

PROPRIETÀ DI RIORDINAMENTO PER SERIE

Proprietà commutativa della somma: se in una somma FINITA cambio l'ordine degli addendi, il risultato non cambia.

[Nel caso di due addendi è un assioma, poi si procede per induzione]

Domanda: si salva qualcosa nel caso delle serie?

In generale NO, ma SI se la serie converge ASSOLUTAMENTE.

Teorema del NO Sia $\sum a_n$ una serie che converge, ma non assolutamente.

Allora riordinando i termini le possiamo far assumere un comportamento a scelta

Idea della dim.

1^a osservazione: se sommo solo i termini positivi diverge a $+\infty$
" " " negativi " $-\infty$

(se non fosse così la serie originale conv. assol. oppure divergerebbe a $\pm \infty$).

2^a osservazione: posso ottenere somma 2026 con questo algoritmo

→ all'inizio sommo termini pos. fino a superare 2026 (e prima o poi succede per la 1^a oss.)

→ poi inizio ad usare i neg. fino a quando scendo sotto 2026,

→ poi riprendo con i pos., e così via.

Così uso tutti i termini e convergo a 2026 perché gli sfioramenti in alto o in basso sono $\leq$ dell'ultimo termine usato e $a_n \rightarrow 0$.

Teorema del SI Sia $\sum a_n$ una serie assolutamente convergente.
 Sia $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una permutazione (funzione iniettiva e sng.)

Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

↑
serie con i
termini riordinati

Dim Sia S_n le somme parziali del RHS e sia $S_n \rightarrow S_{\infty}$
 Devo dimostrare che, per n abbastanza grande, ↑
RHS

$$\left| \underbrace{\sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)}}_{\text{somma parziale del LHS}} - S_{\infty} \right| \leq \varepsilon$$

- Mi viene dato $\varepsilon > 0$
- Poiché $\sum a_n$ converge, $\exists H_{\varepsilon}$ t.c. $|S_m - S_{\infty}| \leq \frac{1}{2} \varepsilon \quad \forall m \geq H_{\varepsilon}$
- Poiché $\sum |a_n|$ converge, $\exists k_{\varepsilon}$ t.c. $\underbrace{\sum_{k \geq k_{\varepsilon}} |a_k|}_{\text{coda di } \sum |a_n|} \leq \frac{1}{2} \varepsilon$

- Pongo $L_{\varepsilon} := \max \{H_{\varepsilon}, k_{\varepsilon}\}$. Poiché $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ è surgettiva
 $\exists M_{\varepsilon}$ t.c. $\sigma(\{1, \dots, m\}) \supseteq \{1, \dots, L_{\varepsilon}\} \quad \forall m \geq M_{\varepsilon}$

• Claim: $\left| \sum_{k=0}^n a_{\sigma(k)} - S_{\infty} \right| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq M_{\varepsilon}$

Dimostriamo il claim. Poniamo

$$U_m := \{k \in \{1, \dots, m\} \text{ t.c. } \sigma(k) \in \{1, \dots, L_{\varepsilon}\}\}$$

↑
utili

$$I_m := \{k \in \{1, \dots, m\} \text{ t.c. } \sigma(k) \geq L_{\varepsilon} + 1\}$$

↑
inutili

Ora scriviamo

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=0}^m a_{\sigma(k)} - S_{\infty} \right| &= \left| \sum_{k \in U_m} a_{\sigma(k)} + \sum_{k \in I_m} a_{\sigma(k)} - S_{\infty} \right| \\
&\leq \left| \sum_{k \in U_m} a_{\sigma(k)} - S_{\infty} \right| + \sum_{k \in I_m} |a_{\sigma(k)}| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{L_{\varepsilon}} a_k - S_{\infty} \right| + \sum_{k \in I_m} |a_{\sigma(k)}| \\
&\quad \uparrow \text{uso propr. comm. in una somma FINITA} \quad \uparrow \text{tutti } \geq L_{\varepsilon} + 1 \\
&\leq \underbrace{\left| \sum_{k=0}^{L_{\varepsilon}} a_k - S_{\infty} \right|}_{\leq \frac{1}{2} \varepsilon} + \underbrace{\sum_{k=L_{\varepsilon}+1}^{\infty} |a_k|}_{\leq \frac{1}{2} \varepsilon} \\
&\quad \text{perché } L_{\varepsilon} \geq H_{\varepsilon} \quad \text{perché } L_{\varepsilon} \geq k_{\varepsilon} \\
&\leq \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon = \varepsilon \quad \ddot{} \\
&\quad \quad \quad \text{--- } 0 \quad \text{--- } 0 \quad \text{---}
\end{aligned}$$

PROPRIETÀ DI RAGGRUPPAMENTO

Oss. Dalle proprietà di riordinamento segue che posso definire la somma di un qualunque sottoinsieme NUMERABILE di numeri reali.

Cioè dato $A \subseteq \mathbb{R}$ con A numerabile (cioè esiste $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow A$ iniettiva e surgettiva), allora posso definire

$$\sum_{a \in A} a \quad \text{purché} \quad \sum_{a \in A} |a| \text{ converge}$$

Idea: A lo posso pensare come immagine di una succ $\{a_n\}$ iniettiva e pone

$$\sum_{a \in A} a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Ma se cambio a_n , cambierà la somma?

NO, se converge assolutamente!

Raggruppamento

Sia $\{a_n\}$ una successione.

Siano $A_i \subseteq \mathbb{N}$ una partizione di $\mathbb{N}$

$$\rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset \text{ se } i \neq j$$

$$\rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \mathbb{N}$$

Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{n \in A_i} a_n \right)$$

vale purché $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converga!

[Analogo della proprietà associativa per le somme finite]

Dim (La stessa di prima!) Pongo di nuovo $L_\varepsilon := \max \{M_\varepsilon, K_\varepsilon\}$

Allora esiste M_ε tale che

$$A_0 \cup A_1 \cup \dots \cup A_m \supseteq \{0, 1, \dots, L_\varepsilon\} \quad \forall m \geq M_\varepsilon$$

A questo punto

$\sum_{i=0}^m \left(\sum_{k \in A_i} a_k \right)$ contiene due tipi di addendi:

$\rightarrow$ tutti gli a_k con $k = \{0, 1, \dots, L_\varepsilon\}$

$\rightarrow$ altri a_k con $k \geq L_\varepsilon + 1$

I secondi danno un contributo $\leq \frac{1}{2} \varepsilon$

I primi danno un contributo che dista da $S_\infty \leq \frac{1}{2} \varepsilon$.

— 0 — 0 —