

Esercizio 1 Sia $A = \{n \geq 1 : n \text{ si scrive in base 10 senza usare la cifra } 6\}$

Studiare la convergenza delle serie

$$\sum_{n \in A} \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n \in A} \frac{1}{n^\alpha}$$

Sorpresa: la prima serie converge! (Morale: gli elementi di A sono "pochi" e "rari")

Come lo dimostro?

Raggruppo i termini a seconda del numero di cifre

$$A_i = \{n \in A : n \text{ ha } i \text{ cifre}\}$$

$$\sum_{n \in A} \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{n \in A_i} \frac{1}{n}}_{\text{sommatore finita}}$$

(Risultati di raggruppamento)

Osservo che $\sum_{n \in A_i} \frac{1}{n} \leq \frac{1}{10^{i-1}} \cdot \# A_i = 8 \cdot 9^{i-1}$

$\uparrow$ massimo el. in A_i $\uparrow$ Numero elem di A_i

ora $\# A_i = 8 \cdot 9^{i-1}$ per $i \geq 1$

$\uparrow$ 1^a cifra in 8 modi $\uparrow$ restanti cifre in 9 modi

Quindi

$$\sum_{n \in A} \frac{1}{n} \leq \sum_{i=1}^{\infty} 8 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{i-1} \quad \text{e questa converge!}$$

Vediamo caso con α variabile. Come prima

$$\sum_{n \in A_i} \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{10^{\alpha(i-1)}} \cdot 8 \cdot 9^{i-1} = 8 \left(\frac{9}{10^\alpha}\right)^{i-1}$$

Quando sommiamo per $i = 1, \dots, \infty$ converge se

$$\frac{9}{10^\alpha} < 1, \text{ cioè } 10^\alpha > 9, \text{ cioè } \alpha \log 10 > \log 9$$

$$\text{cioè } \alpha > \frac{\log 9}{\log 10}$$

di poco sotto 1

Resta da dimostrare che per $\alpha \leq \frac{\log 9}{\log 10}$ converge. Mi serve la stima opposta

$$\sum_{n \in A_i} \frac{1}{n^\alpha} \geq 8 \cdot 8^{i-1} \cdot \frac{1}{10^{i\alpha}} = \frac{8}{9} \left(\frac{9}{10^\alpha} \right)^i$$

e si conclude facile.

"Esercizio 2" $P =$ insieme dei primi $\sum_{n \in P} \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots$

La serie diverge (i primi sono tanti!)

BRAVATA 4 Partiamo dal prodotto di Eulero

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \prod_{p \in P} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \dots \right)$$

[Come dire che ogni $\frac{1}{n}$ è prodotto di un numero finito di $\frac{1}{p^k}$

$$= \prod_{p \in P} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \right)$$

↑
geometrica

log prod = somma log

Ma allora $\log \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \right) \stackrel{\downarrow}{=} \sum_{p \in P} \log \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \right)$

$$= - \sum_{p \in P} \log \left(1 - \frac{1}{p} \right)$$

$$\stackrel{\sim}{\sim} \sum_{p \in P} \frac{1}{p}$$

↑
Taylor

Dim di ERDOS Supponiamo che converga. Elenchiamo i primi

$$p_1, p_2, p_3, \dots$$

Allora esiste k tale che

$$\sum_{i \geq k+1} \frac{1}{p_i} \leq \frac{1}{2} \quad \uparrow \text{va bene qualunque cosa } < 1$$

Chiamo $p_1, \dots, p_k$ primi "piccoli"

$p_{k+1}, p_{k+2}, \dots$ primi "grandi"

