

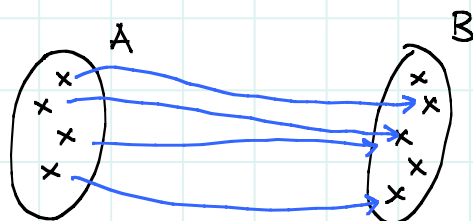
FUNZIONI

Siano A e B due insiemi.

Operativamente una funzione $f : A \rightarrow B$ sono

tre cose

- l'insieme di partenza A
- l'insieme di arrivo B
- una legge che ad ogni elemento $a \in A$ associa un unico elemento $b \in B$. Questo elemento si chiama $f(a)$.

Visualizzazione

Essenziale : da ogni elemento di A parte una e una sola freccia

Parole pericolose : dominio e codominio.

Grafico di una funzione

Data $f : A \rightarrow B$ si dice

$$\text{Grafico}(f) := \{(a, b) \in A \times B : \underline{b = f(a)}\}$$

presentazione per proprietà

Def. rigorosa di funzione

Una funzione da A in B è un sottoinsieme $G \subseteq A \times B$ tale che

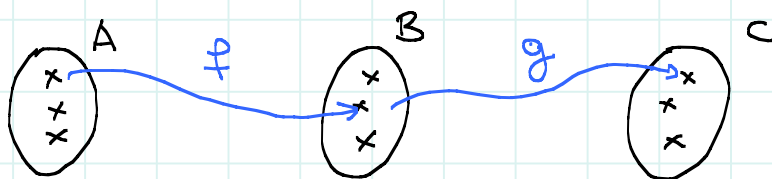
$$\forall a \in A \quad \exists ! b \in B \quad [\text{tale che}] \quad (a, b) \in G$$

Moralmente : una funzione è il suo grafico.

Composizione di funzioni Data $f: A \rightarrow B$ e $g: B \rightarrow C$
posso costruire la funzione

$$g \circ f: A \rightarrow C$$

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$



Serve che l'arrivo della prima sia la partenza della seconda.

Esercizio di burocrazia Data una funzione $F \subseteq A \times B$ e
 $G \subseteq B \times C$

definire la composizione $H \subseteq A \times C$

$$H = \{ (a, c) \in A \times C : \exists b \in B \underbrace{(a, b) \in F}_{b = f(a)} \wedge \underbrace{(b, c) \in G}_{c = g(b)} \}$$

— o — o —

Def. Siano A e B insiemi e sia $f: A \rightarrow B$ una funzione.
Si dice che f è

- **INIETTIVA** se [due elementi diversi in partenza vanno a finire in elementi diversi in arrivo]

$$\forall a_1 \in A \quad \forall a_2 \in A \quad a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

$P \Rightarrow Q$

oppure che è lo stesso

$$\forall a_1 \in A \quad \forall a_2 \in A \quad f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

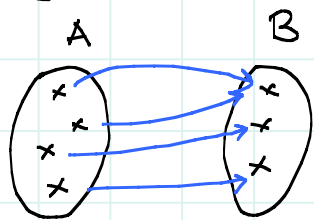
$\text{NOT } Q \Rightarrow \text{NOT } P$

- **SURGETTIVA** se [ogni elemento di B è f di qualcosa]

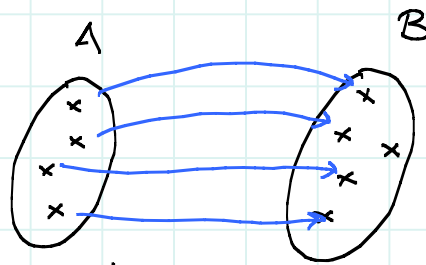
$$\forall b \in B \quad \exists a \in A \quad f(a) = b$$

- **BIGETTIVA** se è iniettiva più surgettiva

Diseguiui



surg. ma non iniettiva



iniettiva ma non surgettiva

Esercizio $f(x) = x^2$ è iniettiva / surgettiva?

Dipende DA DOVE A DOVE !!

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

NO INJ

NO SURG

$$(f(1) = f(-1))$$

(nessuno becca i negativi)

$$f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$$

NO INJ

SURG SI

$$f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

SI INJ

NO SURG

$$f: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

SI INJ

SI SURG

Def. Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice **INVERTIBILE** se esiste una funzione $g: B \rightarrow A$ tale che

$$g(f(a)) = a \quad \forall a \in A$$

$$f(g(b)) = b \quad \forall b \in B$$

g si chiama
funzione inversa

Moralmente: le frecce di g sono le frecce di A viste al contrario.

Proposizione $f: A \rightarrow B$ è invertibile se e solo se è bigettiva

Iniettività, surgettività, composizioni

Setting: $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, $g \circ f: A \rightarrow C$

① Se f e g sono iniettive, allora $g \circ f$ è iniettiva

$$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2) \Rightarrow g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$$

$\uparrow$ f iniettiva $\uparrow$ g iniettiva

② Se f e g sono surgettive, allora $g \circ f$ è surgettiva

Prendo un qualunque $c \in C$.

$\exists b \in B$ t.c. $c = g(b)$ [perché g è surgettiva]

$\exists a \in A$ t.c. $b = f(a)$ " f " "

Ma allora $c = g(b) = g(f(a))$ " "

③ Se $g \circ f$ è iniettiva, allora di sicuro f è iniettiva

Se per assurdo f non fosse iniettiva, allora esistono $a_1 \neq a_2$ in A tali che $f(a_1) = f(a_2)$.

Ma allora per forza $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$ quindi la composizione non è iniettiva.

④ Se $g \circ f$ è surgettiva, allora di sicuro g è surgettiva

[La composizione non può arrivare dove non arriva g]

Direttamente: prendo $c \in C$

trovo a t.c. $c = g(f(a))$ (perché $g \circ f$ è surg.)

pongo $b = f(a)$ e osservo che $c = g(b)$, quindi c viene raggiunto da g .

— o — o —

Def. Sia $f: A \rightarrow B$ una funzione

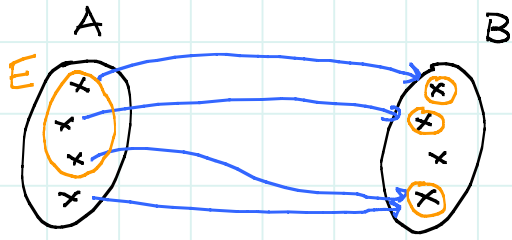
• Dato $E \subseteq A$ si pone

$$f(E) := \{ f(a) : a \in E \} \quad \text{Immagine di } E$$

• Dato $F \subseteq B$ si pone

$$f^{-1}(F) := \{ a \in A : f(a) \in F \} \quad \text{Controimmagine di } F$$

Moralmente : $f(E)$ sono gli arrivi di tutte le frecce che partono da E



$f^{-1}(F)$ sono le partenze di tutte le frecce che arrivano in F

