\boxed{f(x) = x}$$

nei restanti tratti chi sta sopra

$$\boxed{f(x) > x}$$

Quando va bene sono eq. e diseq. da precorso, quando va male occorre studiare la funzione $f(x) = x$.

Nel nostro caso per $x=0$ si incontrano, per $x>0$ si ha che

$$x > \arctan x > \frac{1}{2} \arctan x \Rightarrow x \text{ sta sopra}$$

↑
Disug. classica

PIANO	(i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$	}	solito inclus. + monotonia di $f(x)$
	(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$		
	(iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$	[Solito]	
	(iv) $l = 0$	[Eq. $l = \frac{1}{2} \arctan l$ $x = f(x)$]	

Sappiamo alla fine che $a_n \rightarrow 0$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{che fa?}$$

① È a termini > 0 perché si dim. per inclus. (punto (i))

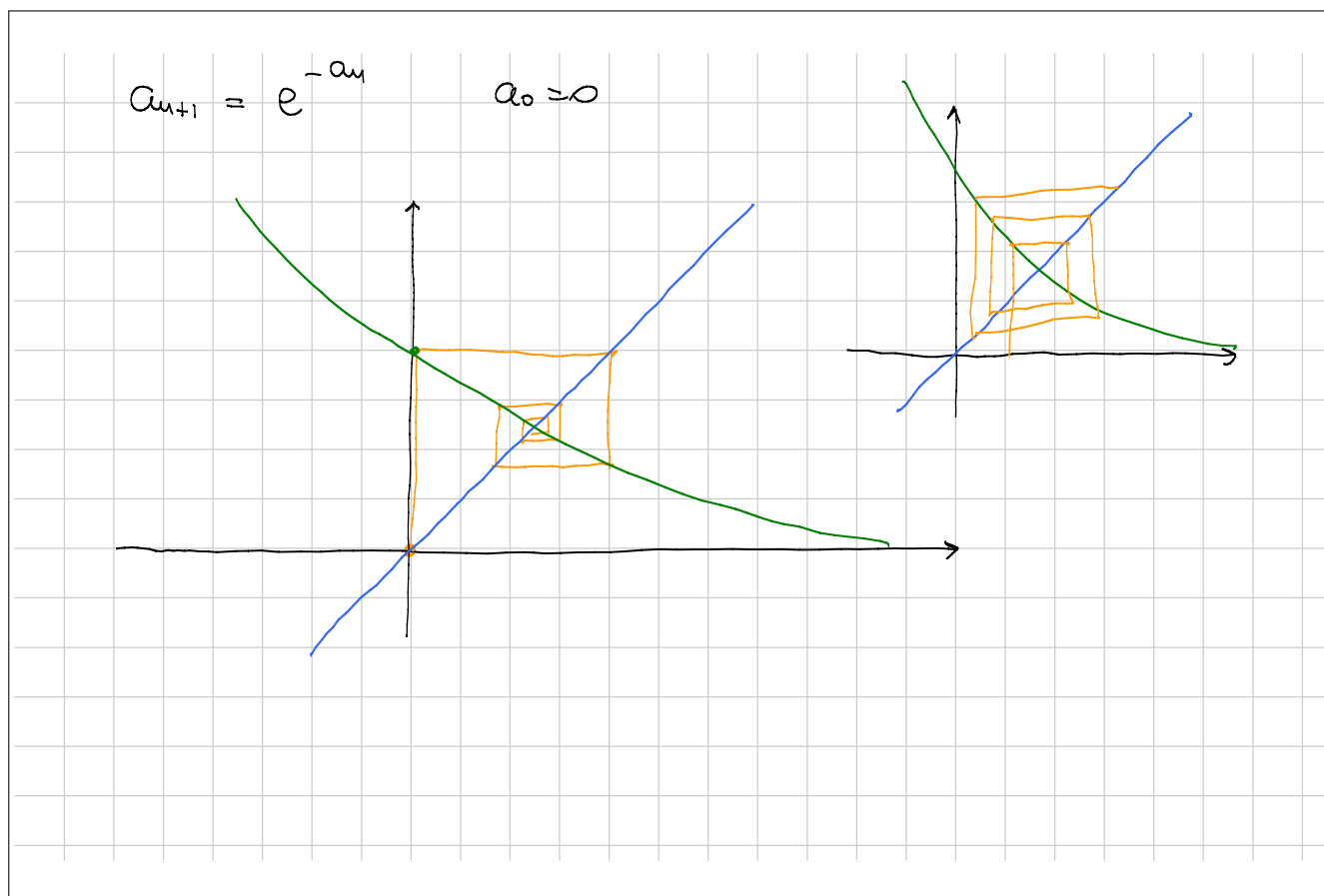
② Cond. nec. è verificata perché $a_n \rightarrow 0 \Rightarrow$ PUÒ CONVERG.

Criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2} \arctan a_n}{a_n} = \frac{1}{2} \frac{\arctan a_n}{a_n} \xrightarrow{\text{col cambio di var. } x=a_n} \frac{1}{2} < 1$$

ho che $x \rightarrow 0$ ed è il solito limite notevole

$\Rightarrow$ la serie converge.



MAT I TLC

ORA 52

Titolo nota

15/11/2006

Succ. per ricorrenza

SPIRALEGGIANTI

$$a_{n+1} = \frac{2}{a_n + 1}$$

$$f(x) = \frac{2}{x+1}$$

$$f(x) = x; \quad \frac{2}{x+1} = x$$

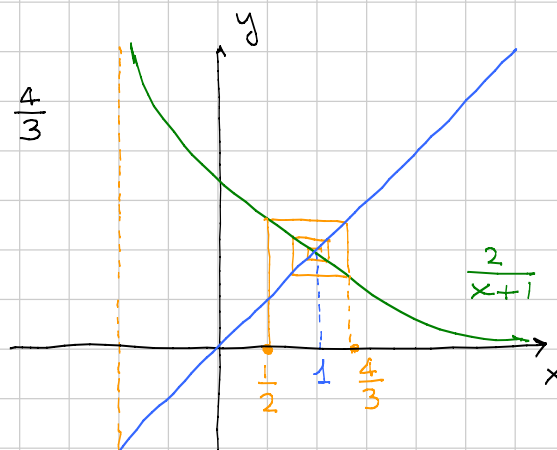
$$2 = x^2 + x; \quad x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x+2)(x-1) = 0$$

$$x = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = \frac{2}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{4}{3}$$

Idea: $a_n \rightarrow 1$ "spiraleggiando"

PIANO

$$(i) \quad \frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{4}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Induzione oppure
utilizzo della funzionePIANO
DELLA
2
SOTTO
SUCC.

$$(ii) \quad a_{2m+2} \geq a_{2m}$$

$$a_{2m+3} \leq a_{2m+1}$$

 $\forall m \in \mathbb{N}$ [la s.succ. dei pari è cresc.]

[la s.succ. dei dispari è decr.]

$$(iii) \quad a_{2m} \rightarrow l \in \mathbb{R}$$

$$a_{2m+1} \rightarrow m \in \mathbb{R}$$

SOLITO TED. SUCC.
MONOTONE

$$(iv) \quad l = m = 1$$

Dim di (iv)

$$a_{n+1} = \frac{2}{a_n + 1}$$

Non si può passare al
limite come nel caso monotono

$$a_{2m+1} = \frac{2}{a_{2m} + 1}$$

$$\downarrow$$

$$m = \frac{2}{l+1}$$

$$a_{2m+2} = \frac{2}{a_{2m+1} + 1}$$

$$\downarrow$$

$$l = \frac{2}{m+1}$$

Ho ottenuto il sistema

$$\begin{cases} m = \frac{2}{l+1} \\ l = \frac{2}{m+1} \end{cases} \quad \begin{cases} lm + m = 2 \\ ml + l = 2 \end{cases}$$

sottraggo e ottengo $m = l$ e quindi $l = \frac{2}{l+1} \Rightarrow l = \sqrt[1]{-2}$ No

Punti (i) e (ii) con la funzione

Considero $f(x) = \frac{2}{x+1}$. È una funzione decrescente per $x > -1$.