Per ogni $n \geq 1$ definisco

$$A_n = \{i \in \{1, \dots, n\} : i \text{ ha solo fattori piccoli}\}$$

$$B_n = \{i \in \{1, \dots, n\} : i \text{ ha almeno un fattore grande}\}$$

$$\text{Allora} \quad n = \#A_n + \#B_n$$

$$\text{Se dimostro che} \quad \#A_n \leq (\log_2 n)^k < \frac{n}{4} \quad \text{per } n \text{ grande}$$

$$\#B_n \leq \frac{n}{2}$$

allora abbiamo un assurdo.

$$\boxed{\#A_n} \quad \text{Ogni el. di } A_n \text{ è } p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$$

$$\text{Tutti i } k \text{ esponenti sono } \leq \log_{p_i} n \leq \log_2 n$$

Ho k esponenti tutti più piccoli di $\log_2 n$ $\rightarrow (\log_2 n)^k$ possibilità al massimo.

$$\boxed{\#B_n} \quad B_n = \bigcup_{i \geq k+1} \underbrace{\text{elementi divisibili per } p_i}_{\text{sono } \leq \frac{n}{p_i} \text{ (sarebbe la parte intera)}}$$

$$\text{Quindi} \quad \#B_n \leq \sum_{i \geq k+1} \frac{n}{p_i} = n \sum_{i \geq k+1} \frac{1}{p_i} \leq \frac{n}{2} \quad \because$$

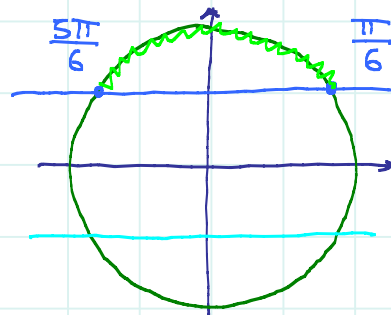
$\uparrow$
certi el. li
conto più volte

Esercizio 3 Consideriamo $a_n = \sin n$

① $\lim a_n$ non esiste. Perché?

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ N.E. Non implica in automatico $\sin n$ non ha lim.

Claim: esistono infiniti n per cui n radianti vanno a posizionarsi tra $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$



Questo ci dice che $\sin n \geq \frac{1}{2}$ su una s.succ.

Analogamente $\sin n \leq -\frac{1}{2}$ su una s.succ.

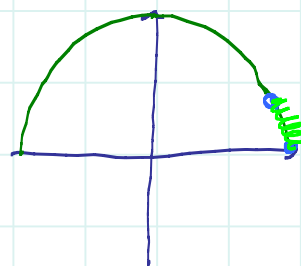
Claim più preciso: $\forall k \geq 0 \exists m_k$ t.c. $\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq m_k \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

Basta osservare che $\underbrace{\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}}_{\substack{\text{lungh.} \\ \text{interv.}}} = \frac{2\pi}{3} > 2$ (basterebbe 1)

② $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sin n = 1$

$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \sin n = -1$

Claim molto più forte: per ogni $\alpha \in [0, 2\pi]$, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono infiniti n per cui n casca tra $\alpha - \varepsilon$ e $\alpha + \varepsilon$ sulla circonferenza trigonometrica.



Sotto-claim: esistono infiniti n che cascano tra 0 ed ε

$$2k\pi \leq n \leq \varepsilon + 2k\pi$$

$$2\pi \leq \frac{n}{k} \leq \frac{\varepsilon}{k} + 2\pi$$

$$0 \leq \frac{n}{k} - 2\pi \leq \frac{\varepsilon}{k}$$

$$0 \leq \frac{n}{2k} - \pi \leq \frac{\varepsilon}{2k}$$

Fatto generale : ogni numero α irrazionale lo posso approssimare con un razionale $\frac{p}{q}$ che ha denominatore $\leq n$ e l'approssimazione è migliore di $\frac{1}{nq}$

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{nq}$$

Caso classico

$$\pi = 3,1415$$

$$\frac{314}{100} = \text{errore di } \frac{1}{100}$$

$$\frac{22}{7} = 3,142857$$

$$\text{denom } 7 \quad \text{errore } \frac{1}{100}$$