

MAGGIORANTI e MINORANTI

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme non vuoto. Sia $z \in \mathbb{R}$.

Si dice che

• z è un maggiorante di A se

$$\forall a \in A \quad a \leq z$$

• z è un minorante di A se

$$\forall a \in A \quad z \leq a$$

Oss. Magg. e minoranti

→ non sono obbligati ad esistere (basta pensare $A = \mathbb{R}$)

→ se esistono non sono unici (se z è maggiorante, anche $z+1$ è un maggiorante)

MASSIMO e MINIMO Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto.

• Si dice che $M \in \mathbb{R}$ è il massimo di A , e si scrive

$$M = \max A$$

Se

(i) $M \in A$

(ii) $\forall a \in A \quad a \leq M$ (cioè M è un maggiorante)

• Def. analoga per $m = \min A$ [a voce]

Oss. Max e Min non sono obbligati ad esistere (pensare

a $A = \mathbb{R}$ oppure $A = (0, 1)$)

Se esistono sono per forza unici.

Se $M_1 = \max A$ e $M_2 = \max A$, allora $M_2 \leq M_1$ e $M_1 \leq M_2$

e si chiude con la antisimmetria.

Def. Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto si dice

- LIMITATO SUPERIORMENTE se esiste almeno un maggiorante
- " INFERIORMENTE " " " minorante
- LIMITATO se valgono contemporaneamente le due precedenti.

Oss. A è limitato $\Leftrightarrow \exists L \in \mathbb{R} \forall a \in A \quad |a| \leq L$

(in questo caso le due barriere sono $-L$ ed L)

SUP e INF (estremo superiore e inferiore)

Setting : $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$.

Def. Ci sono due casi

(1) Se A NON è limitato superiormente, allora si pone

$$\sup A = +\infty$$

(2) Se A è limitato superiormente, cioè esistono maggioranti, allora si pone

$$\sup A = \text{minimo dei maggioranti}$$

Def. Analogamente

$\inf A = -\infty$ se non ci sono minoranti

$\inf A = \text{massimo dei minoranti}$ altrimenti

Esempio $A = (0, 1)$

- I maggioranti sono $[1, +\infty)$ $\leadsto \sup A = 1$
- I minoranti sono $(-\infty, 0]$ $\leadsto \inf A = 0$

Moralmente : quando esistono max/min, quelli sono anche sup/inf
quando non esistono, sup/inf sono coloro che vorrebbero essere max/min ma non possono.

Dim. dell'esistenza del sup

Nel caso (1) è banale

Nel caso (2) sappiamo che esistono dei maggioranti.

Sia B l'insieme di tutti i maggioranti di A .

Allora A sta a sx di B .

Assioma di continuità $\Rightarrow$ esiste un c "che sta in mezzo" cioè

- $\forall a \in A \quad a \leq c$ (cioè c è un maggiorante, cioè $c \in B$)
- $\forall b \in B \quad c \leq b$ (cioè c è più piccolo di tutti gli el. di B)

Ma allora $c = \min B$.

Per esercizio ripetere il discorso con l'inf.
— o — o —

Caratterizzazione di sup / inf

Caso 1

$$\sup A = +\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \exists a \in A \text{ t.c. } a \geq M$$



Interpretazione $\sup A = +\infty$ per definizione vuol dire

NOT (A limitato superiormente)

cioè

NOT ($\exists M \in \mathbb{R} \forall a \in A \quad a \leq M$)

cioè

$\forall M \in \mathbb{R} \exists a \quad a > M$:)

Analogamente:

$$\inf A = -\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \exists a \in A \text{ t.c. } a \leq M$$

Caso 2

$\sup A = L \in \mathbb{R}$ se e solo se succedono due cose

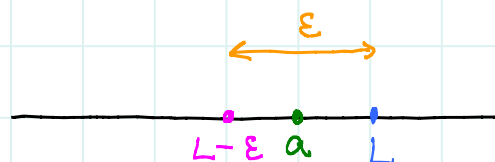
(i) $\forall a \in A \quad a \leq L$ (cioè L è un maggiorante)

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \quad a \geq L - \varepsilon$

(altrimenti $L - \varepsilon$ sarebbe pure

un maggiorante e quindi

L non sarebbe il min. dei magg.)

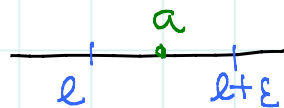


Analogo per inf

$\inf A = l \in \mathbb{R}$ se e solo se

(i) $\forall a \in A \quad l \leq a$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \quad a \leq l + \varepsilon$



Oss. E se fosse $A = \emptyset$?

Tecnicamente ogni $M \in \mathbb{R}$ è un maggiorante di A

Quindi verrebbe da dire che $\sup \emptyset = -\infty$

Ma per lo stesso prezzo avrebbe che $\inf \emptyset = +\infty$

e quindi $\inf > \sup$!!

Quindi meglio non porsi il problema e definire $\inf / \sup$ solo quando $A \neq \emptyset$.

Prop. $\sup \mathbb{N} = +\infty$

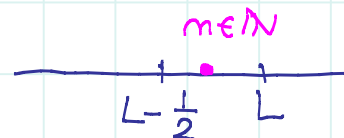
↑ visto come sottoinsieme di $\mathbb{R}$

con la storia del $+$ della les. precedente

Dim Devo dimostrare che non ammette maggioranti.

Supponiamo che $\sup \mathbb{N} = L \in \mathbb{R}$

Uso la caratterizzazione con $\varepsilon = \frac{1}{2}$



So che esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $L - \frac{1}{2} \leq m$

Aggiungo 1 a dx e sx $L - \frac{1}{2} + 1 \leq m+1$ cioè

$$\begin{matrix} m+1 \geq L - \frac{1}{2} + 1 = L + \frac{1}{2} > L \\ \in \mathbb{N} \end{matrix}$$

e quindi ho trovato un elemento di $\mathbb{N}$ che è $> L$. Assurdo.
— o — o —

Ho usato un po' di cose non scritte negli assiomi...