Dim (i) per inclusione. $n=0$ $\frac{1}{2} \leq a_0 \leq \frac{4}{3}$ $a_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{OK}$.

P.I. Hp. $\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{4}{3}$ Tesi: $\frac{1}{2} \leq a_{n+1} \leq \frac{4}{3}$

Dim. P.I. prendo l'Hp e applico $f(x)$:

$$\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{4}{3}$$

Inverto i versi perché f è decrescente

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \geq f(a_n) \geq \frac{4}{3}$$

"

"

$$\frac{4}{3} \geq a_{n+1} \geq \frac{6}{7} \geq \frac{1}{2}.$$

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{2}{\frac{4}{3}+1} = \frac{6}{7}$$

Dim punto (ii) Rafforzò il punto (ii) dicendo che

$$a_{2n} \leq a_{2n+2} \leq 1, \quad 1 \leq a_{2n+3} \leq a_{2n+1}$$

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = \frac{4}{3}, \quad a_2 = \frac{6}{7}$$

$$a_0 \leq a_2 \leq 1$$

$$a_1 \geq a_3 \geq 1$$

$$a_2 \leq a_4 \leq 1$$

$$a_3 \geq a_5 \geq 1$$

Applico f

Applico f

Applico f

$$\dots a_4 \leq a_6 \leq 1 \dots$$

$$f(a_0) \geq f(a_2) \geq f(1)$$

$$f(a_1) \leq f(a_3) \leq f(1)$$

PIANO CON LA DISTANZA

Idea: la distanza tra a_n e 1 decresce ad ogni passaggio.

Pongo $d_n = |a_n - 1|$ ← Distanza tra a_n e 1

(i) $d_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ BANALE

(ii) $d_{n+1} \leq d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $d_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ SOLITO

(iv) $l = 0$ [cioè $a_n \rightarrow 1$] NON SEGUE DA (i) + (iii)

x_n DECRESCENTE E $x_n \geq 0 \not\Rightarrow x_n \rightarrow 0$

Dim (ii)

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= |a_{n+1} - 1| = \left| \frac{2}{a_{n+1}} - 1 \right| = \\ &= \left| \frac{2 - a_{n+1}}{a_{n+1}} \right| = \left| \frac{1 - a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{|1 - a_n|}{a_{n+1}} = \frac{d_n}{\boxed{a_{n+1}}} \leq d_n \end{aligned}$$

≥ 1

(i), (ii), (iii) OK il punto (iv) NO

Nel (ii) abbiamo dimostrato che

$$d_{n+1} = \frac{d_n}{\boxed{a_{n+1}}} \leq \frac{2}{3} d_n$$

$\geq \frac{3}{2}$ perché grà
sappiamo che $a_n \geq \frac{1}{2}$

coeff. < 1
↑
STRETTO

Ho in realtà dimostrato che $d_{n+1} \leq \boxed{\frac{2}{3}} d_n$

PIANO CORRETTO

(i) $\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{4}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $d_{n+1} \leq \frac{2}{3} d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $d_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n d_0$

(iv) $d_n \rightarrow 0$

(i) Fatto sopra per induzione usando la funzione

(ii) Fatta sopra usando che $a_n \geq \frac{1}{2}$

(iii) Segue dal punto (ii) per induzione

$$d_1 \leq \frac{2}{3} d_0, \quad d_2 \leq \frac{2}{3} d_1 \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} d_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 d_0$$

$$d_3 \leq \frac{2}{3} d_2 \leq \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^2 d_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 d_0$$

quindi dopo n passaggi $d_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n d_0$ [FARE INDUZIONE FORMALMENTE]

(iv)

$$0 < d_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n d_0$$

si usa che $\frac{2}{3} < 1$ CARABINIERI!

