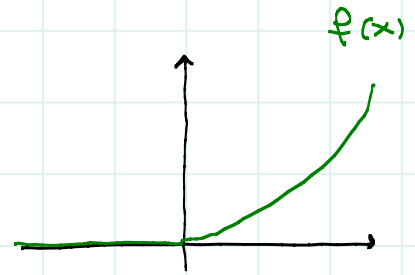


EPPUR SI MUOVE

Esiste $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ tale che

(i) $f(x) = 0$ per ogni $x \leq 0$

(ii) $f(x) > 0$ per ogni $x > 0$



Dalla (i) e dall'essere C^∞ segue che

$$f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k \geq 0$$

- Le derivate sono tutte nulle ... eppur si muove
- Tutti i suoi polinomi di Taylor in $x=0$ sono $\equiv 0$, quindi

$$f(x) = o(x^n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

quindi è "infinitamente piatta".

- La sua serie di Taylor converge per ogni $x \in \mathbb{R}$, ma non converge a $f(x)$ che quindi NON è analitica.

Un esempio è $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ per $x > 0$

Altri esempi possibili: $f(x) = e^{-1/x^2}$ per $x \neq 0$

↑ tutte le derivate nulle per $x=0$



Dim per $e^{-\frac{1}{x}}$

$f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$. Ovviamente è continua su tutto $\mathbb{R}$
 $\stackrel{!}{=} 0$ per $x \leq 0$

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} \quad \text{per } x > 0 \quad (f=0 \text{ per } x < 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0 \quad (\text{pongo } \frac{1}{x} = y \text{ e mi ritrovo } \frac{y^2}{e^y} \text{ per } y \rightarrow +\infty)$$

Per un noto criterio questo basta per dire che $f'(0)$ esiste e vale 0.

$$f''(x) = e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^4} + e^{-\frac{1}{x}} \left(-\frac{2}{x^3}\right) \text{ per } x > 0 \quad (e = 0 \text{ per } x < 0)$$

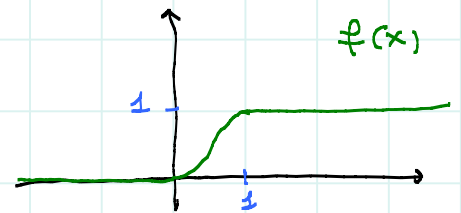
Ancora una volta $\lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = 0$, quindi esiste $f''(0) = 0$.

Analogamente $f^{(k)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} \frac{P_k(x)}{x^{2k}}$ con $P_k(x)$ polinomio opportuno (si dim. per induzione)

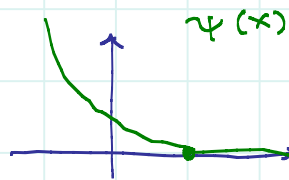
Ancora una volta $\lim_{x \rightarrow 0} f^{(k)}(x) = 0$, quindi $f^{(k)}(0) = 0$.

RACCORDO C^∞ Esiste $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ t.c.

- (i) $f(x) = 0$ per ogni $x \leq 0$
- (ii) $f(x) = 1$ per ogni $x \geq 1$
- (iii) $0 < f(x) < 1$ per ogni $x \in (0, 1)$
- (iv) f strett. cresc. in $(0, 1)$



Sia $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \end{cases}$ quella di prima



$$\psi(x) = \varphi(1-x)$$

Adesso pongo
$$f(x) := \frac{\varphi(x)}{\varphi(x) + \psi(x)}$$

Controlliamo che funzioni

→ è di classe C^∞ (rapporto di C^∞ con denominatore sempre > 0)

- (i) ovvia
- (ii) quasi ovvia perché $\psi(x) = 0$ per $x \geq 1$.
- (iii) ovvia

(iv) calcoliamo
$$f'(x) = \frac{\varphi'(x)(\varphi(x) + \psi(x)) - (\varphi'(x) + \psi'(x))\varphi(x)}{(\varphi(x) + \psi(x))^2}$$

$$= \frac{\varphi'\psi - \psi'\varphi}{(\quad)^2} > 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} \varphi' & \psi & & \psi' & \varphi \\ + & + & & - & + \end{matrix}$$

Esercizio di Analisi 3

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile.

Sia $\varepsilon > 0$.

Allora esiste $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ t.c.

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \leq \varepsilon$$

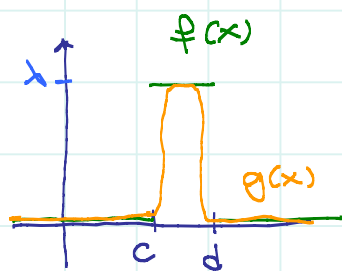
Moralmente: esiste una $g \in C^\infty$ il cui grafico è molto vicino al grafico della f (la quale può essere orribile).

Dim Caso banale: f è multiplo della funzione caratteristica di un intervallo

Basta fare due raccordi molto
shekki dalle due parti

Basta stimare l'integrale della differenza

con $|\lambda|$ lungo intervalli in cui non coincidono



Caso semibanale: f è una step function, cioè comb. lin. di casi
banali ~ comb. lin. delle g corrispondenti

Caso generale: Data f integrabile, trovo φ step funct. tale che

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx \leq \frac{1}{2} \varepsilon$$

Per il caso semibanale esiste g di classe C^∞ tale che

$$\int_a^b |\varphi(x) - g(x)| dx \leq \frac{1}{2} \varepsilon$$

Concludo con la triangolare.

Molto meno banale: posso supporre che g sia addirittura un
polinomio?