

Insinsiemi numerici

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, 2, -2, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$

$$\mathbb{R} = \dots \text{ oggi } \dots$$

$$\mathbb{C} = \{a + ib : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$

Naturali

Interi

Razionali

Reali

Complessi

Numero in
tedesco

(Zahlen)

(quozienti)

Numeri reali I numeri reali sono una quaterna
 $(\mathbb{R}, +, \cdot, \geq)$

dove

- $\mathbb{R}$ è un insieme
- $+$ e $\cdot$ sono le operazioni di addizione e moltiplicazione
- $\geq$ è l'ordinamento classico

governati da 3 famiglie di assiomi:

- algebrici
- di ordinamento
- di continuità

Assiomi algebrici

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un **CAMPO**, cioè un ambiente in cui sono definite due operazioni con le classiche proprietà

4 per la somma

4 per il prodotto

distributiva

Somma e prodotto sono due funzioni

$$\text{sum} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{prod} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$a + b = \text{sum}(a, b)$$

$$a \cdot b = \text{prod}(a, b)$$

Assiomi di ordinamento Su $\mathbb{R}$ esiste una relazione $\leq$ con queste proprietà

(Ord 0) Per ogni $x \in \mathbb{R}$ e ogni $y \in \mathbb{R}$ vale $x \leq y$ oppure $y \leq x$ (ordiu. totale)

(Ord 1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \leq x$ (riflessiva)

(Ord 2) Se $x \leq y$ e $y \leq z$, allora $x \leq z$ (transitiva)

Formalmente

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \forall z \in \mathbb{R} \quad (x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow (x \leq z) \\ \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

(Ord 3) Se $x \leq y$ e $y \leq x$, allora $x = y$ (antisimmetrica)

Formalmente

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y$$

L'ordinamento interagisce con le proprietà algebriche. Ci sono due assiomi.

(ORD-S) Se $x \leq y$, allora $x + z \leq y + z$ per ogni $z \in \mathbb{R}$

(ORD-P) Se $x \geq 0$ e $y \geq 0$, allora $x \cdot y \geq 0$

Questi assiomi hanno due conseguenze

(ORD-P1) Se $x \geq y$ e $z \geq 0$, allora $xz \geq yz$

(ORD-P2) Se $x \geq y$ e $z \leq 0$, allora $xz \leq yz$

Dim (ORD-P1)

$$x \geq y \Rightarrow x - y \geq 0 \Rightarrow z(x - y) \geq 0$$

$\uparrow$ aggiungo $-y$ $\uparrow$ uso (ORD-P)

$$\Rightarrow zx - zy \geq 0 \Rightarrow zx \geq zy$$

$\uparrow$ distributiva $\uparrow$ aggiungo zy

Finora nulla distingue $\mathbb{R}$ da $\mathbb{Q}$.

Assioma di continuità

Def. Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ due sottoinsiemi non vuoti.

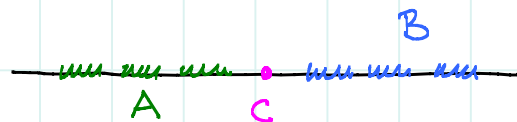
Si dice che A sta a sinistra di B se

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad a \leq b$$

Assioma Per ogni A e B come sopra esiste almeno un $c \in \mathbb{R}$ che "sta tra A e B ", cioè

$$\forall a \in A \quad a \leq c$$

$$\forall b \in B \quad c \leq b$$



Oss. (i) A e B possono intersecarsi, ma l'intersezione è al max un p.to e quello sarebbe proprio c .

(ii) Se $A \cap B = \emptyset$, il c può essere unico?

Certo! Ad esempio $A = (-\infty, 3)$ $B = (3, +\infty)$

(iii) Ci sono casi in cui il c non è unico

Fatto importante: l'assioma di continuità NON vale in $\mathbb{Q}$.

Idea: poniamo

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \text{ e } x^2 \leq 2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0 \text{ e } x^2 \geq 2\}$$

Si può dimostrare che

- A sta a sx di B (facile)
- se esistesse c in mezzo, allora $c^2 = 2$ (meno facile)
- non esiste $c \in \mathbb{Q}$ tale che $c^2 = 2$ (medio)

TEOREMA (Misterioso) I numeri reali esistono e sono unici.

Sono unici nel senso che due strutture con quelle proprietà sono isomorfe, cioè se

$$(\mathbb{R}, +, \cdot, \geq) \text{ e } (\boxed{\mathbb{R}}, \boxed{+}, \boxed{\cdot}, \boxed{\geq})$$

sono due strutture che verificano gli assiomi, allora esiste

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \boxed{\mathbb{R}}$$

iniettiva e surgettiva, che commuta con tutte le proprietà.

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) \boxed{+} \varphi(b)$$

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \boxed{\cdot} \varphi(b)$$

$$a \leq b \Leftrightarrow \varphi(a) \boxed{\leq} \varphi(b)$$

Ci sono tantissime cose che non sono scritte negli assiomi ma si deducono una volta per tutte e poi si usano quotidianamente

$$0 \cdot x = 0$$

$$-(-x) = x$$

$$-1 \cdot x = -x$$

si dimostra che è unico!



(-1 = tizio che aggiunto a 1 fa 0)

(-x = " " " " x fa 0)

$$1 > 0 \quad [\text{Provare a dimostrarlo dagli assiomi}]$$

$2 = 1+1$, $3 = 2+1$, ... in questo modo mandiamo $\mathbb{N}$ dentro $\mathbb{R}$.

Domanda: iniettivamente? Cioè sono tutti distinti?

— 0 — 0 —