MAT I TLC

ORA 53

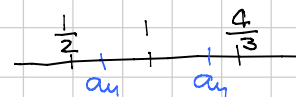
Commenti sul piano con la distanza

$$d_n = |a_n - 1| \quad f(x) = \frac{2}{x+1} \quad f(1) = 1$$

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= |a_{n+1} - 1| = |f(a_n) - f(1)| & f(a) - f(b) &= f'(\xi)(a-b) \\ &= |f'(\xi)| \cdot |a_n - 1| \\ &= |f'(\xi)| \cdot d_n & \xi &\text{ sta tra } a_n \text{ e } 1 \end{aligned}$$

Se io so già che $\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{4}{3}$, allora

$$\text{anche } \frac{1}{2} \leq \xi \leq \frac{4}{3}$$



$$f'(\xi) = -\frac{2}{(\xi+1)^2}, \text{ quindi } |f'(\xi)| = \frac{2}{(\xi+1)^2} \leq \frac{2}{(\frac{3}{2})^2} = \frac{8}{9}$$

Ho dimostrato che

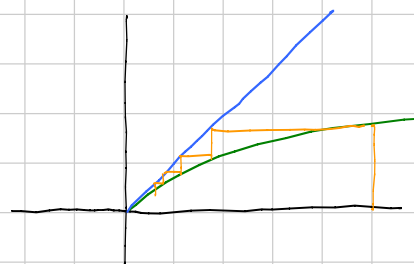
$$d_{n+1} \leq |f'(\xi)| \cdot d_n \leq \frac{8}{9} d_n \quad \text{Basta per concludere.}$$

La distanza può essere utile anche quando la succ. è monot.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \arctan a_n \quad a_0 = 2006$$

Volevamo dim. che $a_n \rightarrow 0$

$$\text{Pongo } d_n = |a_n - 0| = |a_n|$$



$$f(x) = \frac{1}{2} \arctan x$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2}$$

$$d_{n+1} = |a_{n+1} - 0| = |f(a_n) - f(0)|$$

$$= |f'(\xi)| \cdot |a_n - 0|$$

$$= |f'(\xi)| \cdot d_n \leq \boxed{\frac{1}{2}} d_n$$

$< 1 \Rightarrow$ Basta per concludere

$$|f'(\xi)| = \frac{1}{2} \frac{1}{1+\xi^2} \leq \frac{1}{2}$$

il den. è minimo per $\xi=0$

Fatto con Lagrange

segue da (i) per induz

(ii) trasabili.

PIANO Posto $d_n = |a_n - 0|$

$$(i) \quad d_{n+1} \leq \frac{1}{2} d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(ii) \quad d_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n d_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(iii) \quad d_n \rightarrow 0$$

SUCC. PER RICORRENZA NON AUTONOME

Esempio 1

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{n+2006}}$$

$$a_0 = 6002 \quad \left[a_n = \frac{6002}{\sqrt{2006}} \right]$$

PIANO CON LA MONOTONIA

$$(i) \quad a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(ii) \quad a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(iii) \quad a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$$

$$(iv) \quad l = 0$$

Dim (i) Induzione tranquilla

Dim (ii)

$$a_{n+1} \stackrel{?}{\leq} a_n$$

$$\frac{a_n}{\sqrt{n+2006}} \stackrel{?}{\leq} a_n$$

$$, a_n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+2006}} \right) \stackrel{?}{\geq} 0$$

$\downarrow$
 ≥ 0
per (i)

$\downarrow$
 > 0

Dim (ii) Teo. succ. monotone

Dim (iv)

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{n+2006}} \rightarrow +\infty$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow$
 $l = 0$

PIANO 2 (i) $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ INDUZIONE
 (ii) $a_n \rightarrow 0$

Dim di (ii) Uso criterio del rapporto per la succ.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{a_n}}{\sqrt{n+2006}} \cdot \frac{1}{\cancel{a_n}} \rightarrow 0 < 1 \Rightarrow \text{La succ. } a_n \rightarrow 0.$$

