

Prodotto di Serie Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ due serie.

Domanda: posso moltiplicarle? Come?

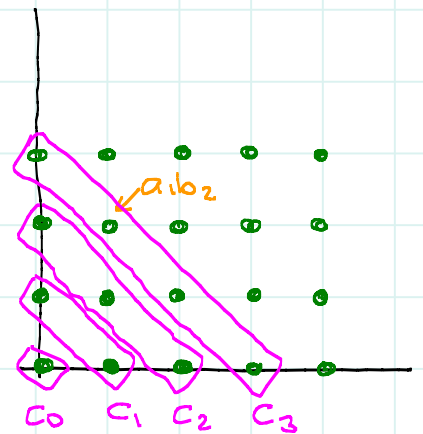
Euristica $\sum a_n \cdot \sum b_n = (a_0 + a_1 + a_2 + \dots)(b_0 + b_1 + b_2 + \dots)$

$$= \underbrace{a_0 b_0}_{c_0} + \underbrace{a_0 b_1 + a_1 b_0}_{c_1} + \underbrace{a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0}_{c_2} + \dots$$

Verrebbe da porre $c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ e dire che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

Domanda: se $\sum a_n = A_{\infty}$ e $\sum b_n = B_{\infty}$,
possiamo concludere che
 $\sum c_n = A_{\infty} B_{\infty}$



Esempio del NO $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ $b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

Allora $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergono per Leibniz.

La serie del prodotto non converge perché non verifica nemmeno la cond. neces.

$$c_n := \sum_{k=0}^n \underbrace{\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}}_{a_k} \cdot \underbrace{\frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}}}_{b_{n-k}} = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} \cdot \sqrt{n-k+1}}$$

solo $n+1$ termini tutti $\geq \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

Teorema del S1 Supponiamo che $\sum a_n$ conv. ASSOLUTAMENTE
e $\sum b_n$ converga (e assol. meglio!)

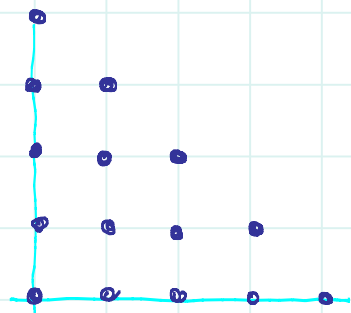
Allora $\sum c_n$ converge assolutamente e converge a $A \cdot B_\infty$

Dim Parte easy: $\sum |c_n|$ converge

Oss. base

$$\sum_{k=0}^m c_k = a_0 B_m + a_1 B_{m-1} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^m a_k B_{m-k} \quad [\text{La somma del triangolo riorganizzato per colonne verticali}]$$



dove ho posto $B_m = \sum_{k=0}^m b_k \rightarrow B_\infty$

$$A_m = \sum_{k=0}^m a_k \rightarrow A_\infty$$

Ora
$$\sum_{k=0}^m |c_k| \leq \sum_{k=0}^m |a_k| \cdot \underbrace{|B_{m-k}|}_{\substack{\text{limitati} \\ \text{essendo succ.} \\ \text{convergente}}} \leq \hat{B} \underbrace{\sum_{k=0}^m |a_k|}_{\substack{\text{limitata per} \\ \text{assoluta convergenza}}}$$

Ho posto $\hat{B} := \sup \{ |B_m| : m \in \mathbb{N} \}$ [finito perché $B_m \rightarrow B_\infty \in \mathbb{R}$]

Parte più delicata: la somma è proprio $A_\infty \cdot B_\infty$, cioè per ogni $\varepsilon > 0$ si ha che

$$\left| \sum_{k=0}^m c_k - A_\infty B_\infty \right| \leq \varepsilon \quad \text{se } m \text{ è abbastanza grande}$$

Poniamo $\hat{A} := \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ [finito per assoluta convergenza]

- Ci viene dato $\varepsilon > 0$.

Basterebbe $\frac{1}{3\varepsilon}$

- Poiché $\sum a_n$ converge

$$\exists H_\varepsilon \text{ t.c. } |A_m - A_\infty| \leq \frac{1}{\hat{B}+1} \cdot \frac{1}{4} \varepsilon \quad \forall m \geq H_\varepsilon$$

- Poiché $\sum |a_n|$ converge

$$\exists K_\varepsilon \text{ t.c. } \sum_{k > K_\varepsilon} |a_k| \leq \frac{1}{2\hat{B}+1} \cdot \frac{1}{4} \varepsilon$$

- Poiché $\sum b_n$ converge

$$\exists L_\varepsilon \text{ t.c. } |B_m - B_\infty| \leq \frac{1}{\hat{A}+1} \cdot \frac{1}{4} \varepsilon \quad \forall m \geq L_\varepsilon$$

- Dico che n abbastanza grande basta $n \geq \max\{K_\varepsilon + L_\varepsilon, H_\varepsilon\}$.

