

Esercizio 1 Dimostrare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} (\sin x)^n dx = 0$

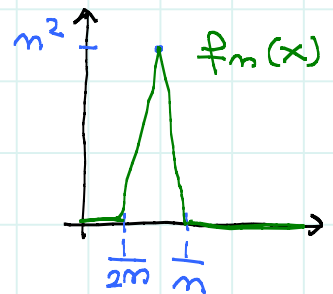
Dim. sbagliata: per ogni $x \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ vale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sin x)^n = 0$$

quindi "passo al limite sotto l'integrale" e viene 0.

Esempio Prendiamo $f_n(x)$ come in figura.

Allora, per ogni $x \in [0, 1]$, senza eccezioni, vale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$



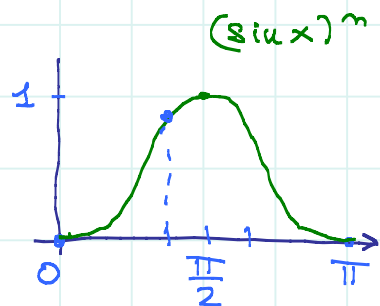
tuttavia $\int_0^1 f_n(x) dx = \text{area} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n} \cdot n^2 \rightarrow +\infty$

$\uparrow$ base $\uparrow$ altezza

Sol esercizio 1 Fisso $\varepsilon > 0$

Scrivo

$$\int_0^{\pi} (\sin x)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \dots + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon} \dots + \int_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\pi} \dots$$



Ora

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon} (\sin x)^n dx \leq 2\varepsilon$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\leq 1}$

Inoltre

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} (\sin x)^n dx = \int_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\pi} (\sin x)^n dx \leq \left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right) \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right]^n$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\leq \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)\right]^n}$

Mettendo insieme

$$\int_0^{\pi} (\sin x)^n dx \leq 2\varepsilon + 2 \underbrace{\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)}_0 \underbrace{\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)\right]^n}_0$$

Vorrei fare $\lim a_n$ e s_n , ma non so che esiste a_n , quindi faccio

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} (\sin x)^n dx \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \text{RHS} = 2\varepsilon$$

Essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, questo mi dice che $\limsup \int \dots \leq 0$

La disuguaglianza $\liminf \int_0^{\pi} \dots \geq 0$ è banale perché l'integro roba ≥ 0 .

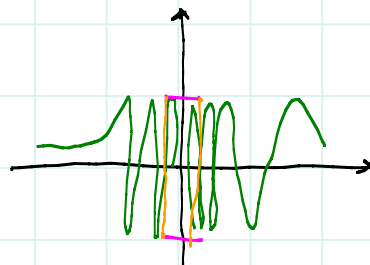
Esercizio Dimostrare che $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ è integrabile in $[-1, 1]$

Per ogni $\varepsilon > 0$, devo trovare step funct

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$$

t.c.

$$\int_{-1}^1 (\psi(x) - \varphi(x)) dx \leq \varepsilon$$



Facciamo un buco tipo $[-\frac{1}{8}\varepsilon, \frac{1}{8}\varepsilon]$ intorno all'origine.

Lì mettiamo $\varphi \equiv -1$ e $\psi \equiv 1$

$$\text{Paghiamo } 2 \cdot \frac{1}{4} \varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon$$

Ora su $[\frac{1}{8}\varepsilon, 1]$ e su $[-1, -\frac{1}{8}\varepsilon]$ la $f(x)$ è integrabile perché continua, quindi su entrambi gli intervalli posso definire φ e ψ in modo da pagare meno di $\frac{1}{4} \varepsilon$.

Fatto generale

Allo stesso modo si dimostra che sono integrabili tutte le funzioni continue tranne un numero finito di p.ti (ovviamente anche limitate)