Esempio 2 $a_{n+1} = \frac{15n+3}{6n-2} a_n \quad ; a_7 = \frac{1}{7}$

PIANO 2 (i) $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ INDUZIONE
 (ii) $a_n \rightarrow +\infty$

Dim di (ii) Uso criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{15n+3}{6n-2} \frac{\cancel{a_n}}{\cancel{a_n}} \rightarrow \frac{15}{6} > 1 \Rightarrow a_n \rightarrow +\infty$$

Esempio 3 $a_{n+1} = \frac{5a_n + \sin a_n + \cos n!}{n+7 - \arctan n} \quad a_0 = 8$

Idea: $a_n \rightarrow 0$

MAT I TLC

ORA 54

Esempio 1 $a_1 = 1000$ $a_{n+1} = \frac{n^{1000}}{2^n} a_n$

[Se uno prova a calcolare i primi termini]

$$a_2 = \frac{1^{1000}}{2^1} a_1 = \frac{1}{2} a_1 = 500, \quad a_3 = \frac{2^{1000}}{2^2} 500 = 500 \cdot 2^{998}$$

$$a_4 = \frac{3^{1000}}{2^3} a_3 = \frac{3^{1000}}{2^3} 2^{998} \cdot 500 = 500 \cdot 2^{995} \cdot 3^{1000}$$

DIVENTANO ENORMI]

In realtà $a_n \rightarrow 0$

PIANO 1 (i) $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ INDUZZ.
(ii) $a_n \rightarrow 0$ RAPPORTO

PIANO 2 con monotonia(i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (ii) $a_{n+1} \leq a_n$ definitivamente [non appena $\frac{n^{1000}}{2^n} \leq 1$](iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ (iv) $l = 0$

INDUZIONE

SOLITO

SOLITO

Esempio 2 $a_{n+1} = n a_n^2$ $a_1 = 1$

PIANO (i) $a_n \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(ii) $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
(iv) $l = +\infty$

(i) $a_n \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ INDUZIONE
(ii) $a_n \rightarrow +\infty$

$$a_{n+1} = n a_n^2 \geq n$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $+\infty$ $+\infty$

Se $a_{n+1} \rightarrow +\infty$, anche $a_n \rightarrow +\infty$

Esempio 3

$$a_{n+1} = n a_n^2$$

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{c}
 a_{n+1} = n a_n^2 \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 l = +\infty \cdot l = +\infty
 \end{array}$$

NO !!

$$a_2 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$a_3 = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}$$

$$a_4 = 3 \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{3}{64} < \frac{4}{64} = \frac{1}{16}$$

In questo caso $a_n \rightarrow 0$ e si dimostra con il seguente

PIANO (i) $0 \leq a_n \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall n \geq 1$

(ii) $a_n \rightarrow 0 \quad [(i) + \text{carabinieri}]$

Dim (i) per induzione $a_n \geq 0$ è immediato.

Dim. quindi solo che $a_n \leq \frac{1}{2^n}$

mzo $a_0 \leq \frac{1}{2}$ OK.

P.I. Hp $a_n \leq \frac{1}{2^n}$ Tesi $a_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

$$\begin{array}{c}
 a_{n+1} = n \cdot a_n^2 \leq n \cdot \frac{1}{2^{2n}} \stackrel{?}{\leq} \frac{1}{2^{n+1}} \\
 \uparrow \qquad \qquad \uparrow \\
 \text{Uso Hp} \qquad \text{SPERO}
 \end{array}$$

$$\frac{n}{2^{2n}} \stackrel{?}{\leq} \frac{1}{2^{n+1}} ; \quad n \cdot 2^{n+1} \stackrel{?}{\leq} 2^{2n} ;$$

$$\boxed{n \stackrel{?}{\leq} 2^{n-1}}$$

VERA perché si dimostra a sua volta per induzione (FATTO la 1ª settimana).