↑
indici messi a posto dopo video

Vediamo perché basta.

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n c_k - A_\infty B_\infty \right| &= \left| \sum_{k=0}^n a_k B_{n-k} - A_\infty B_\infty \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=0}^n a_k B_{n-k} - \sum_{k=0}^n a_k B_\infty \right| + \left| \sum_{k=0}^n a_k B_\infty - A_\infty B_\infty \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^n a_k (B_{n-k} - B_\infty) \right| + \left| B_\infty \left(\sum_{k=0}^n a_k - A_\infty \right) \right| \\ &= \underbrace{\left| \sum_{k=0}^{K_\varepsilon} a_k (B_{n-k} - B_\infty) \right|}_{(1)} + \underbrace{\left| \sum_{k=K_\varepsilon+1}^n a_k (B_{n-k} - B_\infty) \right|}_{(2)} + \underbrace{\left| B_\infty \left(\sum_{k=0}^n a_k - A_\infty \right) \right|}_{(3)} \end{aligned}$$

Dico che tutti e 3 sono $\leq \frac{1}{4} \varepsilon$ e questo basta.

$$(3) \leq \underbrace{|B_\infty|}_{\leq \hat{B}} \cdot \underbrace{|A_n - A_\infty|}_{\frac{1}{\hat{B}+1} \cdot \frac{1}{4} \varepsilon} \leq \frac{1}{4} \varepsilon$$

↑ il +1 tutela dal caso $\hat{B} = 0$
(vero perché $n \geq H_\varepsilon$)

Consideriamo ②. Osserviamo che $|B_i - B_\infty| \leq |B_i| + |B_\infty| \leq 2\hat{B}$
e quindi

$$\begin{aligned} \textcircled{2} &\leq \sum_{k=K_\varepsilon+1}^m |a_k| \cdot \underbrace{|B_{m-k} - B_\infty|}_{\leq 2\hat{B} \text{ (vero sempre)}} \leq 2\hat{B} \cdot \sum_{k=K_\varepsilon+1}^m |a_k| \\ &\leq \frac{1}{2\hat{B}+1} \cdot \frac{1}{4\varepsilon} \text{ (vero per defn. di } K_\varepsilon) \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\leq \sum_{k=0}^{K_\varepsilon} |a_k| \cdot \underbrace{|B_{m-k} - B_\infty|}_{\leq \frac{1}{\hat{A}+1} \cdot \frac{1}{4}\varepsilon \text{ vero se } m-k \geq L_\varepsilon} \leq \frac{1}{\hat{A}+1} \cdot \frac{1}{4}\varepsilon \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|}_{\hat{A}} \leq \frac{1}{4}\varepsilon \end{aligned}$$

Perché $m-k \geq L_\varepsilon$? Perché $m \geq K_\varepsilon + L_\varepsilon$ e $k \leq K_\varepsilon$.
— 0 — 0 —

Applicazione standard Visto a suo tempo

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{x^k}{k!}}_{a_k} \quad [\text{Taylor}]$$

$$e^y = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{y^k}{k!}}_{b_k} \quad [\text{Anti-Taylor}]$$

Allora

$$\begin{aligned} c_m &= \sum_{k=0}^m a_k b_{m-k} = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} x^k \frac{1}{(m-k)!} y^{m-k} \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{1}{m!} \frac{m!}{k!(m-k)!} x^k y^{m-k} \\ &= \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k y^{m-k} \\ &= \frac{1}{m!} (x+y)^m \end{aligned}$$

(Binomio di Newton)

Quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = e^{x+y}$$

Questo dimostra che se pongo in astratto

$$\varphi(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

(che converge assolut. per ogni x per il criterio ...)

allora questa funzione verifica

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y) \quad \begin{array}{cc} \forall x \in \mathbb{R} & \forall y \in \mathbb{R} \\ \in \mathbb{C} & \in \mathbb{C} \end{array}$$

— 0 — 0 —