

PRINCIPIO DI INDUZIONE

Siano $N = \{0, 1, 2, \dots\}$ i numeri naturali.

Sia $P(n)$ un predicato che ha un parametro $n \in N$.

Supponiamo che

(i) $P(0)$ è vera (passo base)

(ii) $\forall n \in N \quad P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (passo induttivo)

[Supponendo che $P(n)$ sia vera, allora riesco a dimostrare $P(n+1)$]

Allora $P(n)$ è vera $\forall n \in N$.

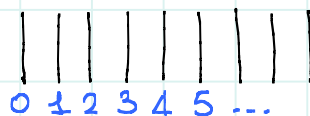
Perché funziona? $P(0)$ è vera per (i)

Ma allora $P(1)$ è vera (ii) con $n=0$

" " $P(2)$ è vera (ii) con $n=1$

... e così via.

Tessere del domino



(i) $P(0)$ casca

(ii) meccanismo di caduta: se cade $P(n)$, allora cade $P(n+1)$

Esempio 1

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

" $\Downarrow$

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$$

Dim Passo base : $n=0 \rightsquigarrow 0^2 = \frac{0 \cdot 1 \cdot 1}{6} \quad \ddot{\smile}$

$n=1$ $0^2 + 1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} \quad \ddot{\smile}$

<u>Passo induttivo</u>	Ipotesi	$\sum_{k=0}^m k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$	$P(m)$
	Tesi	$\sum_{k=0}^{m+1} k^2 = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}$	$P(m+1)$

Dim passo induttivo: catena di uguaglianze

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{m+1} k^2 &= (m+1)^2 + \sum_{k=0}^m k^2 \\
 &\quad \uparrow \text{isolo ultimo termine} \\
 &= (m+1)^2 + \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \\
 &\quad \nearrow \text{uso ipotesi induttiva} \\
 &= \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6} \\
 &\quad \nearrow \text{spero}
 \end{aligned}$$

Controllo la speranza, che è un conto da precorso!

$$\begin{aligned}
 (m+1)^2 + \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} &= (m+1) \left[(m+1) + \frac{m(2m+1)}{6} \right] \\
 &= (m+1) \frac{6m+6+2m^2+m}{6} \\
 &= (m+1) \frac{2m^2+7m+6}{6} \\
 &= (m+1) \frac{(m+2)(2m+3)}{6} \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Esempio 2

$$\sum_{k=0}^m a^k = \frac{a^{m+1} - 1}{a - 1} \quad \text{se } a \neq 1$$

" $1 + a + a^2 + \dots + a^m$

Dim Passo base $m=0 \rightsquigarrow 1 = \frac{a-1}{a-1} \quad \checkmark$

Passo induttivo: Ipotesi $\sum_{k=0}^m a^k = \frac{a^{m+1} - 1}{a - 1}$ Tesi: $\sum_{k=0}^{m+1} a^k = \frac{a^{m+2} - 1}{a - 1}$

Dim passo induttivo: solita catena

$$\sum_{k=0}^{n+1} a^k = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{solo } n+1}}{a^{n+1}} + \sum_{k=0}^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso ipotesi}}}{a^k} = a^{n+1} + \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$
$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{calcolo}}}{=} \frac{a^{n+2} - \cancel{a^{n+1}} + \cancel{a^{n+1}} - 1}{a - 1} = \frac{a^{n+2} - 1}{a - 1} \quad \square$$

Oss. Se $a = 1$, allora $\sum_{k=0}^n a^k = n+1$

Esempio 3 (Disuguaglianza di BERNOLLI)

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x > -1$$

(Vale anche per $x = -1$)

Dim Passo base $n=0 \leadsto (1+x)^0 \geq 1 \leadsto 1 \geq 1 \quad \square$

Passo induttivo Ipotesi: $(1+x)^n \geq 1+nx$
Tesi: $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

Dim passo induttivo: catena di disuguaglianze

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{proprietà potenze}}}{(1+x)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ipotesi moltip. per } 1+x}}{(1+x)^n} \geq (1+x)(1+nx) \\ &= 1+nx+x+nx^2 \\ &= 1+(n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \\ &\geq 1+(n+1)x \quad \square \end{aligned}$$

Oss. L'ipotesi $x > -1$ è stata usata per dire che

$$(1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx)$$

Se $(1+x) < 0$, quando moltiplico l'ipotesi per $1+x$ il verso cambia!!!

Esempio 4 Determinare per quali valori di n si ha che

$$n! \geq 2^n$$

$\uparrow 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$ (e $0! = 1$ per definizione)

Esplorazione:

$n=0$	$\rightsquigarrow$	$0! \geq 2^0$	$1 \geq 1$	$\checkmark$
$n=1$	$\rightsquigarrow$	$1! \geq 2^1$	$1 \geq 2$	NO
$n=2$	$\rightsquigarrow$	$2! \geq 2^2$	$2 \geq 4$	NO
$n=3$	$\rightsquigarrow$	$3! \geq 2^3$	$6 \geq 8$	NO
$n=4$	$\rightsquigarrow$	$4! \geq 2^4$	$24 \geq 16$	SI
$n=5$	$\rightsquigarrow$	$5! \geq 2^5$	$120 \geq 32$	abbondante!

Claim: vera per $n=0$ e per $n \geq 4$. Lo dimostro per induzione a partire da 4.

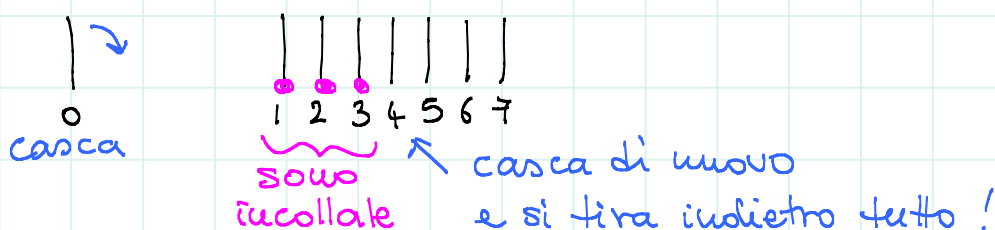
Passo base: $n=4 \rightsquigarrow$ fatto sopra

Passo induttivo: Ipotesi: $n! \geq 2^n$ Tesi $(n+1)! \geq 2^{n+1}$

Calcolo

$$(n+1)! = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{solo} \\ n+1}}{(n+1)} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ipotesi} \\ \cdot (n+1)}}{n!} \geq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{basta} \\ n \geq 1}}{(n+1)} 2^n = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{potenze}}}{2} 2^n = 2^{n+1} \quad \checkmark$$

Oss. Il meccanismo di caduta vale da $n=1$ in poi, quindi è come in figura



Esempio 5

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \leq 1 \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$$

Se uno prova a dimostrarlo per induzione NON PUÒ VENIRE!

Esplorazione

$$n=1$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$n=2$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$n=3$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

Claim:
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \quad (\leq 1)$$

Questo si dimostra facilmente per induzione!

Morale: spesso è più facile dimostrare un enunciato più forte di quello che ci serve.

— o — o —