Provo a farlo con la monotonia

$$a_{n+1} = na_n^2$$

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

PIANO (i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$ BANALE(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \geq 1$ (iii) $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ BANALE(iv) $l = 0$

Provo a dim (ii)

$$a_{n+1} \stackrel{?}{\leq} a_n; \quad na_n^2 \stackrel{?}{\leq} a_n; \quad na_n \stackrel{?}{\leq} 1$$

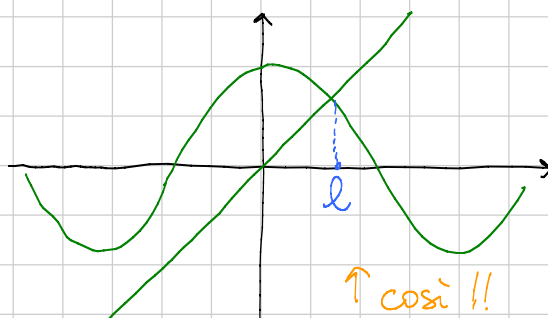
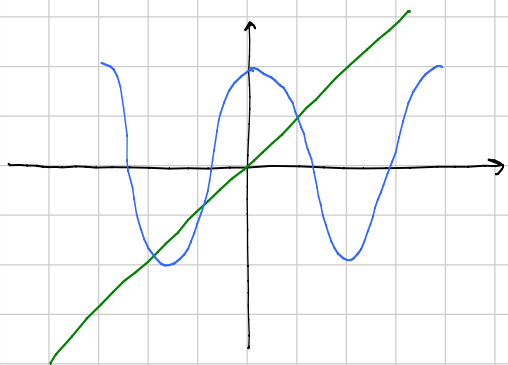
$$a_n \stackrel{?}{\leq} \frac{1}{n}$$

Nel momento in cui facciamo il punto (ii) non sappiamo se è vera.

(i.5) $a_n \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1$ Inclusione ...P.I. Hp: $a_n \leq \frac{1}{n}$ Tesi: $a_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$

SPERO: NO!!!

$$a_{n+1} = na_n^2 \leq n \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n+1}$$

Esempio 4 Quante soluzioni ha l'eq. $x = \frac{1}{2} \cos x$?

Quale di questi?

Studio la funzione $g(x) = x - \frac{1}{2} \cos x$; $g'(x) = 1 + \frac{1}{2} \sin x$

$$\geq \frac{1}{2} > 0$$
 $\Rightarrow g$ strett. cresc. $\Rightarrow$ iniettiva $\Rightarrow$ al max 1 soluz. che chiamo l .

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \cos a_n \quad a_0 = 6002$$

Idea: $a_n \rightarrow l$ (soluz. dell'eq. prec.) spiraleggiando.

PIANO Pongo $d_n = |a_n - l|$ N.B. $\frac{1}{2} \cos l = l$

(i) $d_{n+1} \leq \frac{1}{2} d_n$ $\leftarrow$ DA FARE

(ii) $d_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n d_0$ (ci) + induzione)

(iii) $d_n \rightarrow 0$ (quindi $a_n \rightarrow l$) (cii) + carabinieri)

Dim di (i) Sia $f(x) = \frac{1}{2} \cos x$

$$d_{n+1} = |a_{n+1} - l| = |f(a_n) - f(l)|$$

$$|f'(x)| = \left| \frac{1}{2} \sin x \right| = \frac{1}{2} |\sin x| \leq \frac{1}{2} \quad \text{--- o ---}$$

$$= |f'(\xi)| |a_n - l| \leq \frac{1}{2} |a_n - l| = \frac{1}{2} d_n$$

In particolare possiamo ottenere la soluz. dell'eq.

$x = \frac{1}{2} \cos x$ come limite di una succ. def. per ricor. --- o --- o ---

Es. 1 (HARD)

$$a_{n+1} = \cos(a_n) \quad a_0 = 2006$$

[equivale a scrivere 2006 in una calcolatrice
e poi continuare a schiacciare cos]

$x = \cos x$ $\leftarrow$

Es. 2 (HARD)

$$a_{n+1} = \arctan a_n \quad a_0 = 2006 \quad [\text{Facile: } a_n \rightarrow 0]$$

Hard: cosa fa $\sum a_n$???